

Cours, travaux pratiques et exercices corrigés

Classes prépas • IUT • Licence • Écoles d'ingénieurs

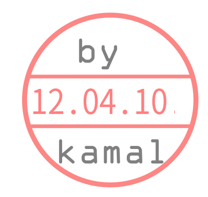
AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

exclusif

Olivier Le Gallo

DUNOD

AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES



Cours, travaux pratiques et exercices corrigées

Olivier Le Gallo
Professeur de chaire supérieure en classe préparatoire PSI
au lycée Clemenceau de Nantes

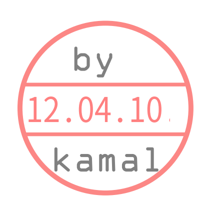




Illustration de couverture : *Fotolia*

ISBN 978-2-10-054192-8

TABLE DES MATIÈRES

EXERCICES

■ CHAPITRE 4 : MODÈLES USUELS

EXERCICES

■ CHAPITRE 5 : ANALYSE FRÉQUENTIELLE

FICHES RESSOURCES

AVANT-PROPOS

■ L'Automatique est la discipline qui développe les méthodes et les moyens relatifs à la commande des systèmes. Elle concerne une grande majorité de métiers aujourd'hui et tout ingénieur se doit d'en posséder une culture minimale. Ses développements sont relativement récents et la fin du XXième siècle a vu l'accélération de ses champs d'application, à une vitesse telle que le monde technologique et industriel s'est trouvé créateur de savoirs, qui jusqu'ici étaient élaborés exclusivement dans les laboratoires de recherche des universités et des grandes écoles.

Une synergie entre les développements des industriels et la formalisation qui caractérise le monde universitaire s'est alors mise en place, aboutissant à une refonte dans la manière d'aborder l'Automatique dans les différents cycles de formation. Celle-ci ne pouvait plus n'être abordée qu'en deuxième cycle, voire en troisième cycle, mais se devait de l'être au plus tôt dans la formation des ingénieurs, afin qu'ils en possèdent les bases, quels que soient leurs futurs parcours.

Dans ce contexte, l'Automatique a été introduite dans l'enseignement de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur des classes préparatoires scientifiques à la fin des années 90, ainsi que dans la majorité des licences et premiers cycles universitaires préparant aux carrières de l'industrie.

La difficulté pédagogique immédiate fut d'introduire une discipline, jusqu'ici de synthèse et enseignée en fin de formation, à de jeunes bacheliers ayant encore peu de bagages scientifiques et, pour la grande majorité d'entre eux, aucune culture technologique. L'Automatique se devait donc de se transformer en discipline initiale, conjuguant la rigueur mathématique maximale accessible aux étudiants de premier cycle à une approche intuitive, nécessaire à ce niveau, et permise à l'aide du puissant outil pédagogique que sont les travaux pratiques.

Ces travaux pratiques sont réalisés sur des systèmes issus du monde industriel. Il s'agit de diverses chaînes asservies, dont la partie opérative est de nature mécanique, afin d'être en adéquation avec le deuxième volet des Sciences Industrielles pour l'Ingénieur que constitue la Mécanique. Ces travaux pratiques permettent de combiner des activités de découverte et des activités de synthèse, dans la perspective du métier d'ingénieur. Ils permettent, en outre, de mettre en œuvre la démarche de modélisation et de confrontation des résultats à la réalité, dont la profonde compréhension est un élément essentiel à la formation des futurs ingénieurs, mais aussi très généralement de tout scientifique.

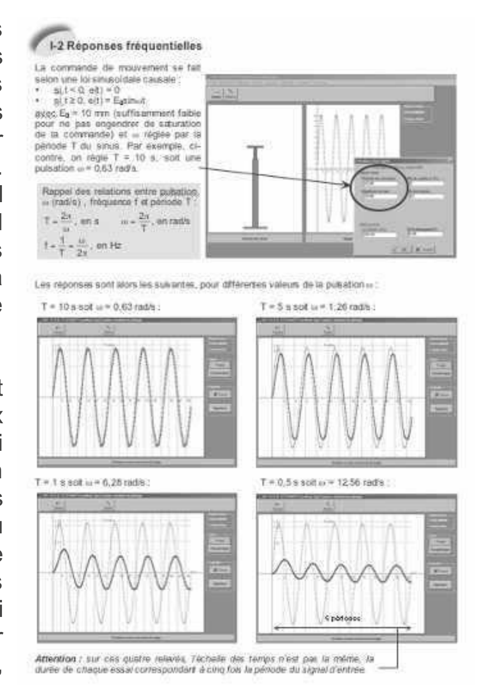


Cet ouvrage s'intéresse donc à l'***Automatique des Systèmes Mécaniques*** dans cet état d'esprit.

Le cours est un cours d'Automatique au sens large, transposable à tous les systèmes commandés. Toutefois, les illustrations, ainsi que les exercices et travaux proposés, se font très majoritairement sur des systèmes mécaniques, afin de constituer un ensemble cohérent et de forger, au fil des pages, une culture des solutions aujourd'hui mises en œuvre dans ce domaine.

Dès les premières pages, le lecteur débutant sera donc sans doute confronté à des difficultés liées au vocabulaire technique. Bien évidemment, le vocabulaire de l'Automatique est entièrement défini. En revanche, certains éléments de vocabulaire liés à l'environnement technologique devront certainement faire l'objet de recherches personnelles de la part du lecteur. C'est une des difficultés d'un enseignement par nature pluridisciplinaire et non linéaire. Les sources d'informations pourront être les notices techniques des différents matériels du laboratoire, mais aussi toutes les sources multimédias modernes auxquelles ont aisément accès aujourd'hui les étudiants.

Une des volontés de cet ouvrage est de traduire, sous la forme usuelle d'un livre de cours, les indispensables apports des travaux pratiques. Tous les matériels utilisés sont parmi les plus classiquement présents dans les laboratoires de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur des classes préparatoires scientifiques. Avoir ces mêmes systèmes à disposition est sans nul doute favorable à la lecture et à un travail personnel approfondi. Toutefois, la description complète des matériels et des activités conduites doit permettre à tout étudiant de tirer entièrement parti de l'ouvrage malgré tout.



L'ouvrage est découpé en six chapitres, couvrant intégralement le programme d'Automatique des deux années de classes préparatoires scientifiques, qui diffère assez peu selon les filières. De temps en temps, quelques développements vont un peu plus loin, ouvrant des perspectives au lecteur. Ce contenu correspond également et globalement au programme de la majorité des IUT, licences et premières années de certaines écoles d'ingénieurs. Le lecteur qui souhaitera aller au-delà de ce contenu devra s'orienter vers des ouvrages abordant les aspects non linéaires, les systèmes échantillonnés et la représentation d'état.

Chaque chapitre est abondamment illustré d'exemples concrets, introductifs comme de synthèse. Des exercices entièrement corrigés concluent chaque chapitre. Ils sont très majoritairement issus de travaux pratiques ou de sujets de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur des concours d'entrée aux grandes écoles d'ingénieurs, tels que le Concours Commun Mines-Ponts, le Concours Central-Supélec, etc. Cet aspect devrait donner satisfaction au lecteur étudiant en classes préparatoires, pour lequel l'entraînement aux concours passe par la maîtrise de certains exercices types. Le lecteur issu de l'université trouvera là des sujets de réflexion particulièrement formateurs.

Quelques annexes référencées sous la dénomination de « fiches ressources » viennent compléter cet ensemble en fin d'ouvrage. Des liens vers ces pages sont insérés aux moments adéquats dans le cours.

Fiche ressource "outils d'analyse fonctionnelle"

■ Cet ouvrage est le fruit de plusieurs années d'expériences d'enseignement en classe préparatoire PSI* au lycée Clemenceau de Nantes et d'interventions à l'antenne de Rennes de l'ENS de Cachan. Il est difficile de lister toutes celles ou ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué aux réflexions qui ont permis sa réalisation. Mes pensées vont immédiatement à mes étudiants, dont la curiosité, l'intransigeance et la maturité intellectuelle sont le meilleur des ferments. Nombreuses ont été également les discussions pédagogiques avec mes collègues enseignants et les heures passées, ensemble, à mettre au point des travaux pratiques qui, de manière informelle, se retrouvent certainement dans ces pages.

Jean-Jacques Marchandeau, professeur en classes préparatoires au lycée Camille Vernet de Valence, a accepté l'important travail de relecture de l'ensemble de l'ouvrage. Je le remercie avec beaucoup d'amitié pour le temps qu'il y a consacré et la pertinence de ses remarques et conseils, dont j'ai essayé de tenir compte.

Je remercie également les fabricants de matériels de travaux pratiques, qui m'ont autorisé à citer leurs marques et parfois à utiliser certains de leurs documents, sans que cela revête le moindre aspect commercial.

Enfin, le dernier mot sera pour Jacqueline et Nathalie, expertes ès virgules et accords des participes, pour leur correction implacable.

Olivier Le Gallo

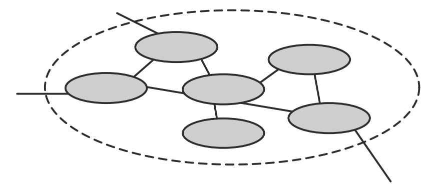
NOTION DE SYSTÈME



I - PREMIÈRES DÉFINITIONS

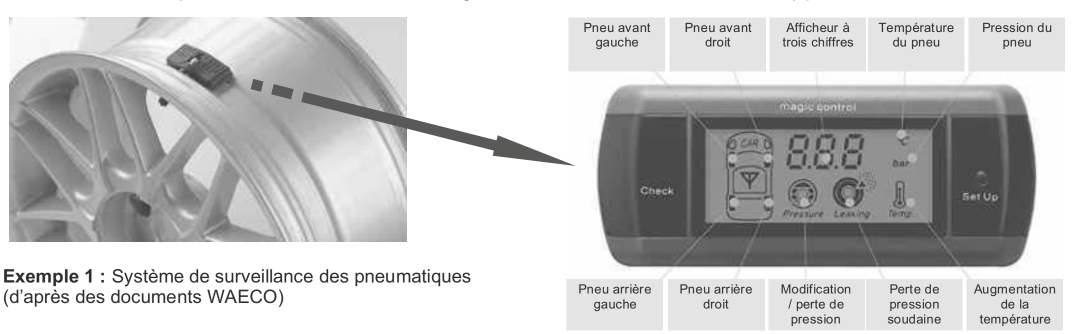
I-1 Système et fonction

Système solaire en astrophysique, système scolaire en sciences de l'éducation, système capitaliste en économie, système d'exploitation en informatique : nombreux sont les exemples où la langue française utilise le terme générique de système. S'il peut être tenté d'en dégager un élément essentiel, l'idée de système est celle d'un ensemble d'éléments interagissant entre eux et avec l'extérieur. Toutefois, on perçoit bien la grande généralité de cette définition et la différence notable qu'il peut y avoir, pour choisir d'autres exemples, entre le système nerveux d'un animal, le système international d'unités bien connu des scientifiques et des ingénieurs, ou encore le système de positionnement par satellites GPS. Cet ouvrage s'intéresse à une classe particulière de systèmes : ceux qui sont artificiels (par opposition à naturels) c'est-à-dire conçus et fabriqués par l'Homme. Tel est le travail quotidien de l'ingénieur. Leur définition est la suivante :

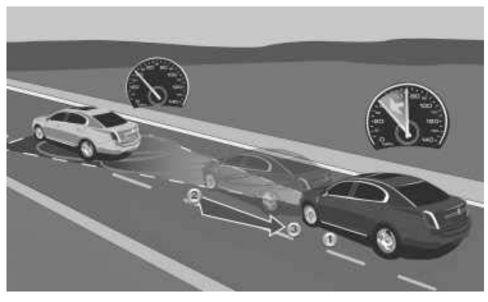


Un système est un ensemble ***organisé*** d'éléments interagissant entre eux et avec l'extérieur, dans le but de réaliser une ***fonction***.

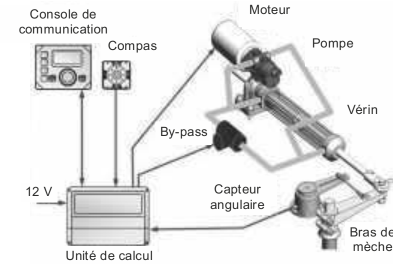
■ **Remarque :** Cette fonction répond à un besoin, exprimé ou latent. L'association d'une fonction à un besoin se fait par les méthodes de ***l'analyse fonctionnelle***, non développées ici.



Exemple 1 : Système de surveillance des pneumatiques (d'après des documents WAECO)



Exemple 2 : Régulateur de vitesse à contrôle de distance (Image http://commons.wikimedia.org)



Exemple 3 :
Pilote automatique pour barre à roue de voiliers (d'après des documents Créa-Technologie)

- Les éléments peuvent être matériels (intervenants humains, machines, logiciels…) mais aussi immatériels (méthodes, services, …). Ces éléments sont en nombre fini définissant la ***frontière*** du système qui le sépare de son ***environnement***, ou milieu extérieur.

- L'environnement fournit au système des ***entrées*** qui lui permettent d'agir en générant des ***sorties*** vers l'environnement.

- Parmi les entrées, on distingue la ***matière d'œuvre entrante***. La raison d'être (fonction à réaliser) du système est d'agir sur cette matière d'œuvre afin de lui ajouter de la valeur. La matière d'œuvre entrante augmentée de sa ***valeur ajoutée*** est la ***matière d'œuvre sortante***. La notion de valeur ***ajoutée*** est ici à prendre au sens le plus large et non pas au sens purement arithmétique. Selon le point de vue (cf. plus loin), et en particulier celui de l'automaticien, elle peut être associée à un changement de nature de la matière d'œuvre qui, entrante, peut par exemple être un ordre, puis, sortante, une action. La valeur ajoutée est alors l'exécution de l'ordre.

- Des entrées et des sorties autres que la matière d'œuvre peuvent exister. Ce sont :
  - des éléments de l'environnement nécessaires à la transformation de la matière d'œuvre (présence d'énergie par exemple) ou dont la présence ou la variation modifie cette transformation (réglages, actions extérieures diverses, etc.) : on les appelle ***données de contrôle*** ;
  - des apports supplémentaires à l'environnement, comme par exemple des informations apportées à un utilisateur, ou encore des déchets.

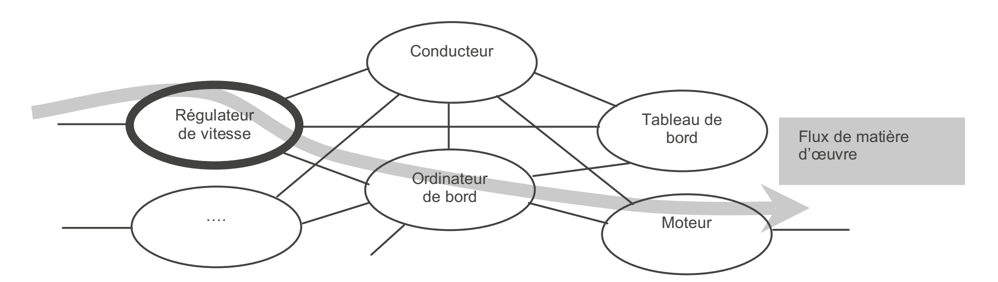
Ces définitions peuvent être illustrées sur les trois exemples précédents :

Système	**Fonction**	**Matière d'œuvre entrante**	**Matière d'œuvre sortante**	**Données de contrôle**	**Sorties secondaires**
Système de surveillance de la pression et de la température des pneus	Apporter au conducteur des informations concernant l'état des pneus	Pression et température de l'air dans les quatre pneus	Informations affichées au tableau de bord	Énergie électrique et réglages divers	
Régulateur de vitesse à contrôle de distance	Fournir une consigne à l'ordinateur de bord lui permettant d'adapter la distance du véhicule au véhicule qui précède	Position relative du véhicule qui précède	Consigne de vitesse à l'ordinateur de bord	Énergie électrique et réglages divers Vitesse du véhicule	Informations affichées au tableau de bord
Pilote automatique pour barre à roue de voilier	Établir le cap d'un voilier	Cap courant	Nouveau cap	Cap à suivre Champ magnétique terrestre Énergie électrique et réglages divers Actions de la mer et du vent	Informations affichées au tableau de bord

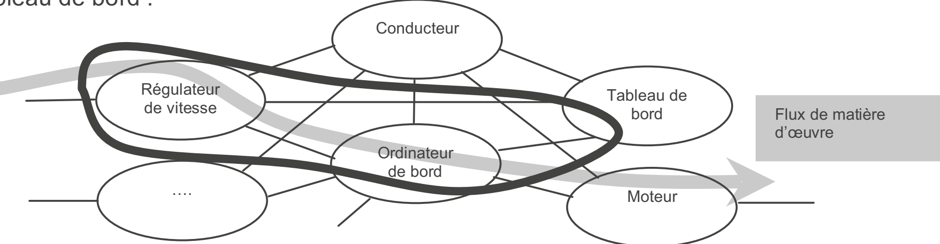
Important : une fonction s'indique toujours par un verbe à l'infinitif, suivi d'un complément d'objet direct et éventuellement de compléments circonstanciels.

I-2 Notion de point de vue

La frontière d'un système dépend du ***point de vue*** de celui qui l'étudie. Par exemple, ci-dessus, si on reprend le système régulateur de vitesse à contrôle de distance, le point de vue qui a été retenu exclut l'ordinateur de bord du système. Celui-ci fait alors partie de l'environnement du système et le système génère des sorties vers cet élément de son environnement. L'ordinateur de bord est alors un système extérieur, qui, parmi ses nombreuses entrées reçoit la consigne du régulateur de vitesse pour construire une sortie, à son tour, vers le moteur de la voiture pour la faire accélérer ou décélérer.



Ce point de vue est un point de vue assez structurel, qui cherche à associer fonctions et objets matériels. D'un autre point de vue, plus fonctionnel, le système de régulation de vitesse pourrait très bien être retenu comme le précédent, augmenté de la partie concernée de l'ordinateur de bord et du tableau de bord :



Par ailleurs, le point de vue adopté peut non seulement influer sur la frontière définissant le système, mais aussi sur ce qui, parmi ses entrées et sorties, sera retenu comme matière d'œuvre. Conservons l'exemple du régulateur de vitesse :

Système	Fonction	Matière d'œuvre entrante	Matière d'œuvre sortante	Données de contrôle	Sorties secondaires
Régulateur de vitesse à contrôle de distance	Fournir une consigne à l'ordinateur de bord lui permettant d'adapter la ***distance*** du véhicule au véhicule qui précède	***Position*** relative du véhicule qui précède	Consigne de vitesse à l'ordinateur de bord	Énergie électrique et réglages divers ***Vitesse*** du véhicule	Informations affichées au tableau de bord

Tel qu'il est décrit ci-dessus, à partir de la position relative du véhicule qui précède, le système établit une consigne de vitesse qu'il transmet à l'ordinateur de bord. Pour cela, il a besoin de connaître (donnée de contrôle) la vitesse courante du véhicule. La fonction s'exprime alors comme une ***adaptation de la distance*** entre les deux véhicules. Mais ce même système peut tout aussi bien être décrit comme réalisant une fonction d'adaptation de la vitesse à celle du véhicule qui précède :

Système	Fonction	Matière d'œuvre entrante	Matière d'œuvre sortante	Données de contrôle	Sorties secondaires
Régulateur de vitesse à contrôle de distance	Fournir une consigne à l'ordinateur de bord lui permettant d'adapter la ***vitesse*** du véhicule au véhicule qui précède	***Vitesse*** du véhicule.	Consigne de vitesse à l'ordinateur de bord	Énergie électrique et réglages divers ***Position*** relative du véhicule qui précède	Informations affichées au tableau de bord

La fonction est alors une ***adaptation de la vitesse*** à celle du véhicule qui précède : connaissant la vitesse courante du véhicule, le système établit une nouvelle consigne de vitesse qu'il transmet à l'ordinateur de bord. Pour cela il a besoin de connaître (donnée de contrôle) la position relative du véhicule qui précède.

On retiendra donc qu'il n'y a absolument pas unicité de la description fonctionnelle d'un système. Pour autant, un point de vue ayant été adopté, la formulation de la fonction doit, bien entendu, être cohérente avec matière d'œuvre retenue.

I-3 Interactivité de systèmes

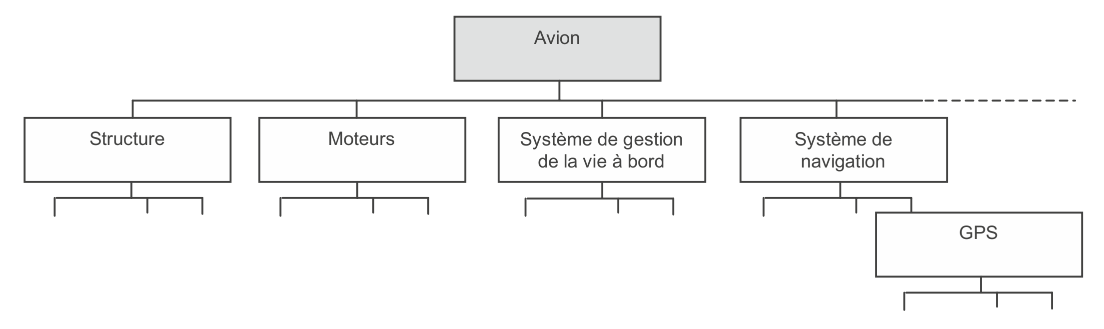
L'exemple précédent illustre, quel que soit le point de vue, la complexité des interactions qui peuvent exister entre différents systèmes partageant des matières d'œuvres ou des données de contrôles : régulateur de vitesse, ordinateur de bord, tableau de bord, etc.

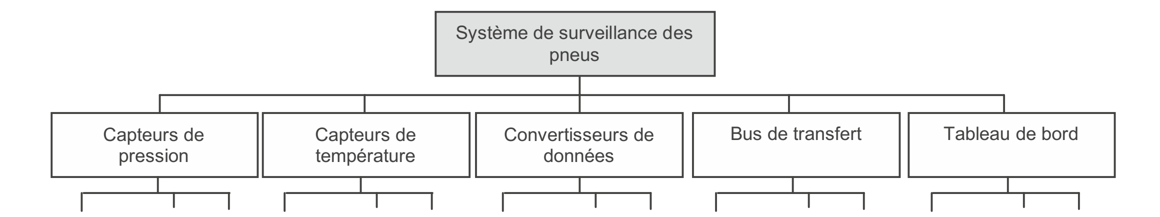
On peut ajouter, pour illustrer la complexité du propos, l'exemple des systèmes que les concepteurs d'un avion sont amenés à définir, regroupés dans le graphique ci-dessous :

Système de transport aérien
Système de réservations
Système de gestion du trafic
Système aéroportuaire
Système de distribution de kérosène
Structure de l'avion
Système de gestion de la vie à bord
Moteurs
Équipage
Système de contrôle du vol
Système de navigation
GPS
Avion
Système de transport ferroviaire
Système de transport terrestre
Système de transport maritime

I-4 Structure d'un système – analyse descendante

Comme ci-dessus, de manière ascendante, différents systèmes peuvent s'interconnecter. Inversement, de manière descendante, un système est constitué d'éléments qui sont eux-mêmes des systèmes (alors appelés sous-systèmes) interconnectés entre eux et ainsi de suite :





En phase de conception, les ingénieurs doivent concevoir un système devant réaliser une fonction globale. Pour cela, il convient d'imaginer des sous-systèmes dont l'assemblage permettra d'obtenir le résultat attendu. On procède donc par analyse descendante, étape par étape, en affinant la description de chaque sous-système. Cette structure descendante peut se poursuivre, a priori, jusqu'aux composants élémentaires qui ne sont plus des systèmes mais des ***objets techniques*** : pièce mécanique, câble électrique, etc. En pratique elle se termine lorsqu'elle aboutit à un sous-système dont la structure interne n'apporte rien à l'étude en cours. Encore une fois le ***point de vue*** de l'étude intervient dans la description.

Ainsi, par exemple, pour un constructeur automobile, l'autoradio n'est qu'un objet technique : la conception du véhicule ne nécessite pas la connaissance de sa réalisation interne. Dans une analyse fonctionnelle descendante réalisée en phase de conception du véhicule, la décomposition n'ira donc pas au-delà de l'objet global pour l'autoradio. Le constructeur automobile devra seulement s'interroger sur son insertion dans le tableau de bord et sa connexion avec les autres éléments (alimentation électrique, haut-parleurs, etc.), ce que l'analyse système du véhicule entier mettra en évidence. Inversement, bien entendu, pour le fabricant d'autoradios lui-même, celui-ci est un système : pour le concevoir il sera amené à le décomposer en de nombreux sous-systèmes (tuner, lecteur de CD, amplificateur, interface avec le conducteur, circuit électronique, etc.) eux-mêmes décomposés en sous-systèmes ou objets techniques selon le besoin.

De la même manière, pour intervenir dans la conception d'un système de transport aérien, au niveau par exemple des réservations, il n'est pas nécessaire de connaître la structure interne du système de transport ferroviaire. Seule la connaissance de ses interactions avec le système de transport aérien (correspondances) sont utiles. De même, il n'est pas nécessaire de décomposer l'avion en tous ses sous-systèmes, seul le système de gestion de la vie à bord qui gère les différents sièges est concerné.

■ **Remarque :** Dans les systèmes complexes, la structure définie correspond à des niveaux de responsabilité des équipes de conception qui travaillent alors en étroite collaboration, selon des protocoles reposant sur les interconnexions entre les sous-systèmes.

II - REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES D'UN SYSTÈME

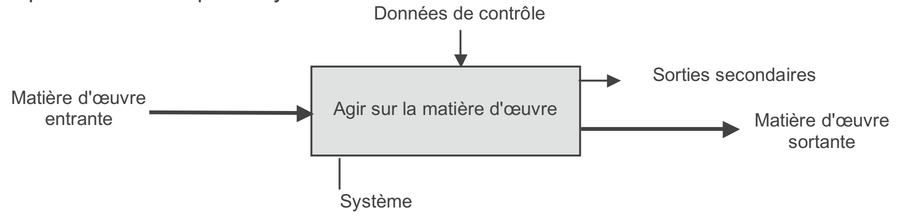
II-1 Bloc fonctionnel

Il existe une très grande diversité de représentations graphiques des systèmes répondant aux types de systèmes rencontrés et aux objectifs de l'étude menée. Précédemment, quelques premiers outils ont été utilisés : tableaux, graphes structurels, graphes d'arborescence. Citons pour mémoire également les diagrammes APTE et FAST qui sont des diagrammes strictement fonctionnels que nous n'exposerons pas ici.

Fiche ressource "outils d'analyse fonctionnelle"

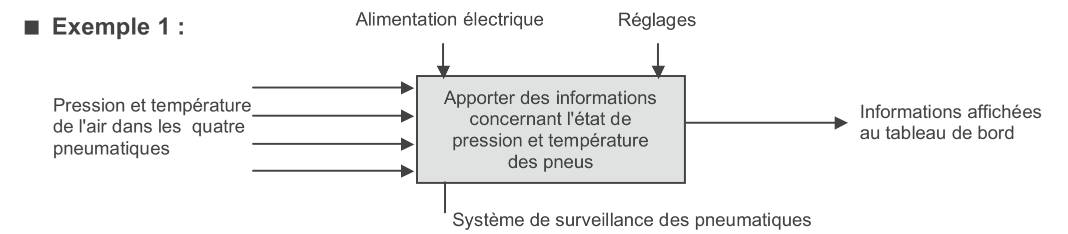
L'automaticien, nous le verrons par la suite, nécessite, au-delà des informations strictement fonctionnelles, des informations structurelles permettant, ***selon son point de vue***, le suivi des différents flux de matière d'œuvre. Ainsi, il adoptera une représentation qui consiste à figurer le

système par un rectangle, appelé ***bloc fonctionnel***, matérialisant sa frontière et à l'intérieur duquel est inscrite sa fonction. Des flèches, entrantes (généralement à gauche) et sortantes (généralement à droite), indiquent alors respectivement la matière d'œuvre entrante et la matière d'œuvre sortante. Des flèches, entrantes par le dessus, figurent des données de contrôle et d'autres flèches, sortantes, figurent d'éventuelles sorties secondaires. Le flux de matière d'œuvre peut être souligné par des flèches plus voyantes.

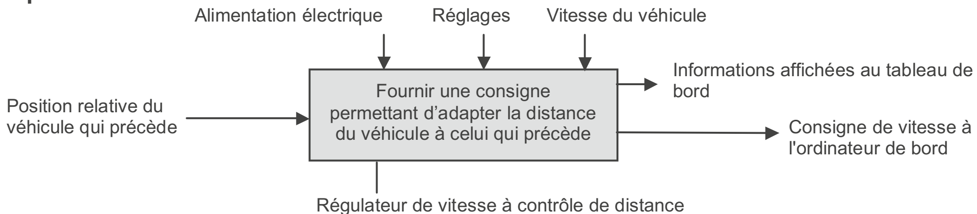


Cette représentation peut-être partielle au niveau des données de contrôle ou des sorties secondaires, selon le point de vue et donc le niveau de précision que l'on souhaite apporter à la description. Elle peut être illustrée sur les trois premiers exemples précédents :

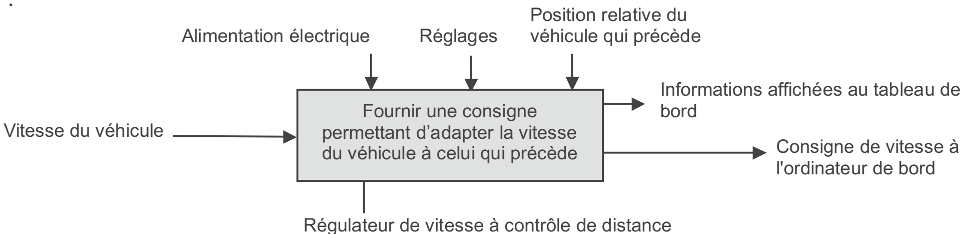
■ **Exemple 1 :**



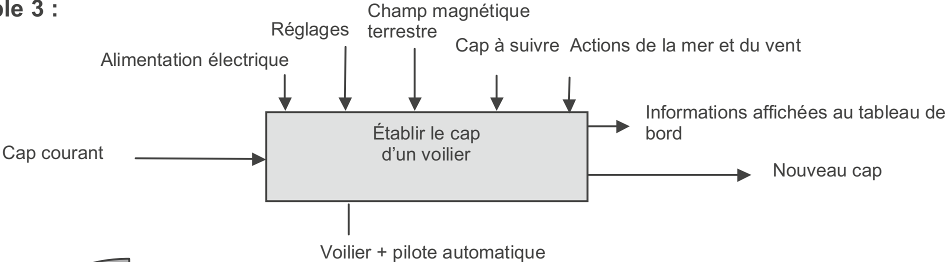
■ **Exemple 2 :**



Ou bien :



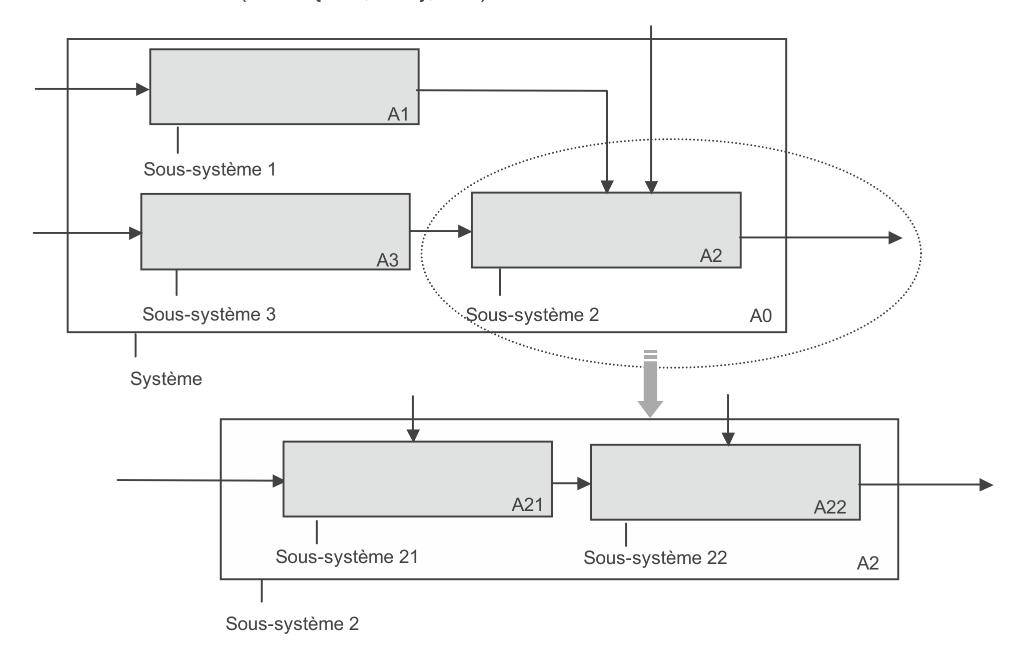
■ **Exemple 3 :**



Remarque : le voilier lui-même fait partie du système puisqu'il participe à la modification de son cap. C'est lui qui subit les actions mécaniques de la mer (safran + coque) et du vent (voilure) permettant l'orientation nécessaire au changement de cap. Voir plus loin.

II-2 Interactivité de systèmes

Les blocs fonctionnels ainsi définis peuvent alors être interconnectés au niveau de leurs entrées et sorties pour matérialiser l'assemblage de systèmes. Ainsi, une analyse descendante peut être élaborée pour décrire la structure fonctionnelle interne d'un système, étape par étape et avec une nomenclature associée (A2 → {A21, A22}, etc.) :



Cette représentation s'inspire de la méthode générale SADT ou IDEF0.

Fiche ressource "outils d'analyse fonctionnelle"

Cette méthode n'est pas la seule à reposer sur des blocs fonctionnels interconnectés. La lecture de cet ouvrage permettra d'en rencontrer d'autres. Le ***schéma bloc*** par exemple (cf. chapitre suivant), outil privilégié de l'automaticien, reposera sur cette description tout en s'en démarquant sur certains aspects.

II-3 D'un outil de description à un outil de simulation

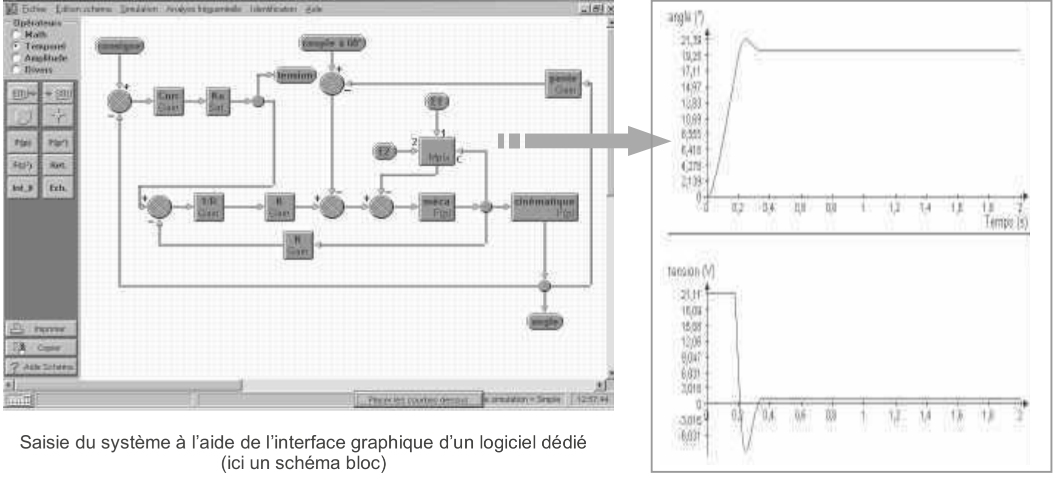
Si, dans un premier temps, les blocs fonctionnels interconnectés sont incontestablement un outil synoptique performant pour décrire la structure d'un système à travers les flux de matières d'œuvres, leur utilisation ne s'arrête pas à cette fonction de communication. De nombreuses simulations peuvent en effet s'y référer.

Par exemple, une panne peut être simulée en considérant qu'une matière d'œuvre sortante est altérée ou inexistante à la sortie d'un sous-système. La représentation graphique permet assez facilement d'identifier les conséquences de cette panne, par suivi du flux de matière d'œuvre concerné.

Mais l'usage principal qui va être détaillé dans cet ouvrage est d'associer ***une loi de comportement*** à chaque bloc fonctionnel. Une telle loi lie les sorties aux entrées. La description interconnectée traduit alors le système complet d'équations liant les différentes entrées-sorties entre elles et donc finalement le comportement du système.

En pratique associés à des logiciels de calcul, ces types de descriptions, plus ou moins adaptés, permettent donc de simuler le comportement du système en cours de fonctionnement, ce qui est d'un apport majeur pour les ingénieurs.

L'essentiel du propos de cet ouvrage illustrera cette pratique, dans le cas restreint de systèmes obéissant à certains types de lois de comportement simples.



Saisie du système à l'aide de l'interface graphique d'un logiciel dédié (ici un schéma bloc)

Exemples d'évolutions des sorties du système suite à la variation d'une entrée

III - PILOTE AUTOMATIQUE NAVICO POUR VOILIER À BARRE À ROUE

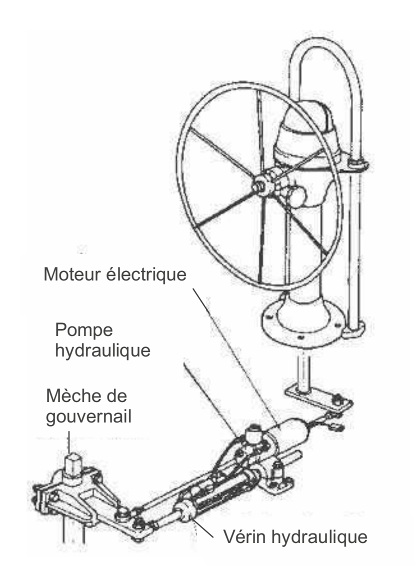
Ce système est proposé à l'équipement du laboratoire de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur des classes préparatoires scientifiques. Certains documents reproduits ci-après sont issus de la documentation conçue par Créa Technologie : http://www.crea-technologie.com

III-1 Description générale du système

Un voilier est dirigé à l'aide d'un « gouvernail » qui est l'ensemble constitué :

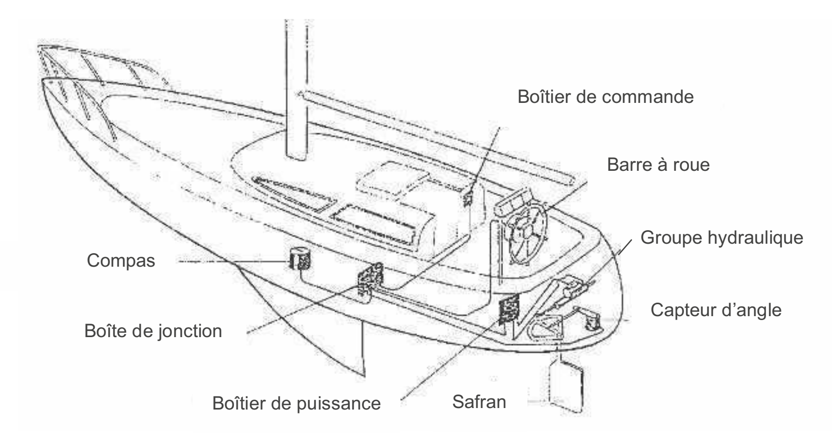
- du « safran » au contact de l'eau ;
- de la « mèche » qui est l'axe de la liaison pivot entre le safran et la coque ;
- d'une « barre franche » manœuvrée en poussant ou en tirant ou d'une « barre à roue » manœuvrée comme un volant par le barreur.

On s'intéresse ici aux voiliers de grandes dimensions équipés d'une barre à roue. La transmission de la puissance de la barre à la mèche de gouvernail peut être directe (câble, système de bielles) ou assistée par un groupe hydraulique, composé principalement d'un moteur, d'une pompe et d'un vérin. Ci-contre le montage d'un groupe hydraulique d'assistance sur une transmission par parallélogramme déformable.



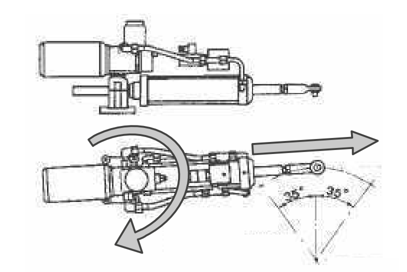
De plus, cet ensemble peut également s'insérer dans un système complet de pilotage automatique dans lequel le barreur est affranchi de toute action sur la barre à roue et se contente de sélectionner un cap à suivre sur un boîtier de commande.

C'est le cas du système développé par les sociétés Lecomble et Schmitt (http://www.ls-france.com) et Navico (http://www.navico.com). Il comporte les éléments suivants :



- une partie agissant mécaniquement sur le cap du voilier constituée du safran (plus en fait tout le bateau sur lequel agissent la mer et le vent) et du groupe hydraulique, muni d'un groupe de puissance alimentant son moteur électrique ; cette partie sera appelée chaîne d'action ;
- un compas ;
- un capteur d'angle sur la mèche du safran ;
- une partie composée d'une « boîte de jonction » et d'un boîtier de commande assurant le traitement des différentes informations ; cette partie sera appelée partie commande (PC) ;
- plus une barre à roue pour un usage manuel de sécurité ou d'agrément*, considérée comme hors système*.

NB : les notions de PC et de chaîne d'action seront définies d'une manière générale au paragraphe V.

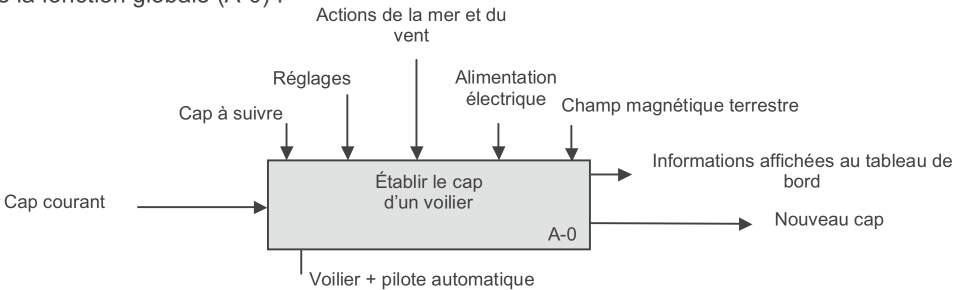


Le support du groupe se fixe sur le voilier selon une liaison adaptée à la cinématique de l'ensemble (liberté en rotation autour d'un axe parallèle à celui de la mèche). L'extrémité de la tige du vérin hydraulique est reliée à la mèche du safran.

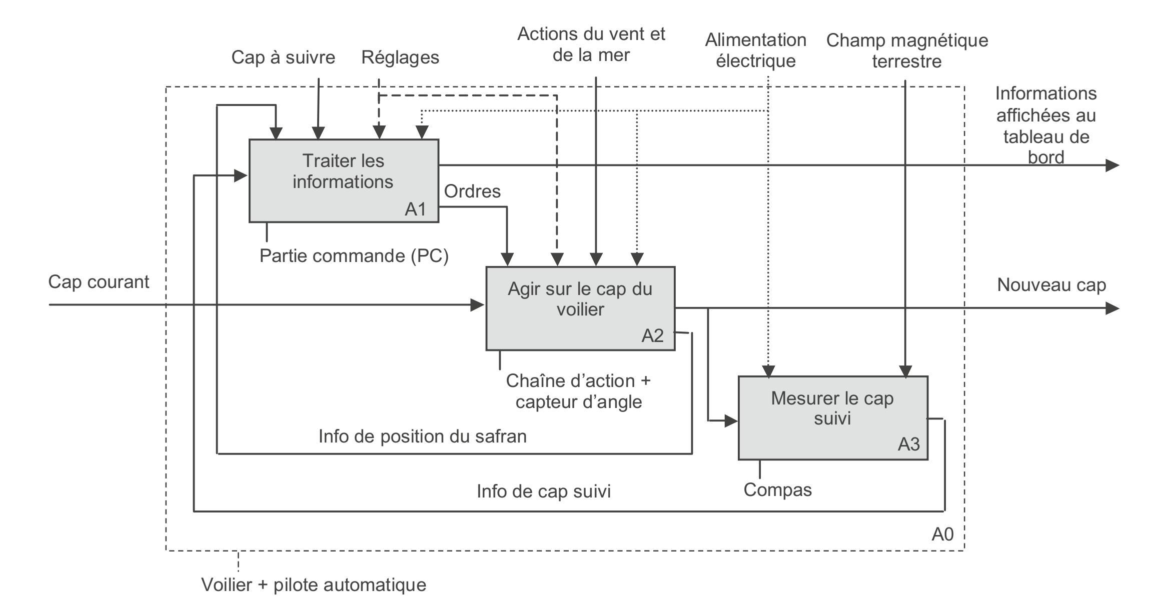
III-2 Analyse descendante

Les différentes parties qui ont été décrites ci-dessus (barre à roue exclue), associées à leurs interconnexions, permettent d'élaborer la définition de sous-systèmes selon l'analyse descendante de type SADT exposée ci-dessous.

Rappel de la fonction globale (A-0) :



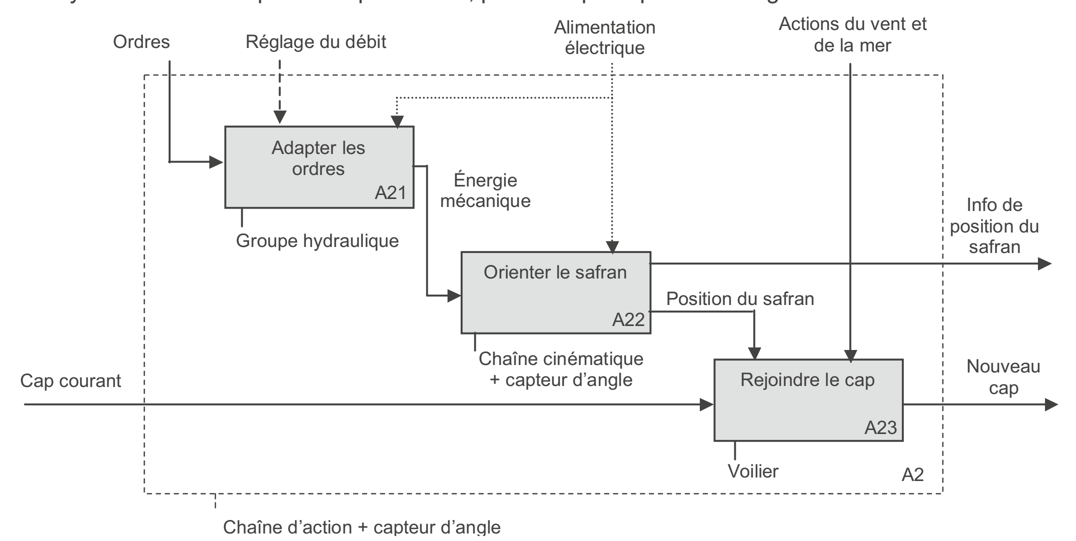
Cette fonction globale nécessite le pilote automatique et le voilier lui-même dont les limites définissent la frontière du système. Un premier niveau d'analyse peut faire apparaître les sous-systèmes suivants :



Ce diagramme de niveau A0 permet la lecture du fonctionnement global du système. Le barreur définit le cap à suivre qui est connu de la PC. Celle-ci a, à chaque instant, connaissance du nouveau cap suivi par le voilier (information fournie par le compas qui nécessite pour cela la mesure du champ magnétique terrestre). La PC peut donc comparer ce cap avec le cap à suivre et élaborer des ordres qu'elle fournit à la chaîne d'action pour que celle-ci permette la modification du cap. Ces ordres dépendent de la position courante du safran, fournie par le capteur d'angle.

Des réglages divers peuvent être effectués, permettant d'adapter le système au type de voilier et au type de comportement souhaité.

L'analyse descendante peut être poursuivie, par exemple à partir du diagramme A2 :

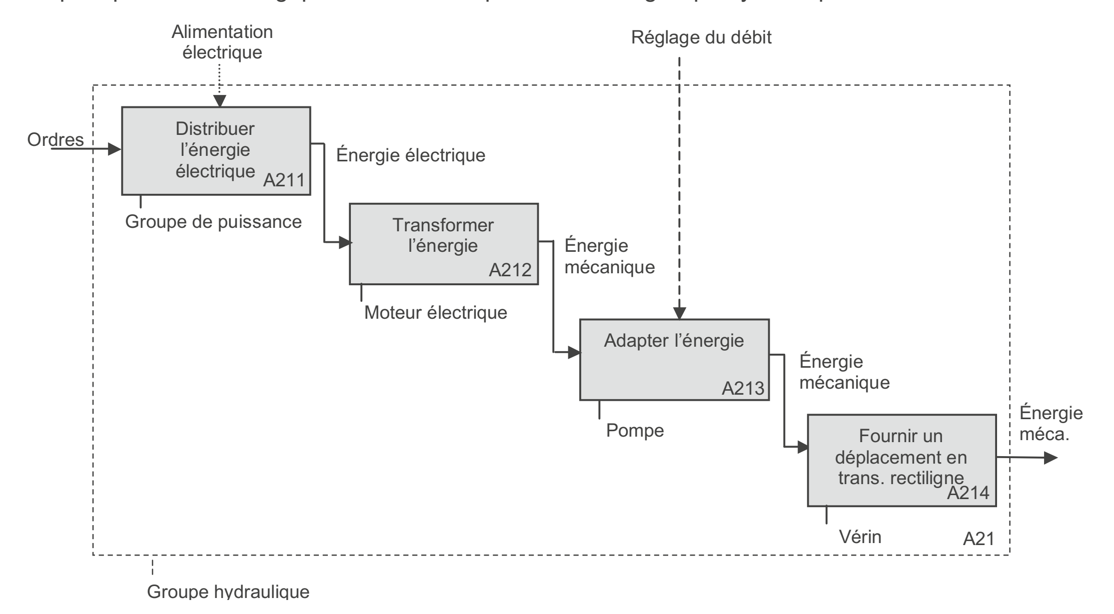


On lit sur ce diagramme que les ordres provenant de la PC (sous forme électrique basse puissance) sont transformés en énergie mécanique par le groupe hydraulique (mouvement de la tige du vérin). Un apport énergétique est nécessaire, d'où la connexion à l'alimentation électrique pour amplification. On peut remarquer que, pour le niveau de description A2, les ordres de la PC constituent une donnée de contrôle alors qu'il s'agit de la matière d'œuvre entrante du groupe hydraulique A21.

La vitesse de translation de la tige du vérin peut être adaptée au voilier par réglage du débit de la pompe du groupe hydraulique apparaissant en donnée de contrôle. Il s'agit d'un des réglages qui apparaissaient en données de contrôle du bloc A0. Il est défini plus précisément à ce niveau.

Cette énergie mécanique, portée par la translation de la tige du vérin du groupe hydraulique, permet l'orientation du safran par la chaîne cinématique A22, orientation dont l'information de la valeur est transmise à la PC (sortie du bloc A2).

L'ensemble des actions mécaniques s'exerçant sur le voilier (action du vent + action de la mer dépendant de la position du safran) provoque (A23) une modification de son cap, comme attendu. On peut poursuivre la logique descendante pour décrire le groupe hydraulique selon :



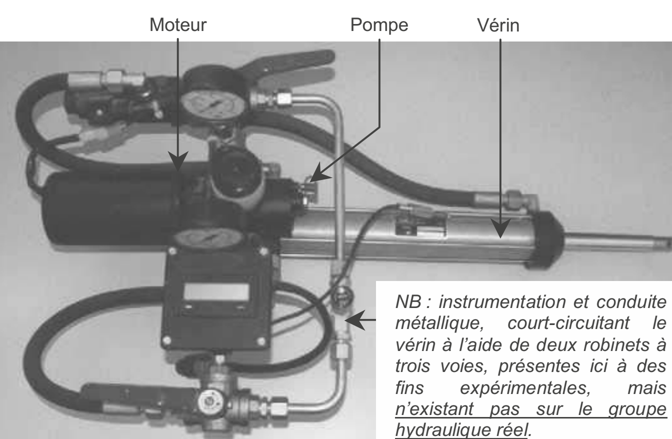
Les ordres provenant de la PC doivent commander le déplacement de la tige du vérin dans un sens ou dans l'autre. Pour cela la solution retenue est de faire tourner la pompe (qui est à double sens de marche), et donc le moteur électrique d'entraînement, dans un sens ou dans l'autre.

Le groupe de puissance, raccordé à l'alimentation électrique, élabore donc la tension d'alimentation du moteur, positive ou négative selon le signal (ordre) qu'il reçoit de la partie commande. Cette tension est la matière d'œuvre entrante du moteur. Celui-ci entraîne mécaniquement la pompe qui débite alors, dans un sens donné, dans l'une ou l'autre des chambres du vérin double effet. Le déplacement dans le sens souhaité de la tige du vérin double effet transmet enfin l'énergie mécanique attendue à la chaîne cinématique.

Le groupe hydraulique qui est proposé aux laboratoires des classes préparatoires scientifiques est constitué du moteur, de la pompe et du vérin de ce pilote automatique.

Écorché de l'ensemble moto-pompe :





NB : instrumentation et conduite métallique, court-circuitant le vérin à l'aide de deux robinets à trois voies, présentes ici à des fins expérimentales, mais <u>n'existant pas sur le groupe hydraulique réel</u>.

III-3 Limites de l'analyse descendante

L'analyse fonctionnelle descendante est adaptée à des systèmes complexes pluritechnologiques et dont les différentes grandeurs de travail (essentiellement les matières d'œuvre) sont de natures variées : ordres ou informations généralement électriques, énergies électriques, mécaniques, thermiques, etc. Lorsque le niveau d'analyse s'abaisse, une limite est assez rapidement atteinte, en particulier lorsque l'on travaille sur une nature d'énergie ou une technologie déterminée.

Par exemple ici, pour décrire le système constitué du moteur, de la pompe et du vérin, il existe une schématique propre aux technologies hydrauliques qui sera bien souvent préférée. Voir schéma ci-contre.

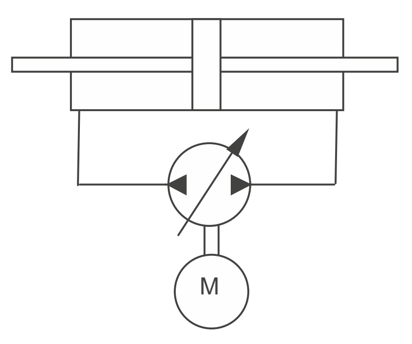


Schéma hydraulique simplifié du sous système moteur-pompe-vérin

De même, si on veut encore descendre plus bas dans l'analyse pour préciser le fonctionnement interne de la pompe par exemple, il existe :

- des éléments de la schématique propre aux technologies hydrauliques permettant, par exemple, d'expliciter les solutions retenues pour assurer la sécurité en cas de surpression, ce dont il est très difficile, voire impossible, de rendre compte à l'aide de blocs fonctionnels ;
- des représentations propres aux systèmes mécaniques (modèles 3D, dessins 2D, éclatés, schémas, etc.) permettant d'expliciter les différentes pièces réalisant les différentes transmissions et transformations de mouvements et d'efforts au sein du mécanisme.

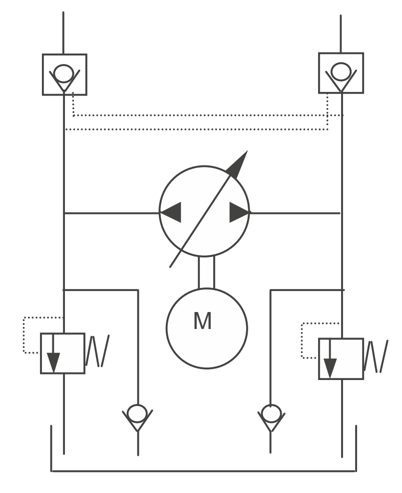
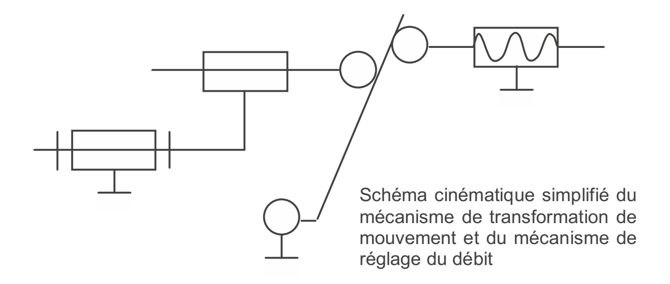
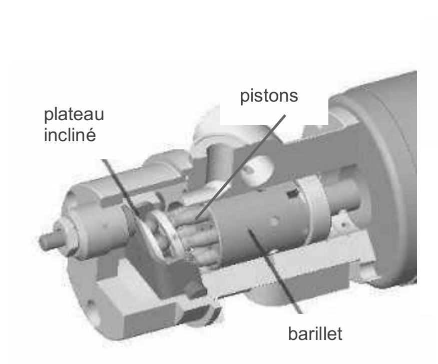
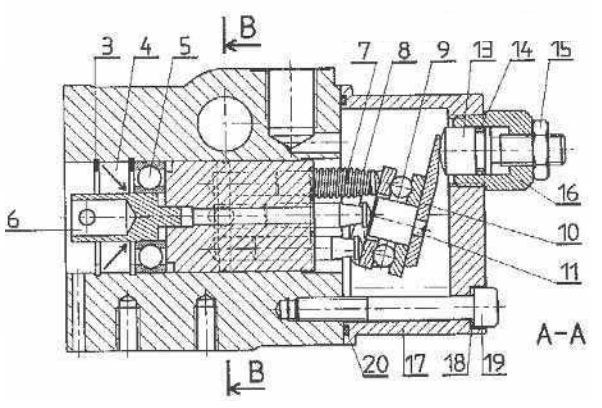


Schéma hydraulique détaillé du sous système moteur-pompe


Schéma cinématique simplifié du mécanisme de transformation de mouvement et du mécanisme de réglage du débit



Modèle 3D de la pompe

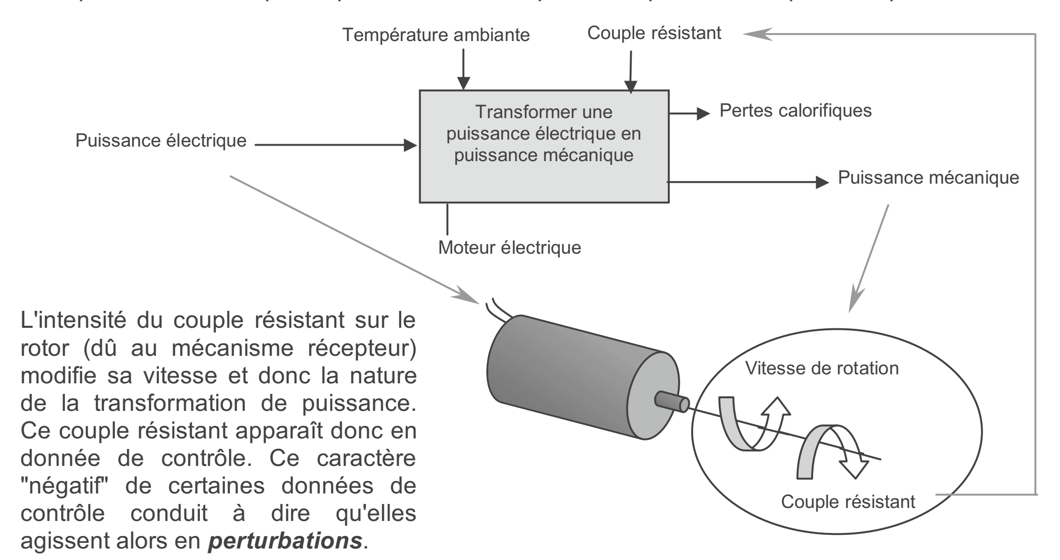


Dessin 2D partiel de la pompe

III-4 Modélisation (partielle et simplifiée) puis simulation

III-4-1 Moteur électrique

Un moteur électrique est un ensemble de constituants matériels conçu dans le but de transformer de la puissance électrique en puissance mécanique. Ainsi, peut-il être représenté par :



L'intensité du couple résistant sur le rotor (dû au mécanisme récepteur) modifie sa vitesse et donc la nature de la transformation de puissance. Ce couple résistant apparaît donc en donnée de contrôle. Ce caractère "négatif" de certaines données de contrôle conduit à dire qu'elles agissent alors en ***perturbations***.

Dans une moindre mesure, la température de l'environnement modifie les caractéristiques électromécaniques du moteur et peut donc aussi éventuellement figurer comme donnée de contrôle. Le rendement de la transformation étant nécessairement imparfait, elle se produit avec des pertes calorifiques que l'on figure en sortie annexe.

■ **Remarque :** Ces pertes calorifiques peuvent, dans des situations extrêmes, générer une élévation de température. Il y a donc dans ce cas un phénomène de ***bouclage*** (ou ***rétroaction***) ici dû à une interaction entre le système et son milieu extérieur, au-delà de sa fonction même. Cette ***complexité*** est un élément essentiel que doit être capable de prendre en compte un ingénieur aujourd'hui.

■ **Construction d'un modèle mathématique :**

Dans le cas d'un ***moteur à courant continu***, sous réserve d'hypothèses simplificatrices usuelles, la transformation énergétique est modélisée par les équations données ci-après.

Cours d'électricité : le moteur à courant continu

Cours de mécanique des solides

Fiche ressource "inertie équivalente"



- L'équation électrique (loi d'Ohm dans le circuit d'induit), liant la tension d'alimentation u(t) à l'intensité du courant de commande i(t), s'obtient classiquement sachant que l'induit peut être modélisé comme une résistance R en série avec une inductance L et une force électromotrice e(t) :

$$u(t) = R\,i(t) + L\frac{di}{dt}(t) + e(t)$$

- L'équation mécanique s'obtient en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mécanique entraîné par le rotor tournant à la vitesse (pulsation) $\omega(t)$, soumis à un couple électromagnétique $c_m(t)$ et un couple résistant $c_r(t)$:

  $$c_m(t) - c_r(t) = J\,\frac{d\omega}{dt}(t)$$

  où J est l'inertie équivalente de l'ensemble des parties mobiles, ramenée sur le rotor.

- Les équations de couplage électromécanique s'écrivent :

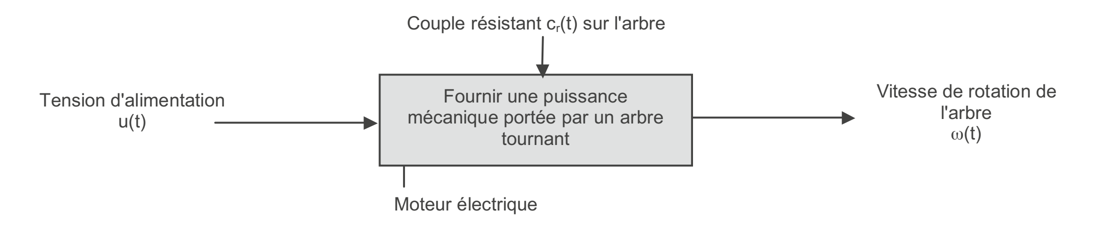
  $$c_m(t) = K_c\, i(t)$$
  $$e(t) = K_v\, \omega(t)$$

  où K_C et K_V sont des constantes, appelées respectivement constante de couple et constante de vitesse.

Un tel moteur, commandé en tension u(t), peut alors se caractériser par la loi de comportement que traduit l'équation différentielle suivante, obtenue à partir des quatre équations ci-dessus, par élimination de i(t) et e(t) :

$$\omega(t) + \frac{RJ}{K_cK_v}\frac{d\omega}{dt}(t) + \frac{LJ}{K_cK_v}\frac{d^2\omega}{dt^2}(t) = \frac{1}{K_v}u(t) - \frac{1}{K_cK_v}\left(R\,c_r(t) + L\frac{dc_r(t)}{dt}\right)$$

Il apparaît que la vitesse $\omega(t)$ du rotor est commandée par la tension u(t) de son alimentation, mais dépend aussi du couple résistant. Sous cette modélisation (où les pertes calorifiques n'apparaissent pas) une autre représentation fonctionnelle du moteur peut alors être élaborée :

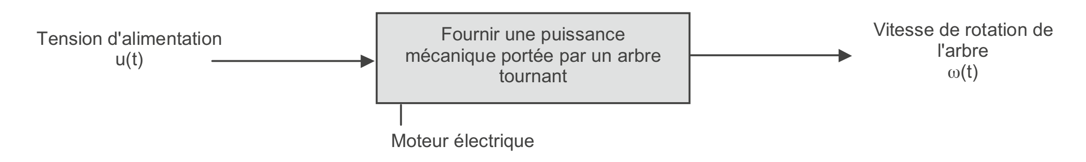


NB : Sachant, par exemple, que les valeurs des constantes électriques peuvent dépendre légèrement de la température, cette description peut être complétée par l'indication de la température ambiante en donnée de contrôle dans une description très précise.

Si on suppose, assez grossièrement, que le couple résistant est constant, ce qui correspond, via la chaîne vérin-pompe à une ***action de l'eau sur le safran constante***, cette donnée de contrôle devient inutile, d'où la loi de comportement simplifiée :

$$\omega(t) + \frac{RJ}{K_cK_v}\frac{d\omega}{dt}(t) + \frac{LJ}{K_cK_v}\frac{d^2\omega}{dt^2}(t) = \frac{1}{K_v}u(t) - C^{te}$$

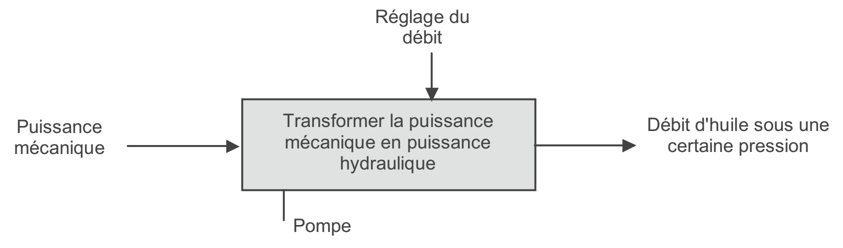
Loi à laquelle on associe le bloc fonctionnel :



Ce bloc est compatible avec le bloc A212 de la description du groupe hydraulique du pilote.

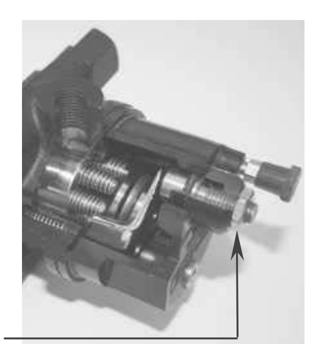
III-4-2 Accouplement de la pompe

La puissance mécanique fournie par le moteur permet l'entraînement de la pompe. Celle-ci génère une puissance hydraulique sous forme d'un débit d'huile sous une certaine pression, constante, puisque précédemment l'action de l'eau sur le safran a été supposée constante :



■ **Construction d'un modèle mathématique :**

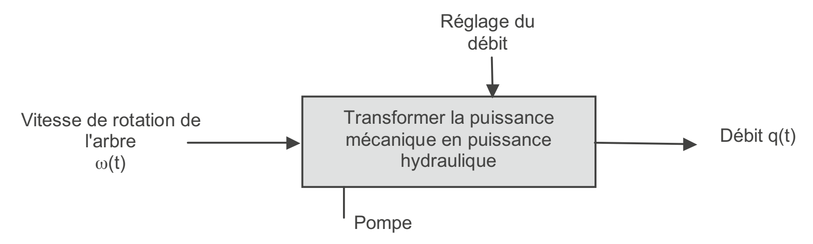
La pompe étant une pompe volumétrique, le débit d'eau q(t) qu'elle fournit ne dépend, pour un réglage donné, que de la vitesse de rotation de son arbre d'entrée, accouplé au moteur électrique. Dans la puissance mécanique entrante, seule la composante de vitesse intervient donc dans la réalisation de la fonction.



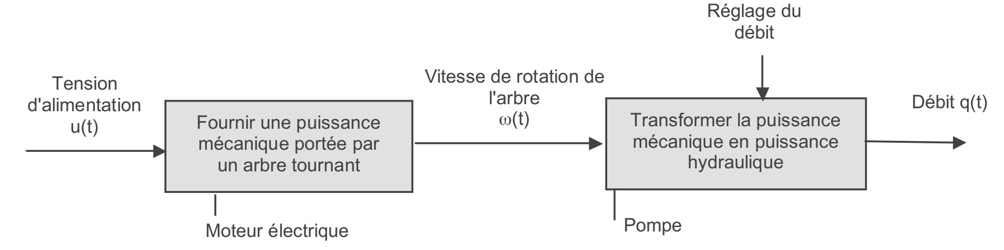
Le débit peut être considéré comme proportionnel à cette vitesse si la pompe est suffisamment régulière (très grand nombre de pistons, rotation très rapide). Le modèle mathématique associé au système pompe est donc : $q(t) = K\,\omega(t)$.

L'opération de réglage du débit a pour action de définir la grandeur K.

On lui associe alors la description fonctionnelle :

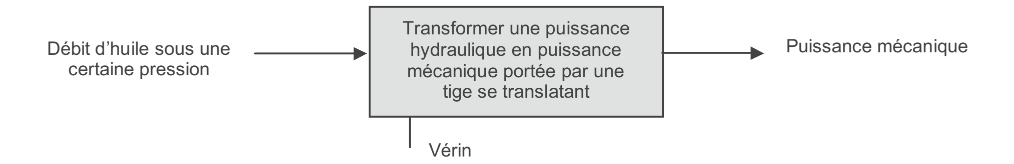


On constate, dans cette description, une matière d'œuvre entrante qui n'est autre que la matière d'œuvre sortante de la description retenue pour le moteur, ce qui permet la connexion des graphes :



III-4-3 Accouplement du vérin double effet

La puissance hydraulique fournie par la pompe permet le déplacement de la tige du vérin. Celui-ci génère une puissance mécanique sous forme d'une vitesse de déplacement s'opposant à un effort résistant, constant, toujours puisque précédemment l'action de l'eau sur le safran a été supposée constante :



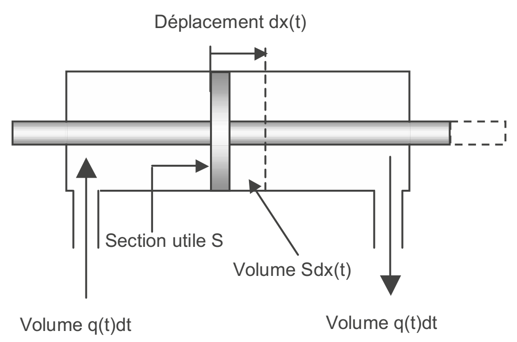
■ **Construction d'un modèle mathématique :**

La vitesse de déplacement s'obtient par division du débit par la section utile du vérin. Le modèle mathématique associé est donc :

$$v(t) = \frac{1}{S} q(t)$$

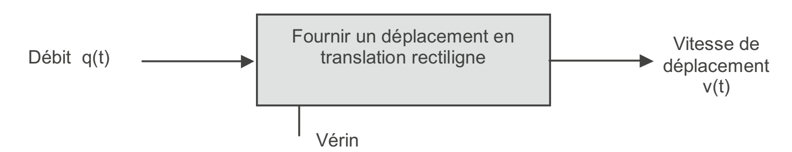
En effet, pendant une durée élémentaire dt, le piston s'est déplacé d'une distance dx(t) et la quantité d'huile entrée (ou sortie) est q(t)dt. L'huile étant raisonnablement incompressible pour les pressions en jeu, cette quantité d'huile correspond au volume décrit par la section utile du piston, soit Sdx(t).

Alors Sdx(t) = q(t)dt, d'où $S\frac{dx}{dt}(t) = q(t)$ et donc le résultat.

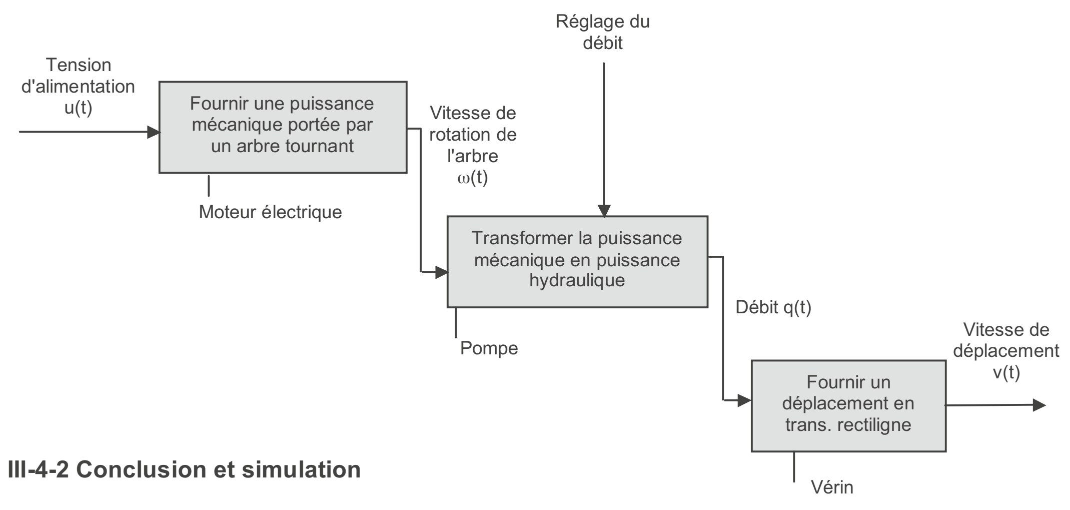


NB : on remarquera ici tout l'intérêt d'avoir un vérin à double tige présentant la même section utile de chaque côté du piston et donc l'égalité des débits entrant et sortant.

On associe à ce modèle la description fonctionnelle :



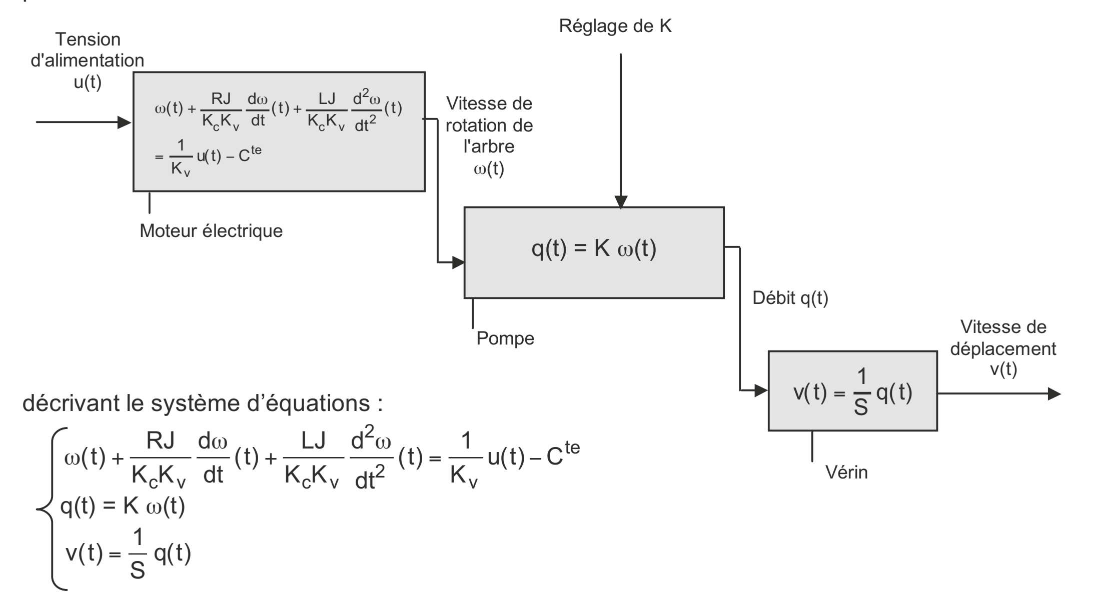
Description pouvant se connecter à celle du système moteur-pompe précédemment établie :



III-4-2 Conclusion et simulation

Les développements précédents ont permis de proposer un modèle mathématique (sous les hypothèses simplificatrices signalées) au sous-système réalisant les fonctions A212, A213 et A214

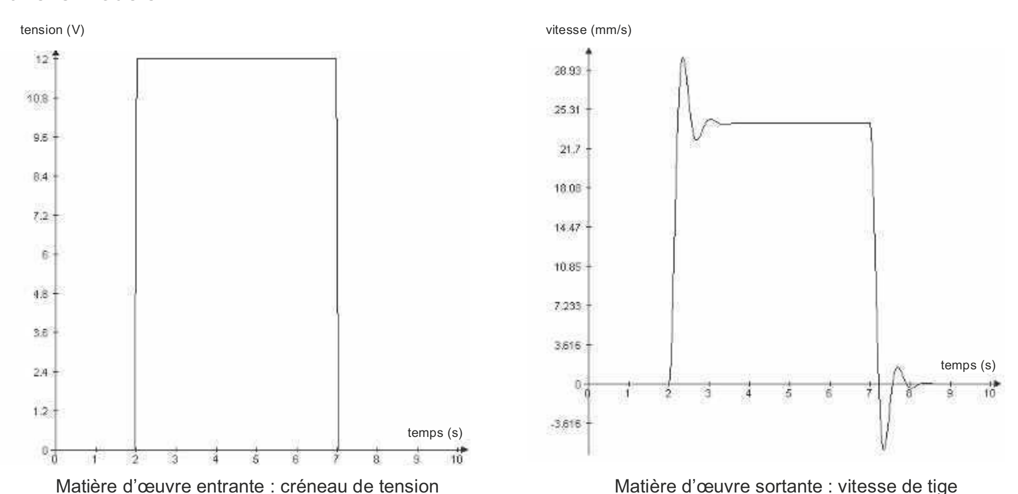
mises en évidence dans l'analyse SADT. Ce modèle peut également se représenter graphiquement par :



décrivant le système d'équations :

$$\begin{cases}\omega(t)+\dfrac{RJ}{K_cK_v}\dfrac{d\omega}{dt}(t)+\dfrac{LJ}{K_cK_v}\dfrac{d^2\omega}{dt^2}(t)=\dfrac{1}{K_v}u(t)-C^{te}\\ q(t)=K\,\omega(t)\\ v(t)=\dfrac{1}{S}q(t)\end{cases}$$

La résolution de ces équations permet d'avoir la vitesse de déplacement v(t) de la tige du vérin en fonction de la tension d'alimentation u(t) du moteur à partir de conditions initiales. Ici par exemple, si u(t) est un créneau (tension constante pendant un certain temps, nulle sinon) à partir d'une situation de repos, l'évolution de la vitesse v(t) a l'allure donnée ci-dessous. Ceci constitue une simulation du fonctionnement du sous-système, que l'ingénieur devra confronter aux résultats attendus, tout en gardant en mémoire que des hypothèses simplificatrices ont été acceptées pour construire le modèle.



Matière d'œuvre entrante : créneau de tension

Matière d'œuvre sortante : vitesse de tige

■ Remarque

Si la matière d'œuvre sortante qu'il convient de considérer (notion de point de vue) n'est pas la vitesse de déplacement de la tige, mais ce déplacement lui-même depuis la position occupée à la date t=0, on écrira par intégration que ce déplacement est :

$$x(t)=\int_0^t v(\tau)d\tau=\int_0^t \frac{1}{S}q(\tau)d\tau$$

D'où la nouvelle description :

Tension d'alimentation u(t)

$$\omega(t) + \frac{RJ}{K_c K_v}\frac{d\omega}{dt}(t) + \frac{LJ}{K_c K_v}\frac{d^2\omega}{dt^2}(t) = \frac{1}{K_v}u(t) - C^{te}$$

Moteur électrique

Vitesse de rotation de l'arbre $\omega(t)$

Réglage de K

$q(t) = K\,\omega(t)$

Pompe

Débit q(t)

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{S} q(\tau)d\tau$$

Vérin

déplacement x(t)

et le système d'équations :

$$\begin{cases} \omega(t) + \dfrac{RJ}{K_c K_v}\dfrac{d\omega}{dt}(t) + \dfrac{LJ}{K_c K_v}\dfrac{d^2\omega}{dt^2}(t) = \dfrac{1}{K_v}u(t) - C^{te} \\ q(t) = K\,\omega(t) \\ x(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{S} q(\tau)d\tau \end{cases}$$

Le déplacement prévu associé n'est autre bien sûr que l'intégrale de la vitesse depuis l'instant initial, donné ci-contre.

déplacement (mm)

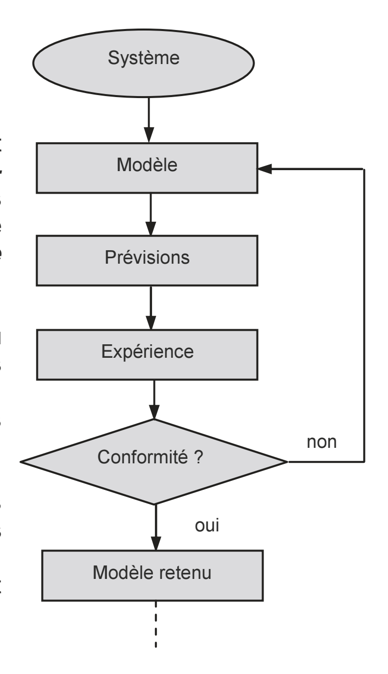
0 – 12.1 – 24.2 – 36.3 – 48.4 – 60.5 – 72.6 – 84.71 – 96.81 – 108.9 – 121

temps (s)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

IV - MODÉLISATION ET SIMULATION - QUELQUES PRÉCISIONS

IV-1 Démarches de modélisation : modèles de connaissance et de comportement



Les trois composants du sous-système décrit précédemment ont pu être modélisés mathématiquement, ***sous certaines hypothèses simplificatrices***, à partir de résultats établis dans divers champs disciplinaires de l'ingénieur : ici l'électricité, la mécanique et l'hydraulique. De tels modèles sont appelés ***modèles de connaissances***.

Par exemple les problèmes de sensibilité des composants du moteur à la chaleur ont été occultés, les efforts ont été supposés constants, etc. Par ailleurs, les limites en déplacement du vérin, ou en vitesse, courant et tension du moteur, n'ont pas été prises en compte.

Il est important de bien noter que ces hypothèses simplificatrices acceptées doivent être validées par une confrontation entre les prévisions du modèle et la réalité constatée par l'expérience. Dans le cas contraire, ces hypothèses doivent être revues, et donc le modèle tout entier également.

Par cette confrontation itérative, caractéristique du travail scientifique, l'ingénieur aboutit à un modèle satisfaisant dans un certain contexte précisément défini, où les hypothèses sont acceptables. Ce contexte est appelé ***domaine de validité*** du modèle.

Lorsque la complexité est trop importante, ou dans des contextes où la science ne fournit pas de réponse suffisamment précise, un modèle de connaissances peut s'avérer impossible à établir.

La seule solution consiste alors en une expérimentation sur le composant, qui doit donc exister, du moins sous forme de prototype en phase de conception. Il est alors soumis à des sollicitations types. Ses réponses à ces sollicitations permettent de le décrire à partir de modèles mathématiques standards. On dit alors que l'on procède par ***identification*** et les modèles ainsi élaborés sont appelés ***modèles de représentation*** ou ***de comportement***.

Tout au long de cet ouvrage, seront présentés des exemples de modèles de comportement usuels (comme nous venons déjà de le voir pour un moteur à courant continu, une pompe volumétrique ou un vérin hydraulique) ainsi que des méthodes permettant l'identification à des modèles de représentation.

■ **Remarque :** Par ailleurs, il faut noter que l'ingénieur utilise également des sources extérieures, lorsqu'il assemble, dans le système qu'il conçoit, des composants provenant de fournisseurs. Dans ce cas, ce sont ces fournisseurs qui communiquent des modèles pour leurs produits. Ceux-ci sont alors pris comme objets techniques, non décomposables. Ces modèles, qu'ils soient de connaissances ou de représentation, devront être combinés à ceux des autres composants du système, selon la structure de celui-ci.

Le modèle global, assemblage de tous les modèles des différents composants du système (quelque soit leur origine), peut alors être utilisé pour effectuer des ***simulations*** aidant l'ingénieur dans sa tâche de ***prise de décision*** tout au long de la phase de conception ou d'amélioration du système.

IV-2 Complexité mathématique

L'exemple retenu précédemment a été volontairement simple, car il est introductif :
- le modèle de connaissances a été établi sous de nombreuses hypothèses simplificatrices ;
- les trois équations obtenues sont relativement simples et indépendantes les unes des autres.

Ce dernier point est dû au fait que la structure du sous-système considéré est la simple mise en série de trois composants. Lorsque des boucles apparaissent, comme par exemple sur le diagramme A0 décrivant le système entier, pilote automatique + voilier, la résolution des équations est beaucoup plus complexe.

Cet ouvrage proposera des méthodes mathématiques, à travers la définition de la transformée de Laplace et de la notion de fonction de transfert permettant de pallier certaines difficultés.

Toutefois, dans bien des situations, aujourd'hui, la complexité des équations obtenues est telle que seule une simulation numérique permet leur résolution. Cette simulation peut être effectuée soit par programmation soit, de plus en plus aujourd'hui, par des logiciels spécifiques aux interfaces graphiques puissants.

Les possibilités énormes qu'offrent aujourd'hui des logiciels de ce type ne doivent pas pour autant dispenser l'ingénieur, et a fortiori l'élève ingénieur, d'une réflexion quant aux simplifications raisonnables pouvant être apportées au modèle, ceci dans un souci de clarté, de limitation des risques d'erreur et de temps de calcul. On peut trouver ici une analogie avec les cartes routières : il est inutile pour un trajet autoroutier de s'encombrer de cartes de randonnée au 1/25000 …

V - SYSTÈMES AUTOMATIQUES

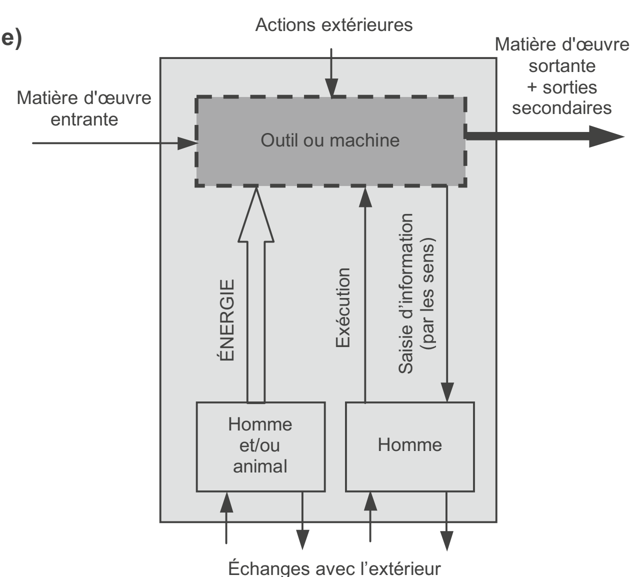
V-1 Un peu d'histoire

Il est usuel de définir quatre grandes catégories de systèmes, correspondant à quatre périodes de l'histoire de l'humanité. Toutefois, les quatre catégories cohabitent, une nouvelle n'ayant jamais totalement éliminé l'ancienne.

■ Avant la mécanisation (de la préhistoire au 18 ou 19ème siècle)

À part quelques cas très particuliers, pendant toute cette période, l'homme fait partie intégrante de tous les systèmes qu'il conçoit. Sa présence est indispensable au fonctionnement du système.

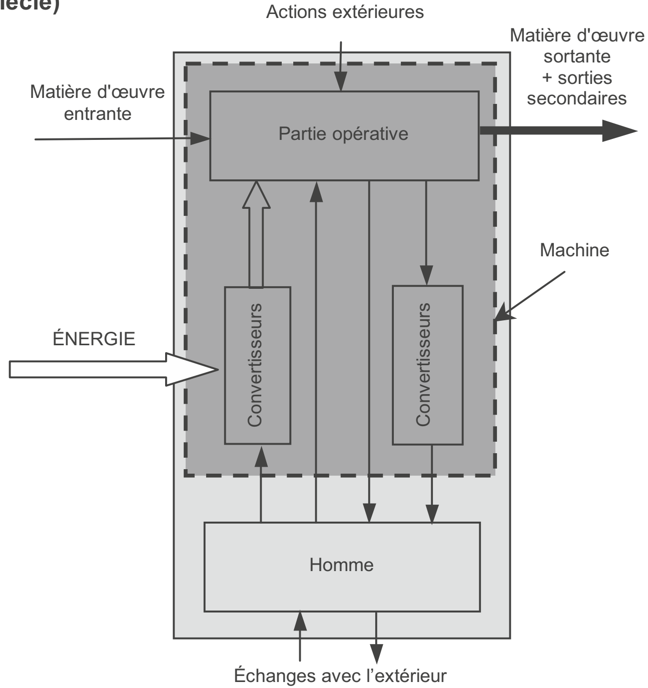
Il apporte parfois l'***énergie***, quand ce travail n'est pas confié à un animal, et toujours son ***savoir-faire***. C'est lui qui assure la commande de l'outil ou de la machine sur laquelle il exécute un travail, qu'il ajuste en fonction des observations que lui renvoient ses sens : vue, sensation d'effort, etc.



■ Avant l'automatisation (du 19ème siècle au début du 20ème siècle)

La ***mécanisation***, permise par la découverte de la machine à vapeur, puis de l'électricité et des moteurs thermiques, permet un ***apport énergétique extérieur*** au système.

La partie du système qui agit directement sur la matière d'œuvre est alors appelée ***partie opérative***. L'homme est toujours présent dans le système, mais il n'apporte plus d'énergie : il n'intervient que par son savoir-faire. Celui-ci lui permet de donner des ordres à la partie opérative, par des convertisseurs connectés à la source d'énergie : vannes sur les machines à vapeur, potentiomètres sur les machines électriques, etc. Il agit parfois directement sur la partie opérative, mais de manière secondaire et à niveau d'énergie faible.



Les retours d'information que l'homme reçoit, soit directement, soit par des intermédiaires adaptés (voyants, …) lui permettent, en fonction de son savoir-faire, de corriger les ordres jusqu'à obtention du résultat.

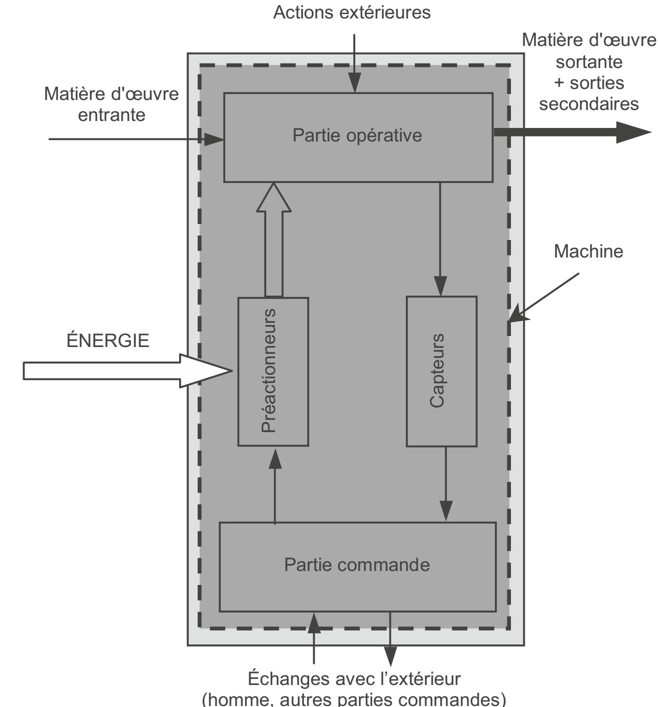
*NB : le terme de **mécanisation** provient du fait historique que les premiers systèmes ainsi réalisés possédaient des parties opératives agissant sur des matières d'œuvre de nature mécanique. Il doit se comprendre, de manière plus générale aujourd'hui, pour des matières d'œuvre autres (thermiques, électriques, etc.).*

■ Après l'automatisation (depuis le milieu du 20ème siècle)

L'automatisation permet, à partir de la seconde guerre mondiale, que la frontière de la machine rejoigne celle du système. Pour cela un nouvel organe apparaît : la ***partie commande***.

Celle-ci possède le savoir faire nécessaire que l'homme lui a transmis.

Dans ce contexte, l'homme est complètement extérieur au système en fonctionnement. Ses seules interventions consistent en la programmation de la partie commande et aux opérations de marches et arrêts. Cette tâche peut d'ailleurs aussi faire l'objet d'autres parties commandes, de systèmes automatisés extérieurs dits alors hiérarchiquement supérieurs.



Les convertisseurs d'ordres vers la partie opérative et d'informations depuis la partie opérative sont alors respectivement appelés ***préactionneurs*** et ***capteurs***.

■ Plus récemment (depuis la fin du 20ème siècle)

Depuis une vingtaine d'années, on assiste à une évolution notable vers ***l'intégration*** des différents constituants.

L'automatisation, comme son nom l'indique, résultait d'une démarche qui consistait à remplacer l'homme dans un système où il était présent. On automatisait un système. On réalisait des systèmes ***automatisés***. La démarche de conception suivait l'histoire : on automatisait un système mécanisé. Mais aujourd'hui, les systèmes sont directement conçus comme tels. Leurs constituants ne respectent plus nécessairement le découpage simple des systèmes automatisés. Les préactionneurs peuvent être intégrés à la partie commande par exemple. Il est alors délicat de parler de systèmes automatisés. On parle alors tout simplement de ***systèmes automatiques***.



■ **L'exemple du pilote automatique de voilier**

Le système où le cap est maintenu par un barreur est un système manuel. Le barreur utilise l'énergie issue de sa force physique pour manœuvrer la barre et agit sur celle-ci pour réajuster en permanence le cap.

Il existe des systèmes mécanisés où une assistance hydraulique fournit l'essentiel de l'énergie nécessaire à la rotation de la barre, la position de celle-ci continuant à être définie par le barreur. C'est une solution de mécanisation, comparable par exemple avec les directions assistées des automobiles.

Le système de pilote automatique qui a été décrit précédemment est un système automatisé.



V-2 Définitions

V-2-1 Système automatique

Compte tenu de l'introduction historique qui vient d'être conduite, on peut retenir la définition suivante :

Un système automatisé ou automatique est un système dans lequel le savoir faire de l'homme est assuré par une partie du système lui-même.

La distinction entre « automatisé » et « automatique », qui traduit la démarche historique, n'offre pas grand intérêt puisque les deux types de systèmes ne présentent pas fonctionnellement de différence. Tous deux seront donc qualifiés d'***automatiques*** dans la suite de cet ouvrage.

Il existe, bien entendu, de nombreux systèmes au caractère automatique partiel, une partie seulement du savoir faire étant assurée par un constituant. Leur qualification selon les termes qui viennent d'être définis s'avère alors délicate. Il en va par exemple d'un véhicule possédant une boîte de vitesses automatique, un régulateur de vitesse, une climatisation, etc., mais qui continue à être dirigé par le conducteur. Les sous-systèmes cités sont clairement automatiques, par contre le système véhicule ne l'est pas.

On parlera alors de systèmes partiellement automatiques.

V-2-2 Partie commande (PC)

C'est le sous-système qui élabore des ordres vers les préactionneurs, qui provoqueront les actions voulues sur la partie opérative. Cette PC agit en fonction :

- d'informations issues de la partie opérative via les capteurs,
- d'informations en mémoire ou fournies par l'extérieur.

V-2-3 Préactionneurs

Ce sont les sous-systèmes qui distribuent l'énergie vers la partie opérative en fonction des ordres qu'ils reçoivent de la partie commande. Ils sont connectés à la source extérieure d'énergie.

V-2-4 Capteurs

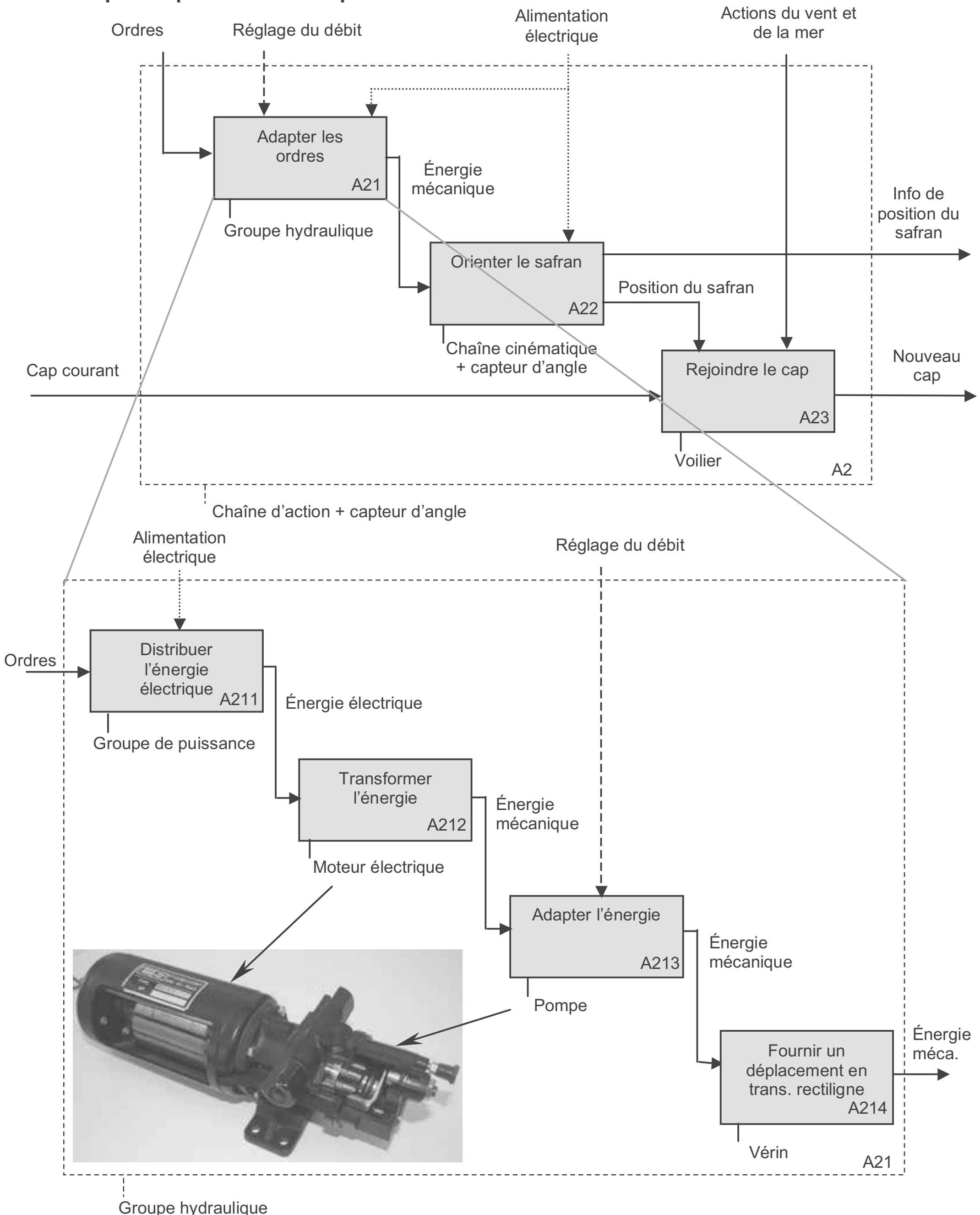
Ce sont les sous-systèmes qui évaluent l'état de la partie opérative pour transmettre des informations à la partie commande.

V-2-5 Partie opérative (PO)

C'est le sous-système complément, les trois précédents ayant été définis. Si la complexité le permet, on y distingue :

- les actionneurs qui convertissent l'énergie ;
- les transmetteurs qui transmettent l'énergie ;
- les effecteurs qui opèrent sur la matière d'œuvre.

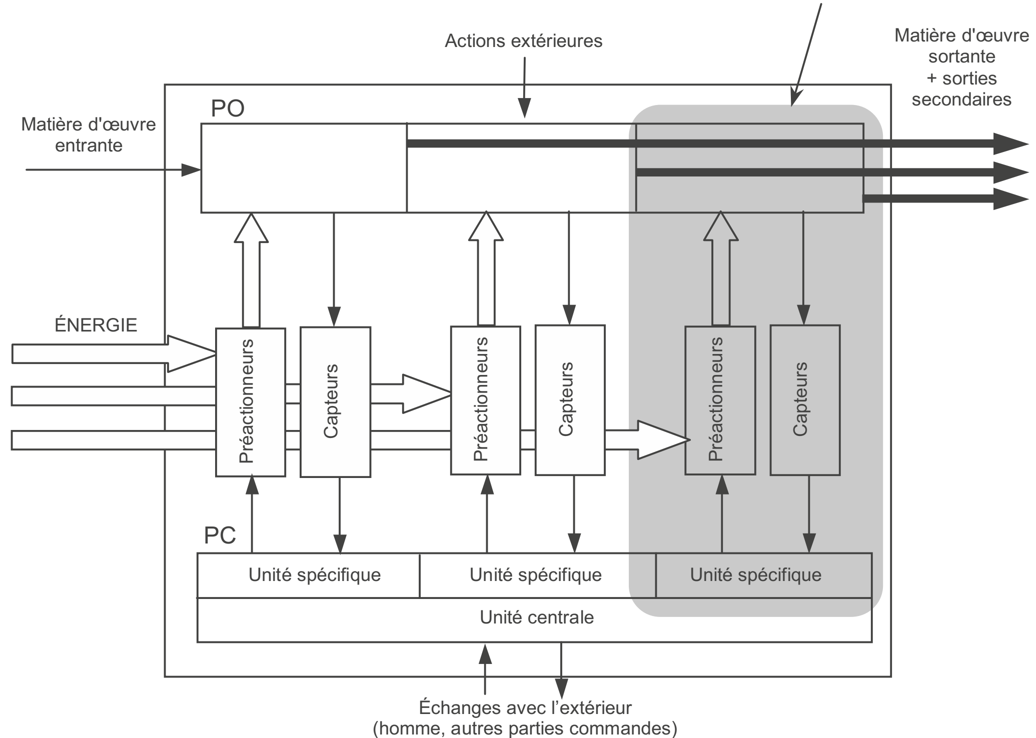
■ **L'exemple du pilote automatique de voilier**



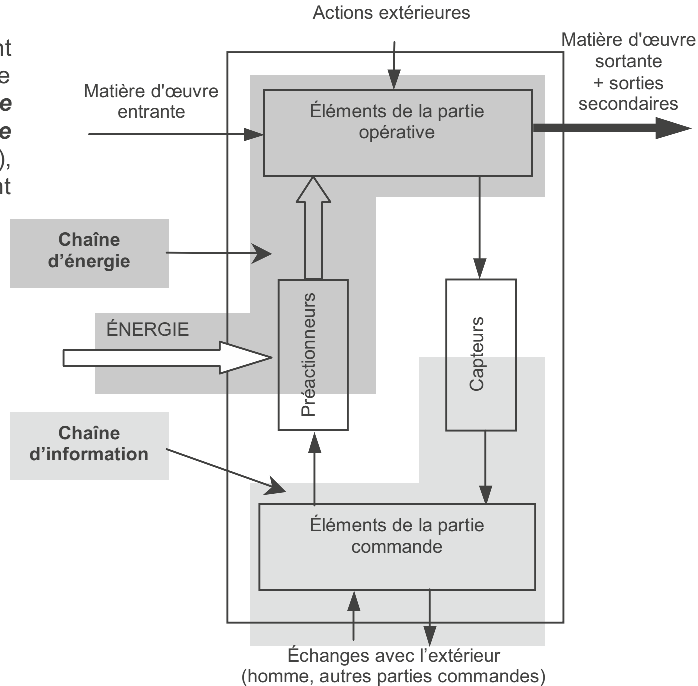
Le préactionneur est le groupe de puissance. L'actionneur est le moteur électrique. Les différents transmetteurs sont la pompe, le vérin et la chaîne cinématique où un capteur mesure l'orientation de l'arbre de sortie. L'effecteur est le voilier muni de son safran. On s'aperçoit que les choix ayant abouti à l'analyse descendante présentée ne respectent pas le découpage fonctionnel qui vient d'être défini. Petite difficulté, liée au point de vue, à laquelle il conviendra d'apprendre à s'adapter…

V-2-6 Notion de chaîne fonctionnelle

Lorsque la complexité des systèmes augmente, le découpage qui vient d'être proposé peut s'avérer inopérant. En effet, lorsque la partie opérative exécute plusieurs fonctions en parallèle, c'est-à-dire qu'elle travaille sur une matière d'œuvre multivariable, il devient plus pratique d'extraire de la PC, de la PO, du nombre de préactionneurs et de capteurs, les éléments qui participent à la réalisation d'une même fonction, définissant alors ce que l'on appelle une ***chaîne fonctionnelle*** :



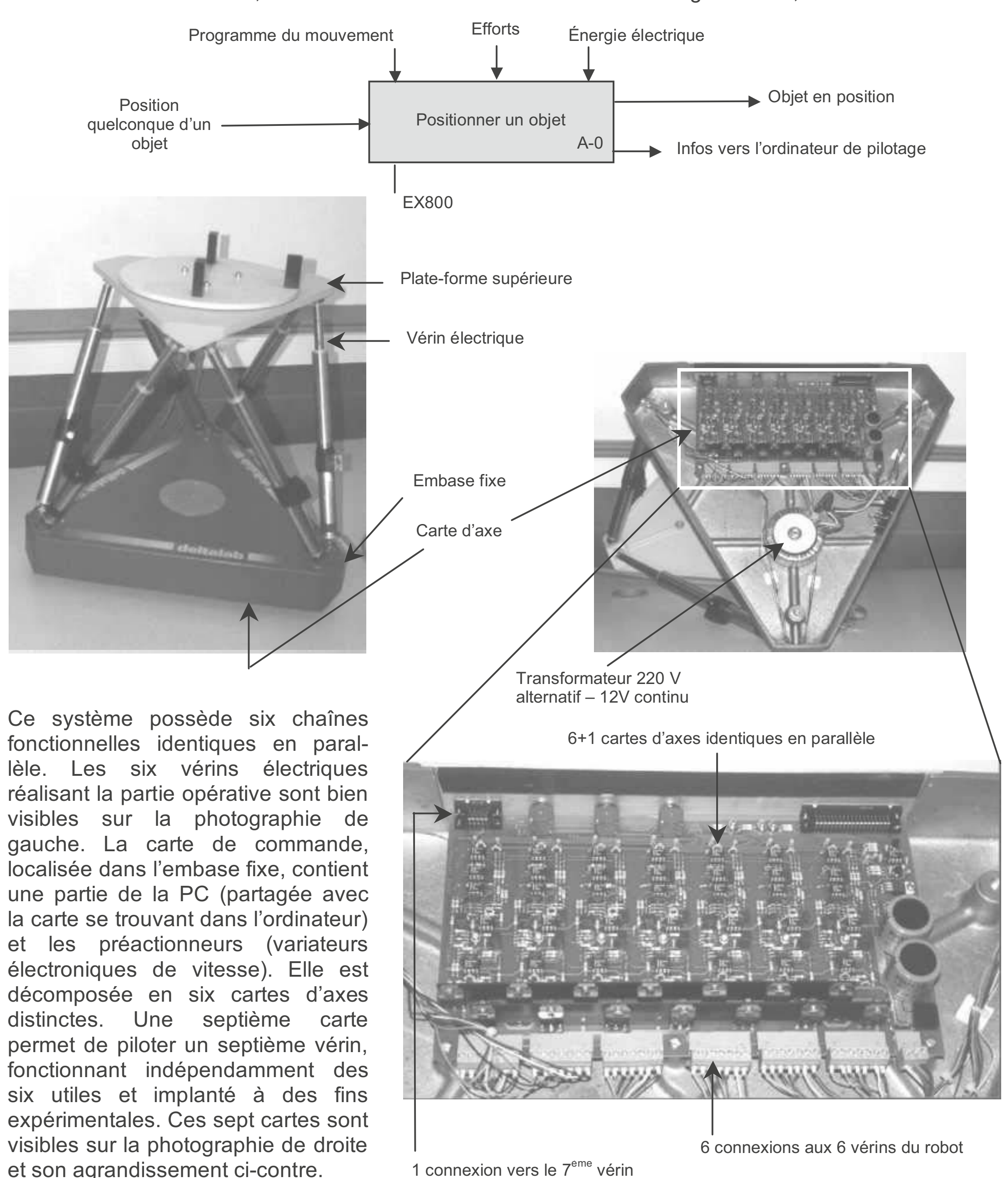
Dans ce contexte d'isolement d'une chaîne fonctionnelle, le découpage fonctionnel en ***chaîne d'énergie*** (ou d'action) et ***chaîne d'information*** (ou de commande), définies ci-contre, est couramment utilisé.



■ Robot parallèle 6 axes EX800

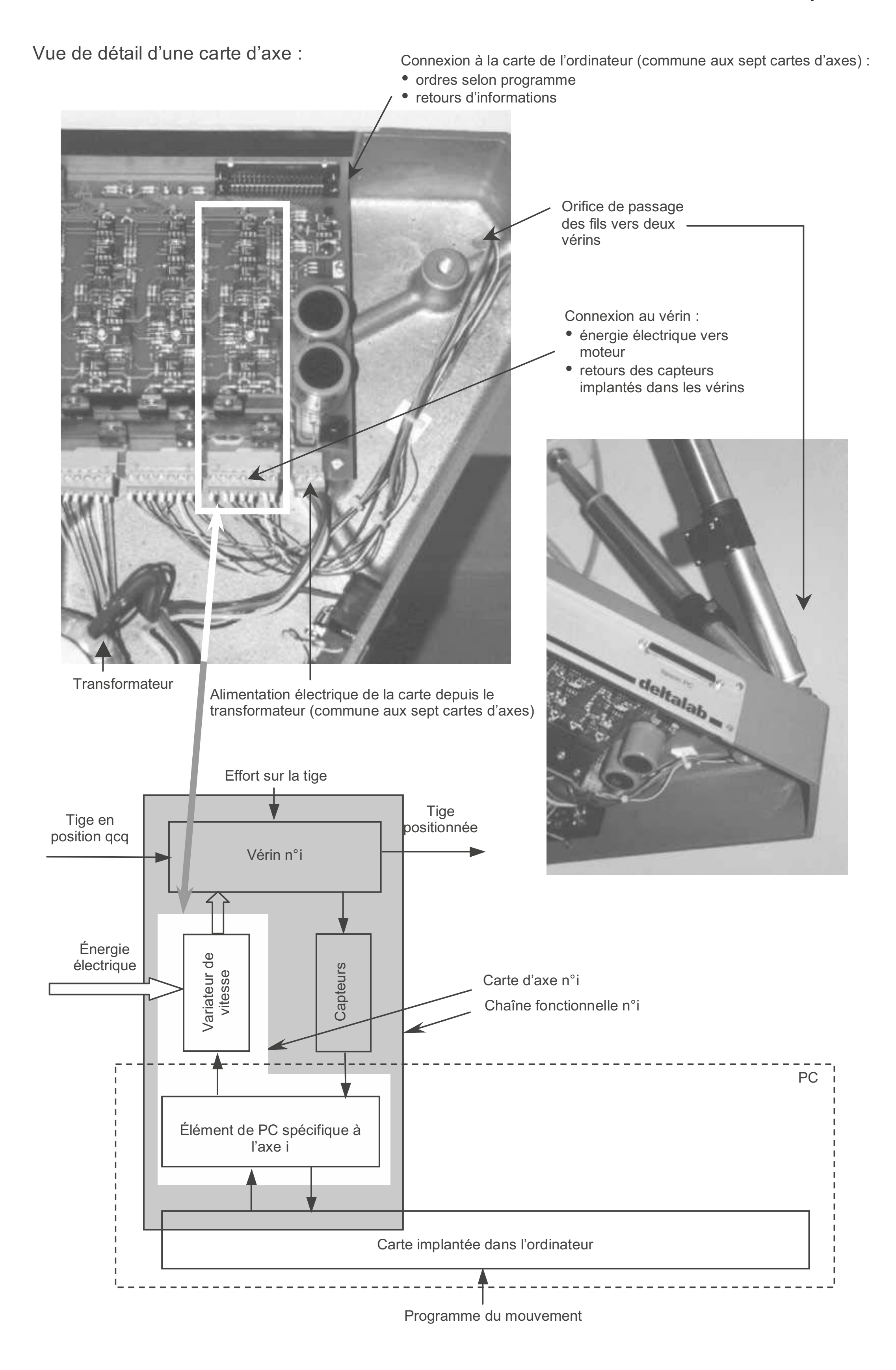
Le pilote automatique ne présente qu'une seule chaîne fonctionnelle. Parmi les différents systèmes proposés pour le laboratoire de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur des classes préparatoires scientifiques, prenons l'exemple de la plate-forme (robot parallèle) 6 axes développée par la société Deltalab-Cosimi : http://www.deltalab-cosimi.fr

Un tel système permet de déplacer un objet supporté par la plate-forme supérieure par rapport à l'embase fixe à l'aide de six vérins électriques montés sur des rotules entre ces deux solides. Il reproduit la structure de systèmes utilisés dans des simulateurs (de vol, de conduite, etc.), dans certains robots industriels, dans certaines machines-outils de nouvelle génération, etc.



Ce système possède six chaînes fonctionnelles identiques en parallèle. Les six vérins électriques réalisant la partie opérative sont bien visibles sur la photographie de gauche. La carte de commande, localisée dans l'embase fixe, contient une partie de la PC (partagée avec la carte se trouvant dans l'ordinateur) et les préactionneurs (variateurs électroniques de vitesse). Elle est décomposée en six cartes d'axes distinctes. Une septième carte permet de piloter un septième vérin, fonctionnant indépendamment des six utiles et implanté à des fins expérimentales. Ces sept cartes sont visibles sur la photographie de droite et son agrandissement ci-contre.

Vue de détail d'une carte d'axe :



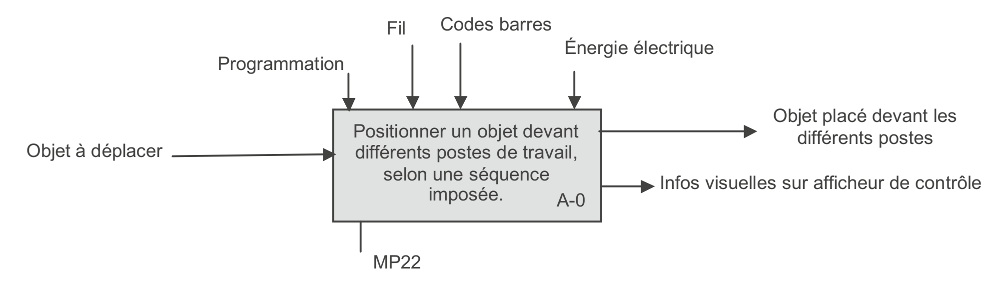
V-3 Systèmes logiques, continus, échantillonnés

Pour une chaîne fonctionnelle donnée, la nature des informations sur laquelle travaille la partie concernée de la PC peut être, selon le besoin, représentée par une grandeur logique ou continue.

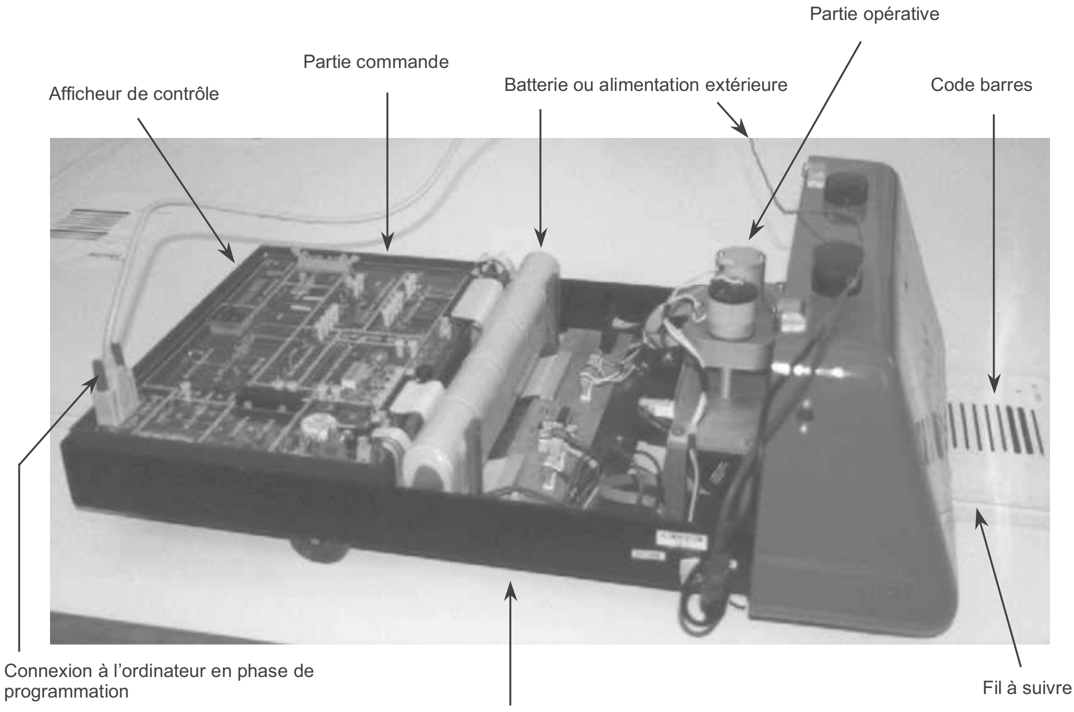
■ Chariot filoguidé Mentor Sciences MP22

Le chariot filoguidé également proposé pour le laboratoire de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur des classes préparatoires scientifiques présente de nombreuses chaînes fonctionnelles dont certaines travaillent sur des grandeurs logiques, d'autres sur des grandeurs continues. Il est commercialisé par la société Didalab : http://www.didalab.fr

Ce chariot reproduit, à échelle réduite, un chariot tel qu'on en rencontre dans les ateliers de production flexibles modernes, se déplaçant le long d'un fil inséré dans le sol pour déplacer des objets d'un poste de travail à un autre. Les différents postes sont identifiés par des codes barres.



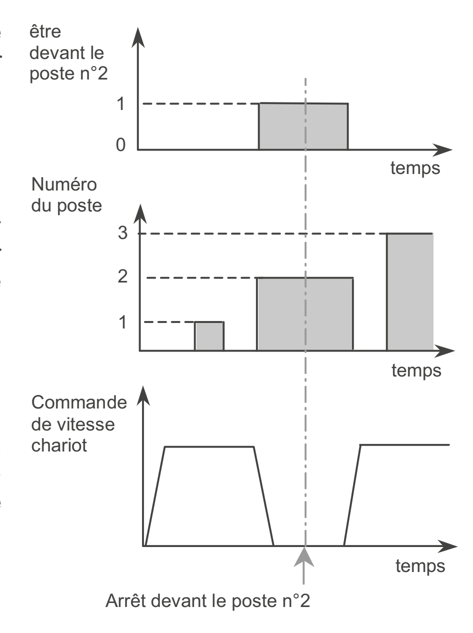
NB : d'autres entrées-sorties existent comme l'émission et la réception d'ultrasons pour la détection d'obstacles ou la réception de signaux infrarouges pour une commande manuelle, qui ne sont pas représentées ici dans un souci de simplification.



Un capot pouvant recevoir l'objet à transporter recouvre normalement l'ensemble.

■ Définitions

Une grandeur ***logique***, ou ***binaire***, ne peut prendre que deux états, modélisés par les nombres 0 et 1. Par exemple le chariot est devant un certain poste (1) ou il ne l'est pas (0). La grandeur « être devant le poste n°i » est donc une grandeur logique.



On rencontre aussi le qualificatif de grandeur ***discrète***. Une telle grandeur peut prendre plusieurs valeurs, par paliers. On peut toujours ramener une description par grandeur discrète à une description par grandeur logique par changement de variable. Par exemple la variable « numéro du poste » est une grandeur discrète. Elle peut être remplacée dans la description par les n grandeurs logiques « être devant le poste n°i ».

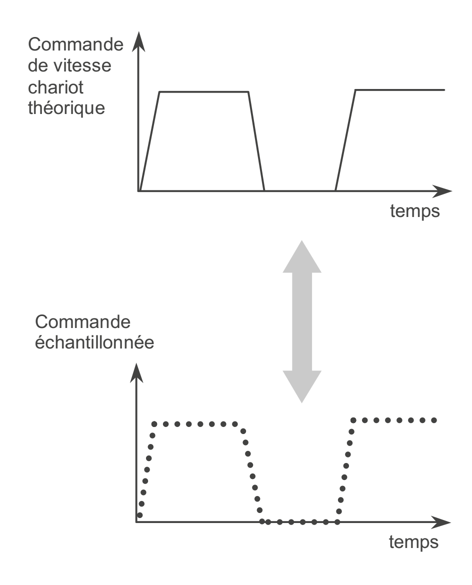
Une grandeur ***continue*** peut prendre toute valeur, dans un intervalle donné. Par exemple la commande de vitesse de déplacement du chariot ou sa distance mesurée par rapport au fil sont des grandeurs continues. Grandeur ***analogique*** est un synonyme.

Les chaînes fonctionnelles travaillant sur des informations représentées par des grandeurs logiques ou discrètes sont les chaînes logiques. Elles ne sont pas abordées dans cet ouvrage qui traite uniquement des chaînes à variables continues.

■ Remarques

1- On rencontre très souvent le terme de *système* logique ou continu. En fait un même système (par exemple le chariot filoguidé) peut travailler sur différentes grandeurs, certaines logiques, d'autres continues. Il est donc plus convenable de qualifier les chaînes fonctionnelles constituant le système, comme il vient d'être fait. Toutefois, dans la suite de l'ouvrage, limité aux chaînes continues donc ne présentant pas d'ambiguïté, les termes de chaînes et de systèmes pourront être confondus.

2- Les technologies actuelles reposent de plus en plus sur des composants numériques, tels que des micro-processeurs, des filtres, des mémoires, etc. Ces composants travaillent sur des grandeurs continues préalablement codées en binaire par des convertisseurs (convertisseurs analogiques numériques CAN). Ils fournissent alors des résultats codés, qu'il convient de reconvertir en grandeurs continues par des convertisseurs inverses (convertisseurs numériques analogiques CNA). Ainsi, la partie commande ne travaille pas sur des grandeurs continues, mais sur des grandeurs codées avec une certaine précision, dites grandeurs ***échantillonnées***. Des considérations qui dépassent le cadre de cet ouvrage montrent que sous certaines conditions de fréquence d'échantillonnage (nombre de points par unité de temps), les théories relatives aux signaux continus équivalents s'appliquent aux signaux échantillonnés. Toutes les études menées par la suite supposeront que ces conditions sont satisfaites.



EXERCICES

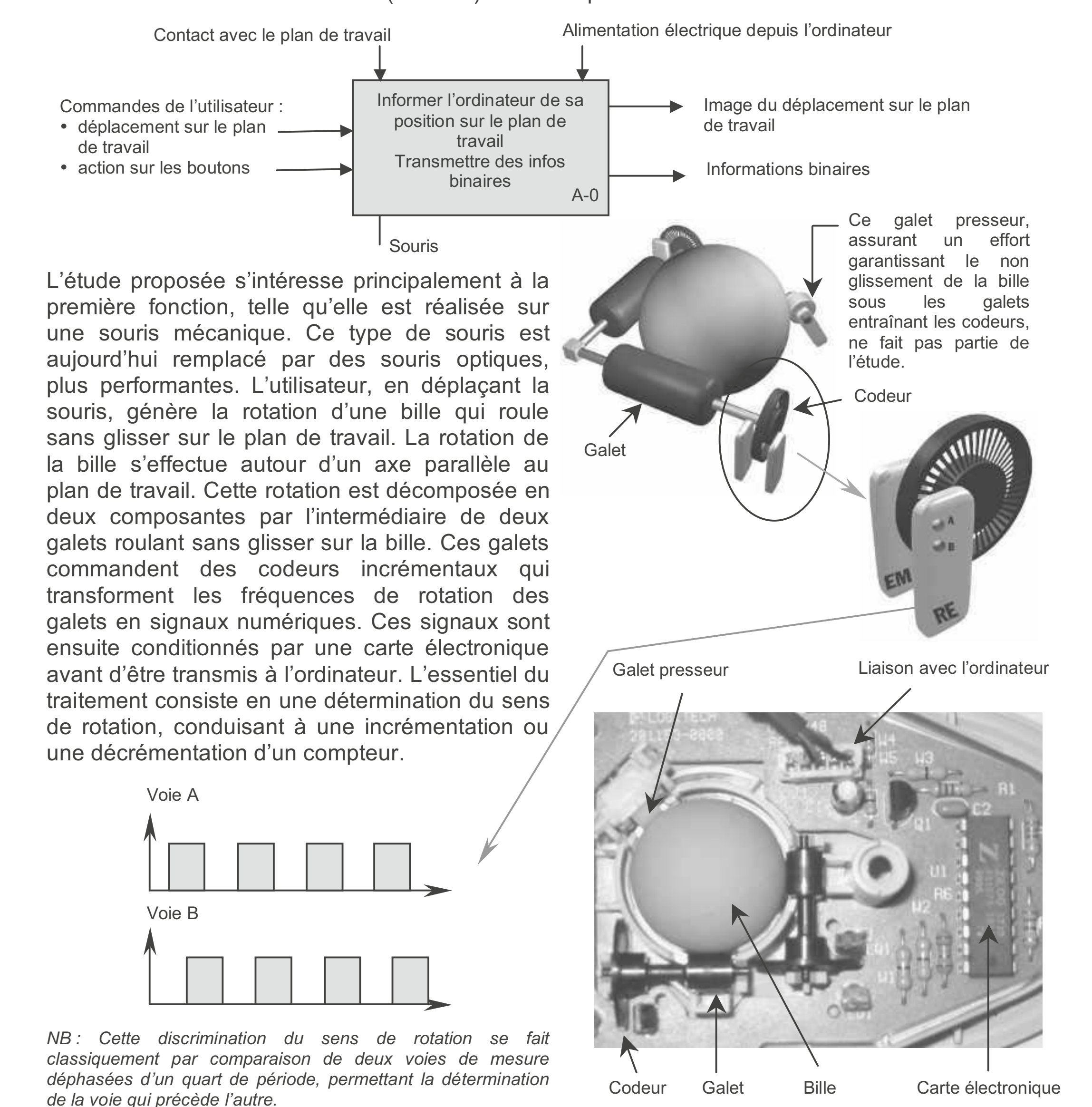
1

I - SOURIS MÉCANIQUE D'ORDINATEUR

I-1 Présentation

Une souris d'ordinateur a pour fonction de transmettre deux types d'informations à un ordinateur :

- une information continue, codée numériquement, de sa position sur le plan de travail ;
- des informations tout ou rien (binaires) obtenues par l'action de l'utilisateur sur des boutons.

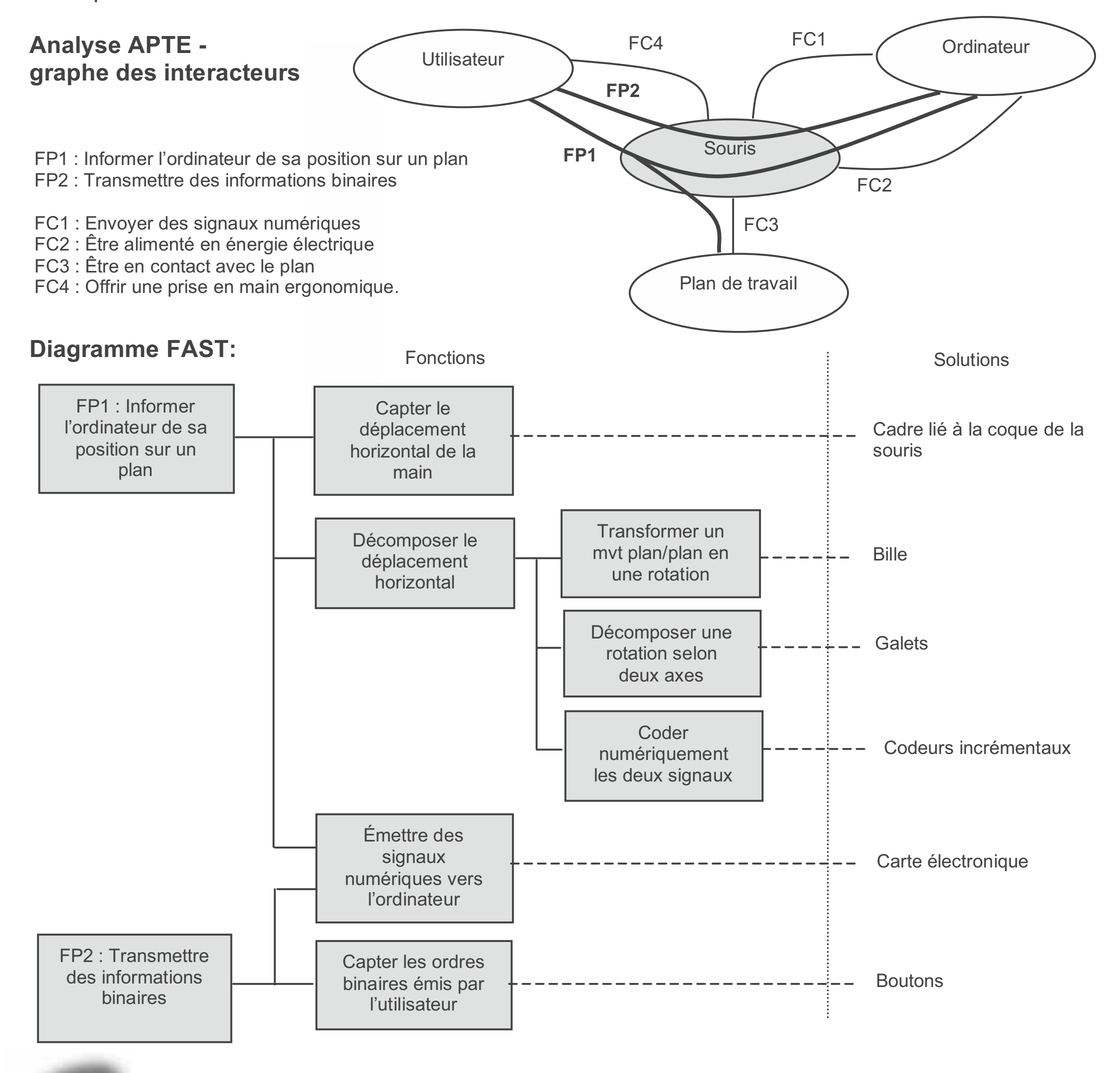


L'étude proposée s'intéresse principalement à la première fonction, telle qu'elle est réalisée sur une souris mécanique. Ce type de souris est aujourd'hui remplacé par des souris optiques, plus performantes. L'utilisateur, en déplaçant la souris, génère la rotation d'une bille qui roule sans glisser sur le plan de travail. La rotation de la bille s'effectue autour d'un axe parallèle au plan de travail. Cette rotation est décomposée en deux composantes par l'intermédiaire de deux galets roulant sans glisser sur la bille. Ces galets commandent des codeurs incrémentaux qui transforment les fréquences de rotation des galets en signaux numériques. Ces signaux sont ensuite conditionnés par une carte électronique avant d'être transmis à l'ordinateur. L'essentiel du traitement consiste en une détermination du sens de rotation, conduisant à une incrémentation ou une décrémentation d'un compteur.

NB : Cette discrimination du sens de rotation se fait classiquement par comparaison de deux voies de mesure déphasées d'un quart de période, permettant la détermination de la voie qui précède l'autre.

Pour finir, cette image du déplacement de la souris sur le plan de travail est traduite, par le logiciel de pilotage de la souris, en les deux coordonnées du pointeur à l'écran. Cette dernière transformation, réalisée au sein de l'ordinateur, sort de la frontière retenue pour le système « souris ».

Les figures qui suivent fournissent des informations fonctionnelles venant compléter cette description.



I-2 Travail demandé

À partir des différents éléments dont vous disposez, proposer une description de la souris selon la méthode SADT au niveau A0, faisant apparaître les huit sous-ensembles :

- cadre
- bille
- galet 1
- codeur associé au galet 1
- galet 2
- codeur associé au galet 2
- carte électronique
- boutons

I-3 Correction

Contact avec le plan de travail

Alimentation électrique depuis l'ordinateur

Déplacement sur le plan de travail

Capter le déplacement horizontal de la main A1

Cadre

Mvt plan/plan

Transformer un mvt plan/plan en une rotation A2

Bille

Mvt de rotation

Capter une composante de rotation A3

Rot. autour d'un axe

Coder numériquement le signal A5

Galet 1

Codeur 1

Capter l'autre composante de rotation A4

Rot. autour d'un axe

Coder numériquement le signal A6

Galet 2

Codeur 2

Images numériques des deux composantes de rotation

Image du déplacement sur le plan de travail

Action sur les boutons

Capter les ordres binaires émis par l'utilisateur A7

Informations binaires

Émettre des signaux numériques vers l'ordinateur A8

Infos. binaires

Boutons

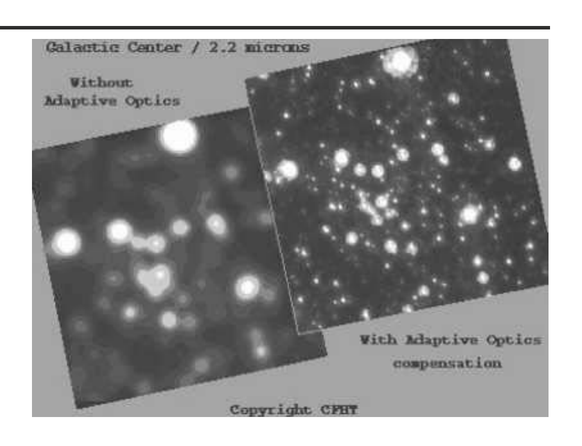
Carte électronique

AO

Souris

II - OPTIQUE ADAPTATIVE

D'après une épreuve du concours Mines-Ponts PSI.



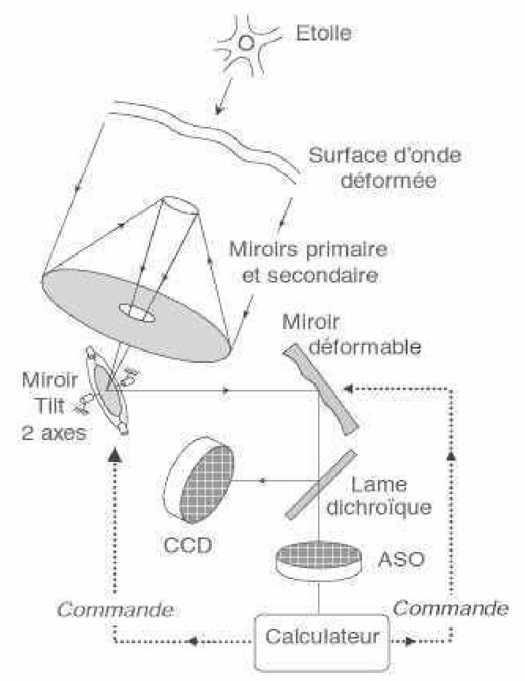
II-1 Présentation

En instrumentation astronomique, un système d'optique adaptative (OA) permet de corriger les effets des turbulences de l'atmosphère. Celles-ci provoquent des fluctuations aléatoires de l'indice de réfraction des couches de l'atmosphère traversées par la lumière, et sont à l'origine des déformations des surfaces d'onde reçues par le télescope.

Il en résulte non seulement une déformation instantanée des images, mais également un « flou » dû aux variations de la surface d'onde pendant la pose.

On étudie ici un sous-système de l'optique adaptative du Very Large Telescope européen (VLT).

Le schéma de principe d'une optique adaptative est présenté ci-contre : la surface d'onde, provenant de l'objet astronomique et déformée par l'atmosphère, est reçue par les miroirs primaire puis secondaire du télescope. La lumière est séparée par une lame dichroïque (un miroir partiellement réfléchissant), et renvoyée pour partie sur la caméra CCD où se forment les images, pour l'autre partie sur un analyseur de surface d'onde (ASO). Celui-ci fournit une estimation de la déformation de la surface d'onde. Un calculateur temps-réel en déduit les commandes à appliquer aux actionneurs de l'optique adaptative.



Pour des raisons de traitement du signal et de technologie des miroirs adaptatifs, on décompose la surface d'onde en *modes*, c'est-à-dire qu'on la projette sur une base orthonormée de fonctions.

Les premiers modes sont un « piston », mode d'ordre zéro, constant, et deux basculements orthogonaux, modes d'ordre un : *tip-tilt* en anglais et *tilts* en jargon technique de l'astronomie.

Le mode piston est indifférent et n'est pas corrigé. Les *tilts* représentent 90% de l'énergie de déformation. Les modes d'ordre compris entre 2 et une valeur maximale choisie par les concepteurs peuvent être corrigés par un miroir déformable, dont la technologie est généralement à base de matériaux piézoélectriques. Ce miroir ne peut presque pas corriger les *tilts*. Il est donc préférable de confier cette fonction à un sous-système séparé commandant un miroir plan par deux rotations orthogonales.

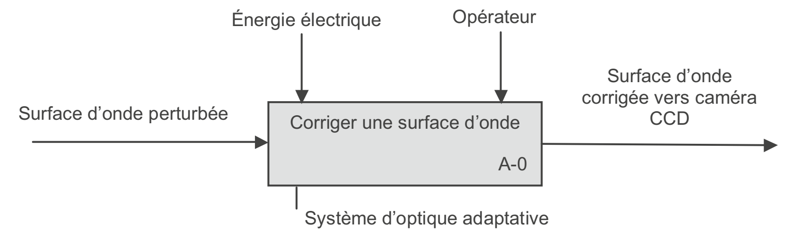
II-2 Travail demandé

Réaliser un diagramme SADT de l'ensemble du système d'optique adaptative :

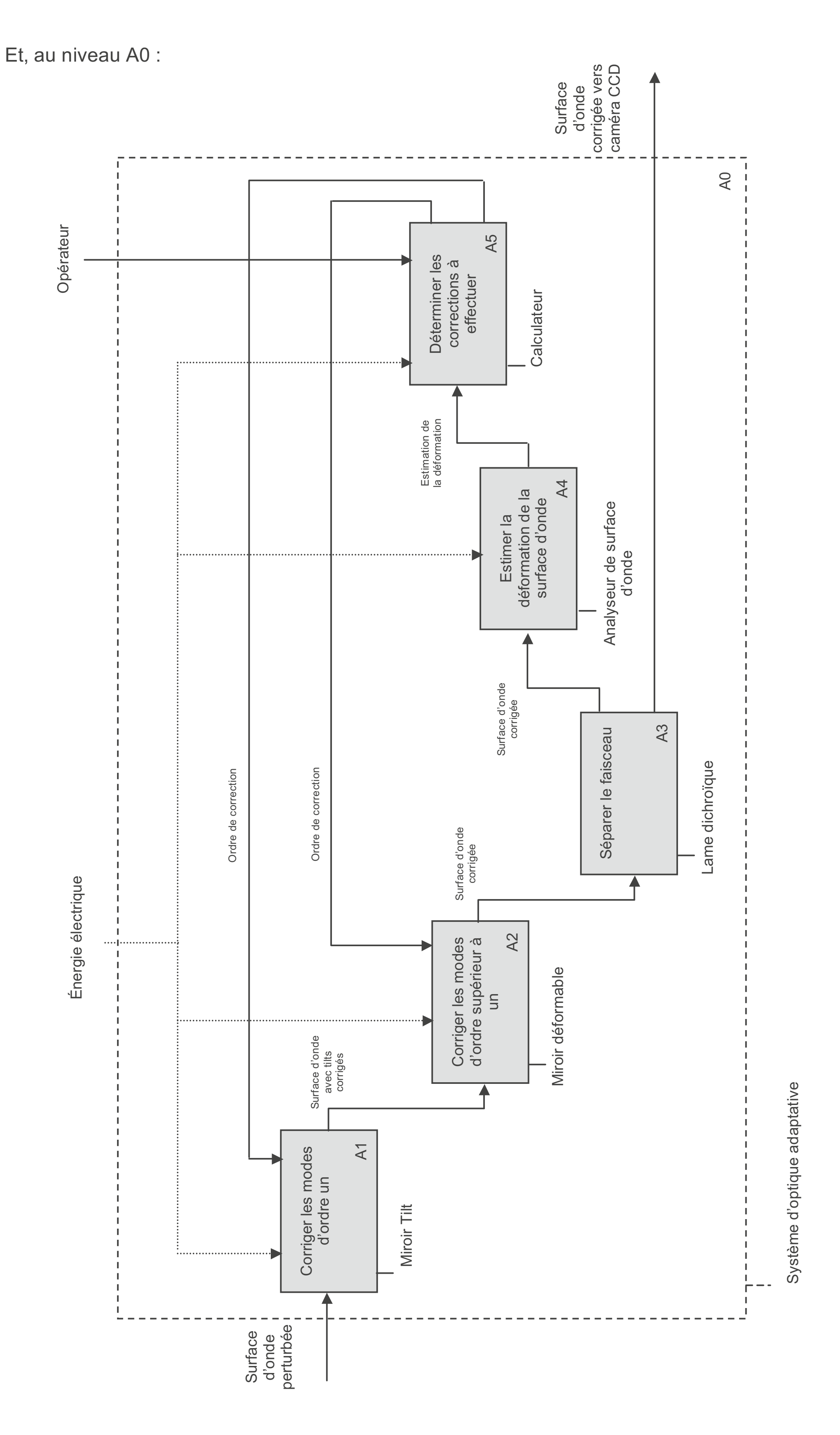
- niveau A-0 présentant la fonction globale
- niveau A0 détaillant les sous-fonctions.

II-3 Correction

En considérant la caméra CCD comme ne faisant pas partie du système d'optique adaptative (choix de la frontière), il vient :

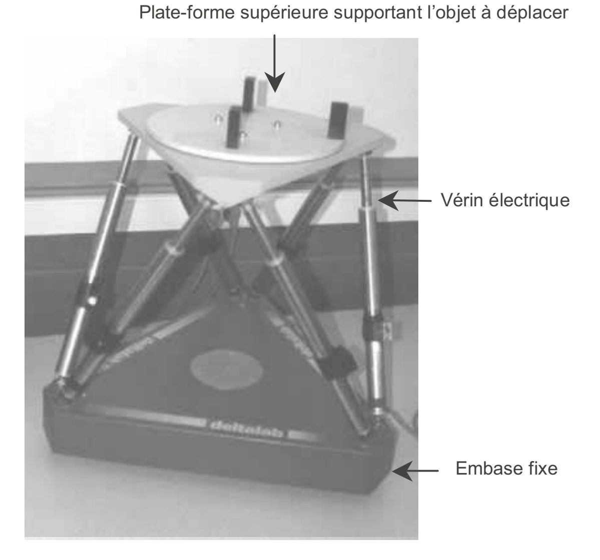


Et, au niveau A0 :



III - ROBOT PARALLÈLE 6 AXES EX800

III-1 Présentation



On rappelle que le système EX800 est constitué :

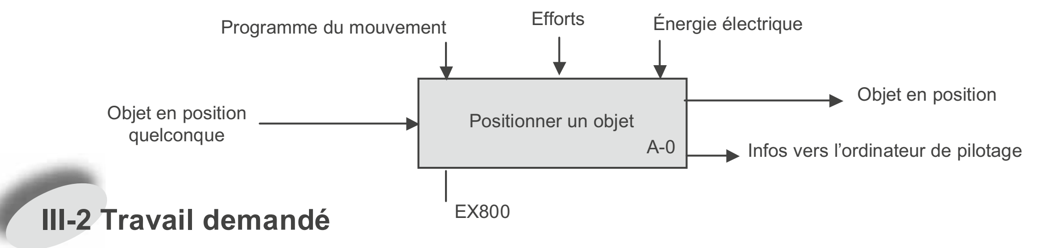
- d'une partie opérative : structure de robot parallèle 6 axes composée de 6 vérins électriques réalisant le mouvement relatif entre une plate-forme supérieure (qui porte une charge, un outil, etc.) et une embase fixe ;
- d'une carte de commande et d'acquisition insérée dans l'ordinateur de pilotage ;
- d'une carte électronique pilotant les 6 vérins, logée dans l'embase, regroupant des éléments de commande et les différents préactionneurs (variateurs électroniques de vitesse).

La partie commande est donc répartie sur deux cartes de commande : la carte insérée dans l'ordinateur et certains éléments de la carte située dans l'embase. Voir V-2-6 précédemment.

Ainsi, la frontière du système considéré ne se limite pas à la frontière matérielle du système photographié ci-dessus, mais inclut la carte insérée dans l'ordinateur. La connexion à l'ordinateur est donc nécessaire au fonctionnement, à l'inverse du chariot MP22 par exemple où la PC entière est sur la carte électronique et qui peut donc fonctionner en autonomie.

Cette partie commande donne ses ordres à la partie opérative en fonction :

- de la programmation effectuée par l'opérateur via le logiciel de pilotage ;
- du retour d'information donné par des capteurs intégrés à la partie opérative : position et vitesse de la tige de chaque vérin.



III-2 Travail demandé

Les différentes fonctions techniques réalisées par ce système peuvent être rassemblées dans le diagramme FAST donné page suivante, au regard duquel les solutions techniques (sous-systèmes) retenues sont indiquées.

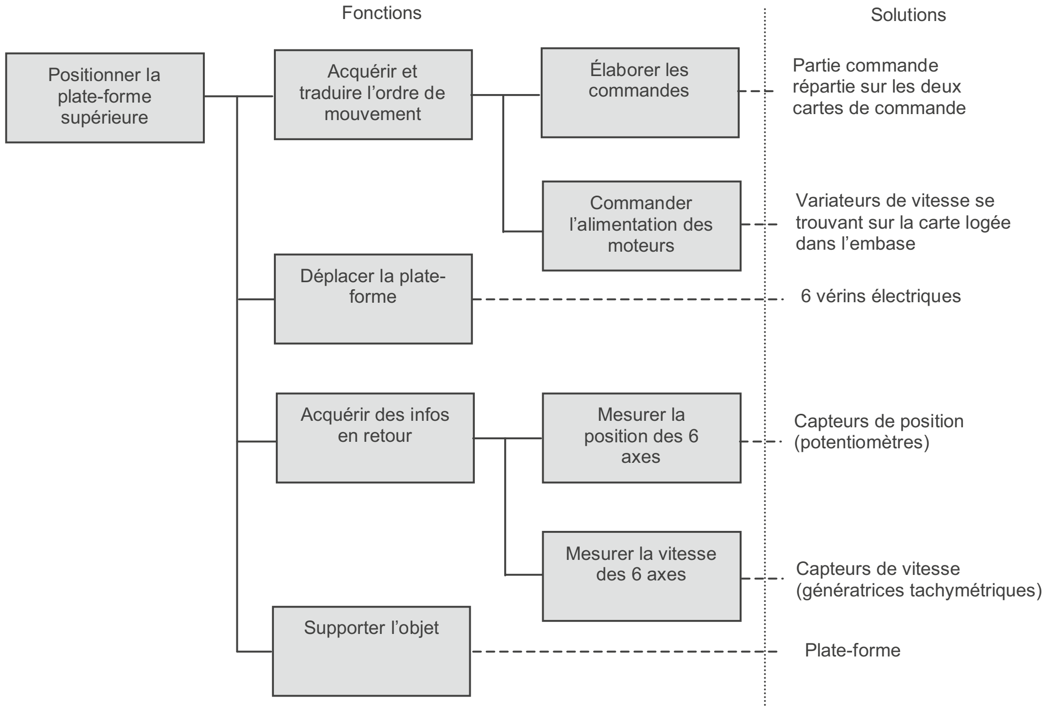
Question 1 :

En s'aidant du diagramme FAST, compléter les trois diagrammes SADT ébauchés correspondant à une structure d'analyse descendante qui vous est imposée. Pour cela on indiquera :

- les différentes fonctions et les sous-systèmes les réalisant ;
- les différentes entrées sorties.

Remarque importante : la logique FAST ne se superpose pas nécessairement avec la logique SADT. On ne cherchera donc pas une similitude dans les niveaux. D'ailleurs le premier niveau du

diagramme FAST donné définit quatre fonctions, alors que l'analyse SADT est proposée avec un premier niveau à trois fonctions. De même la logique SADT proposée, fonctionnelle, ne permettra pas de distinguer les deux parties de la PC.

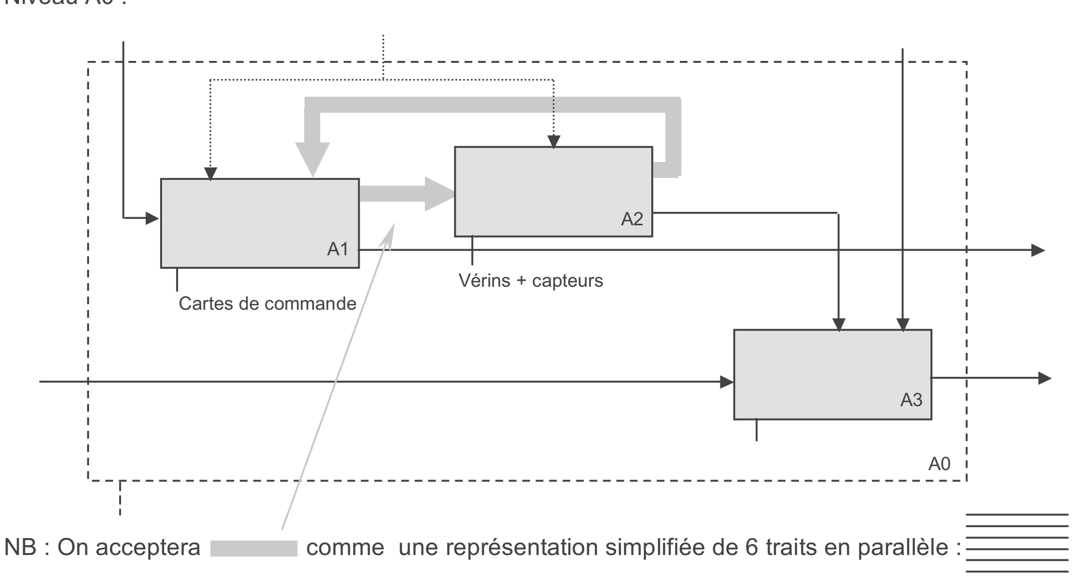


Question 2 :

Sur ces trois diagrammes, marquer d'une surépaisseur, ou d'une couleur différente, les différents flux de la chaîne d'énergie.

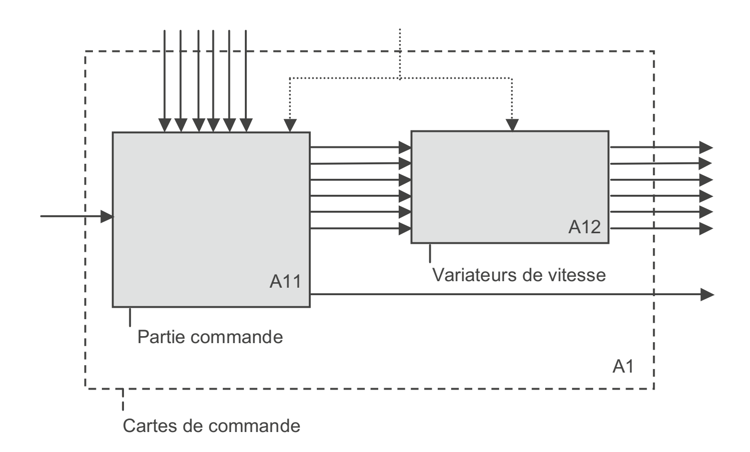
■ **Ébauches de diagrammes à compléter :**

Niveau A0 :

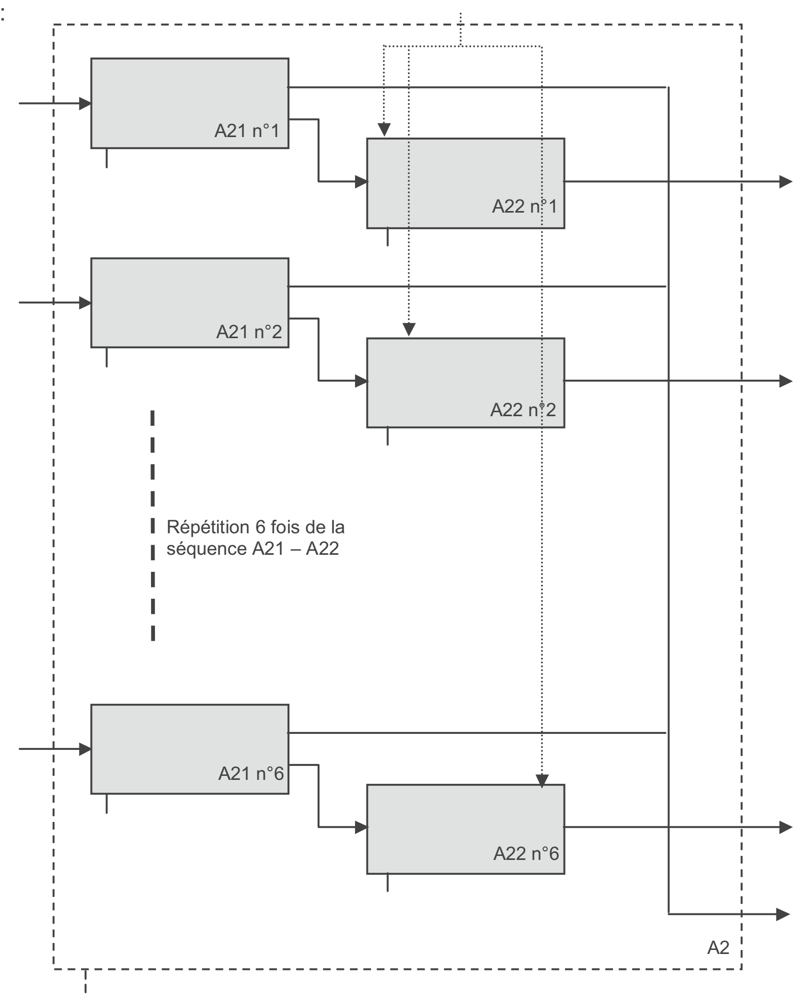


NB : On acceptera ▬ comme une représentation simplifiée de 6 traits en parallèle :

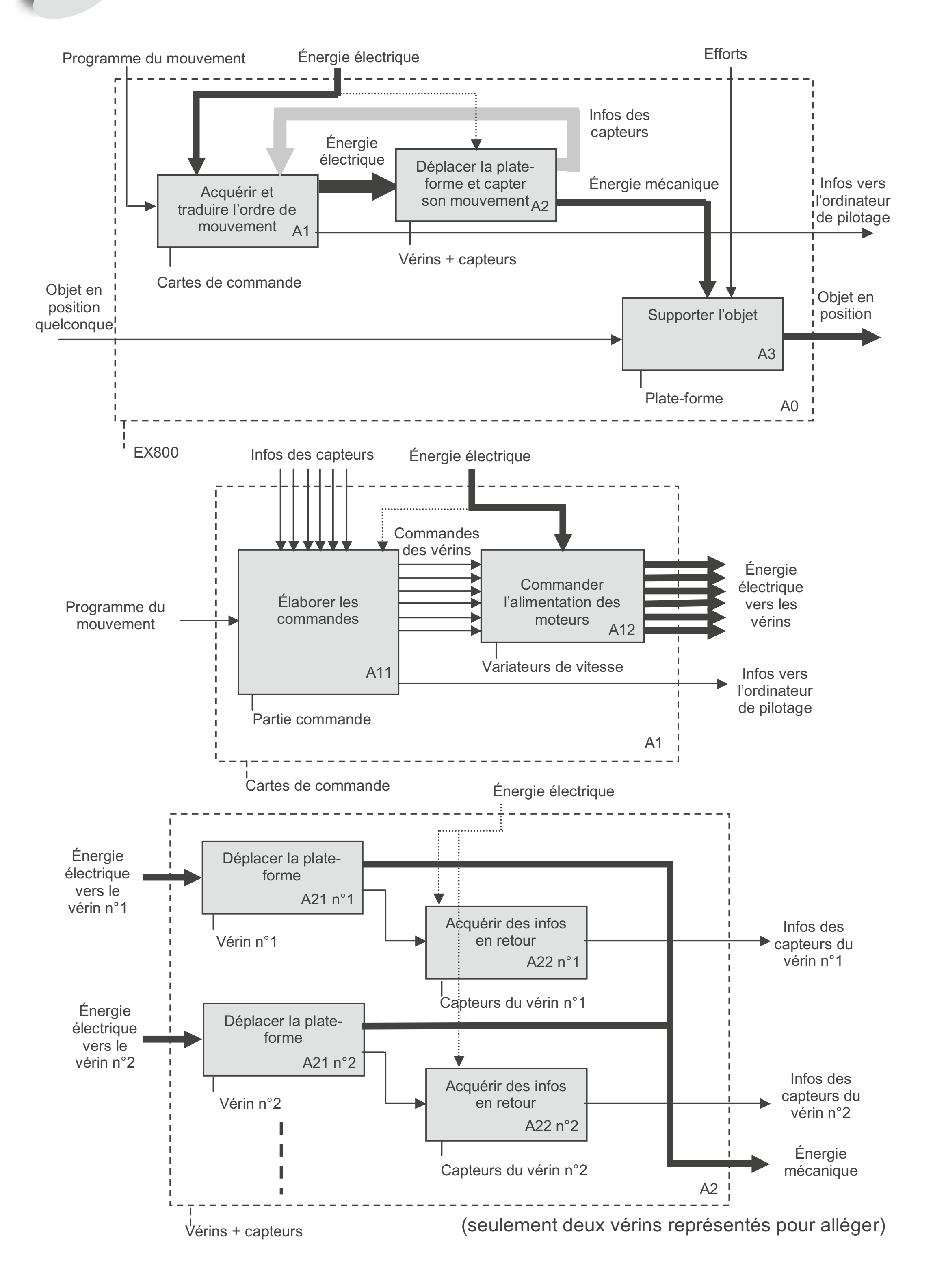
Niveau A1 :



Niveau A2 :



III-3 Correction



(seulement deux vérins représentés pour alléger)

IV - MOTORISATION HYBRIDE D'UN VÉHICULE AUTOMOBILE

D'après une épreuve du concours Centrale-Supélec PSI, ayant pour support la technologie HDS du véhicule Toyota Prius. Questions modifiées.

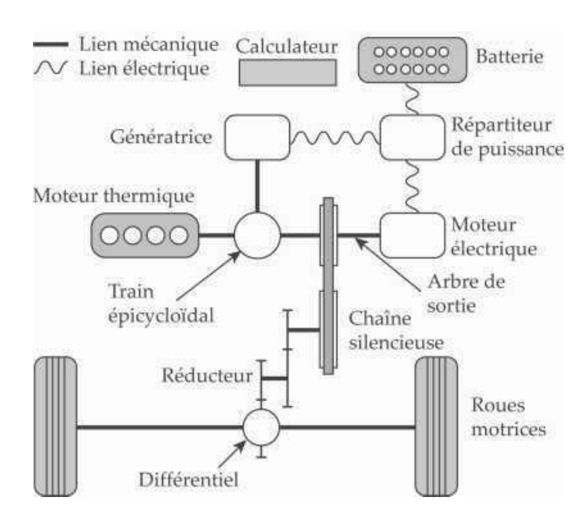
IV-1 Présentation



Dans le contexte actuel d'économie des énergies fossiles et de réduction des émissions de gaz nocifs, le système de propulsion hybride constitue une alternative intéressante à la propulsion classique par moteur thermique seul car il permet de réduire la consommation.

La spécificité de la solution retenue sur la Toyota Prius (système HDS) consiste à :
- récupérer l'énergie du véhicule lors du freinage,
- exploiter le moteur thermique à son rendement optimal.

Le système HDS associe un moteur thermique à essence et sa transmission, à deux machines électriques et une batterie de puissance.



La figure suivante met en évidence les deux machines électriques (le moteur électrique et la génératrice) reliées au moteur thermique par un train épicycloïdal.

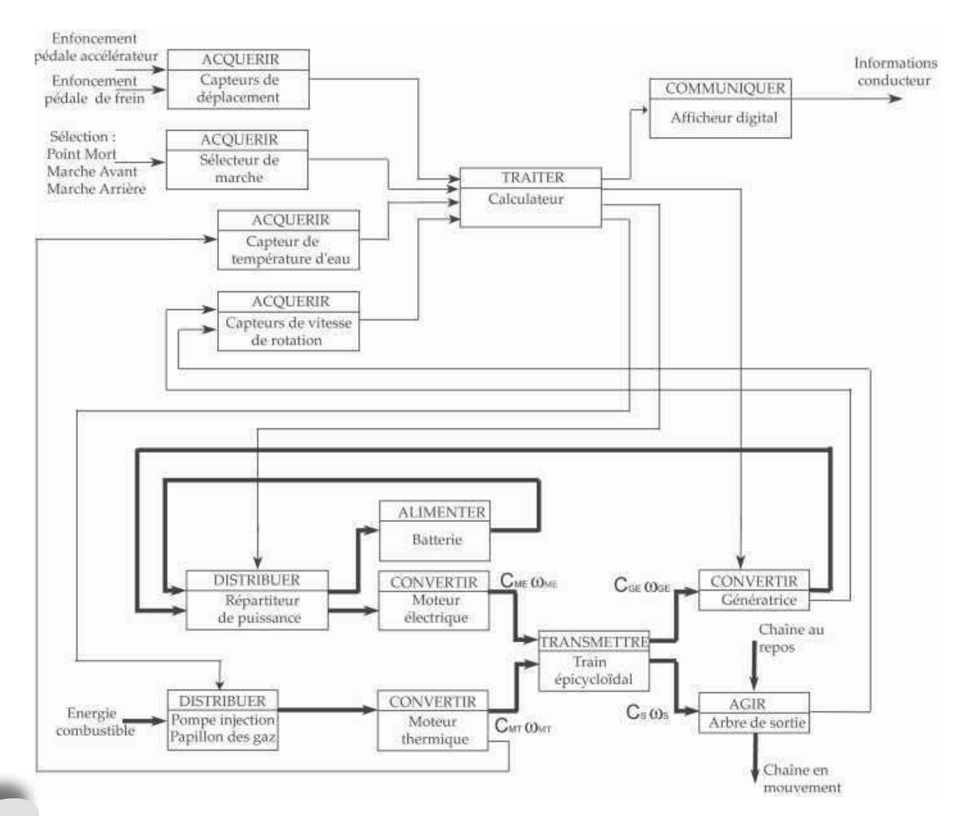
Le train épicycloïdal est le composant de sortie du système qui entraîne la chaîne « silencieuse » à partir de laquelle on retrouve une transmission traditionnelle.

À partir de la position :
- de la pédale d'accélérateur
- de la pédale de frein
- du sélecteur de marche
- de la température de l'eau du moteur thermique
- et de la vitesse du véhicule,

le calculateur détermine la vitesse de rotation optimale du moteur thermique et la consigne d'ouverture du papillon des gaz. La puissance en sortie du moteur thermique est transmise, grâce au train épicycloïdal, à la chaîne « silencieuse » et à la génératrice. Un asservissement en vitesse de la génératrice permet de contrôler la vitesse de rotation du moteur thermique. Le répartiteur de puissance gère les échanges de puissance électrique entre la génératrice, le moteur électrique et la batterie.

Le moteur électrique entraîne la chaîne « silencieuse », seul ou en complément du moteur thermique. Il récupère également l'énergie cinétique ou potentielle du véhicule lors des phases de ralentissement.

Les différents transferts d'énergie et d'information peuvent être rassemblés sur le schéma synoptique qui suit :



IV-2 Travail demandé

Question 1 :

- Quelle est la matière d'œuvre du système HDS ?
- Quelle est la source d'énergie nécessaire au fonctionnement du système ?
- Donner un diagramme de type SADT de niveau A-0 précisant la fonction globale du système.

Question 2 :

Distinguer, sur le schéma ci-dessus :

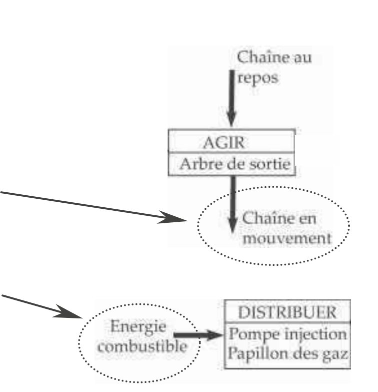
- la chaîne d'énergie et la chaîne d'information,
- la partie opérative (PO) et la partie commande (PC),
- les capteurs,
- les préactionneurs,
- les actionneurs.

IV-3 Correction

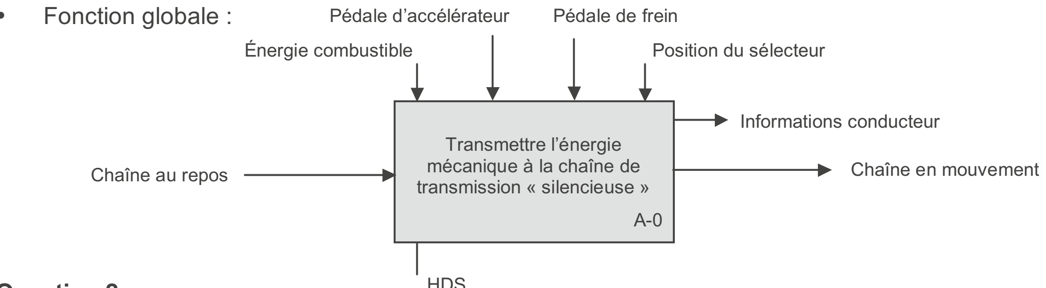
Question 1 :

- La matière d'œuvre du système HSD est le mouvement commandé de la chaîne « silencieuse ».

- L'unique source d'énergie du système est, bien entendu, l'énergie combustible contenue dans le réservoir de carburant. À partir de cette énergie, les énergies nécessaires (mécanique et électrique) sont élaborées au sein même du système.



- Fonction globale :



Question 2 :

- Les chaînes d'énergie et d'information correspondent respectivement aux parties basse et haute du schéma synoptique (en trait fin les informations, en trait fort les énergies).
- La PC est constituée du calculateur, auquel on peut associer l'afficheur qui permet de communiquer avec le conducteur. La PO est constituée des deux moteurs (thermique et électrique), de la génératrice et du train épicycloïdal (transmetteur) muni de son arbre de sortie (effecteur).
- Les capteurs sont tous les composants réalisant les fonctions d'acquisition. Les préactionneurs distribuent l'énergie : il s'agit donc du répartiteur de puissance, de la pompe à injection et du papillon des gaz. La batterie peut être considérée comme un élément de stockage interne au répartiteur de puissance et donc faire partie du groupe des préactionneurs.
- Les actionneurs convertissent les énergies pour agir sur le transmetteur qu'est le train épicycloïdal : il s'agit donc du moteur thermique et du moteur électrique. Toutefois, en tant que transformateur d'énergie, la génératrice peut aussi être classée parmi les actionneurs.

On notera, à l'issue de cette étude, que dès que l'on s'intéresse à des systèmes complexes, le découpage terminologique strict défini au paragraphe V-2 s'avère difficile à appliquer, comme ici pour la génératrice et la batterie. Le vocabulaire offre une grille d'analyse, qui doit rester ouverte.

SYSTÈMES ASSERVIS



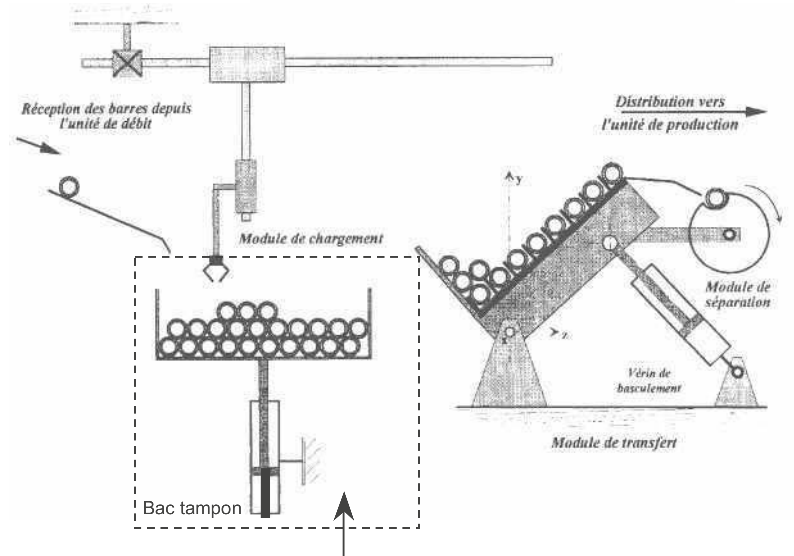
I - EXEMPLE INTRODUCTIF : système de présentation de tubes

À partir d'un support du concours ENTPE PSI.

I-1 Présentation fonctionnelle

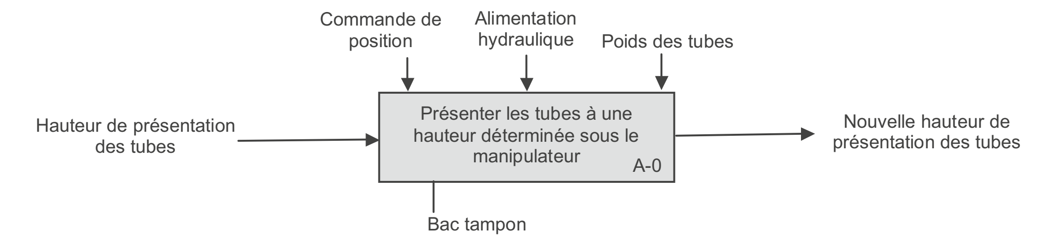
Dans une unité de fabrication de radiateurs de chauffage central, un système a pour fonction de mettre à disposition de l'unité de production, et selon des familles définies, des tubes provenant d'une unité de débit. Sa partie opérative se compose à cet effet de trois modules distincts :

- un module de chargement, composé d'un bac tampon recevant les tubes de l'unité de débit et d'un manipulateur transférant les barres depuis le bac jusque sur le module de transfert ;
- un module de transfert, transférant les tubes jusqu'au module de séparation ;
- un module de séparation, qui fournit les tubes un à un au processus de production à l'aide d'un plateau à encoche, selon les critères demandés.

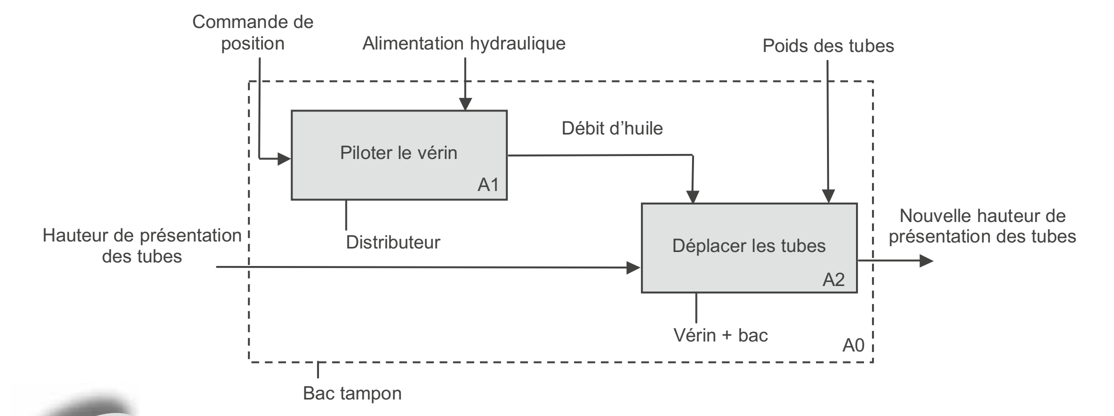


On s'intéresse ici au sous-système bac tampon, ayant pour fonction de présenter les tubes au manipulateur à une hauteur déterminée. Compte tenu du poids important à soulever et à maintenir, la solution retenue est d'utiliser un vérin hydraulique associé à un distributeur, relié à une source d'énergie hydraulique.

D'un ***point de vue fonctionnel***, sa représentation se fera donc selon les diagrammes suivants :



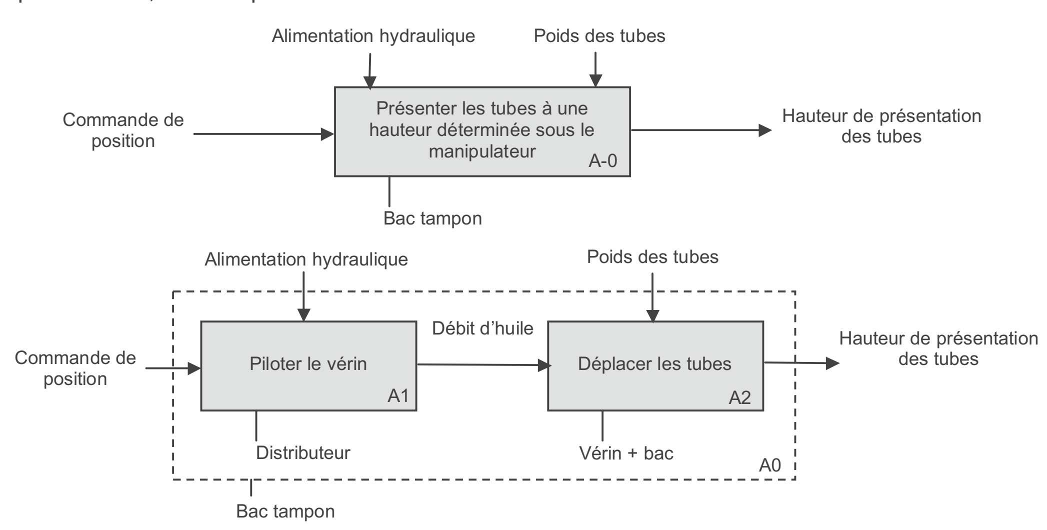
Soit, plus précisément, en détaillant les fonctions du distributeur et de l'ensemble {vérin, bac} :



I-2 Le point de vue de l'automaticien : le transformateur de commande

La description précédente a été conduite selon un point de vue fonctionnel. Elle présente la commande comme une donnée de contrôle, permettant la transformation de la matière d'œuvre qui est la hauteur de présentation des tubes.

Mais, du point de vue de l'automaticien, un système est un ***transformateur de commande***. La commande est alors perçue comme la matière d'œuvre entrante du système. La matière d'œuvre sortante est alors le résultat de cette commande : ici, la hauteur de présentation des tubes. Selon ce point de vue, la description sera alors :



Dans la suite de cet ouvrage, ayant pour cadre l'automatique, ce point de vue sera retenu et tous les systèmes seront décrits comme des transformateurs de commande.

I-3 Fonctionnement

L'alimentation hydraulique, considérée comme ***en dehors*** du système proprement dit, est constituée d'un réservoir, d'une pompe (et son entraînement électromécanique ici non décrit), et d'un limiteur de pression répondant aux exigences de sécurité en cas de surcharge.

Le distributeur (préactionneur du système - cf. chapitre 1, V-2) possède trois positions :

- une position neutre, dans laquelle :
  - la pompe débite en circuit fermé à travers le distributeur,
  - les deux chambres du vérin se trouvent isolées ;
- une position pilotant la descente du bac ;
- une position pilotant la montée du bac.

La commande agira donc sur la position du distributeur, comme indiqué sur les schémas ci-dessous.

Vérin

Distributeur

Commande vers la gauche ou vers la droite

Bac tampon proprement dit

Alimentation hydraulique

Limiteur de pression revoyant l'huile au réservoir en cas de surpression

Pompe

Réservoir

Position neutre — Descente du bac — Montée du bac

NB : La représentation de la commande du distributeur est ici simplifiée par rapport à la représentation normalisée.

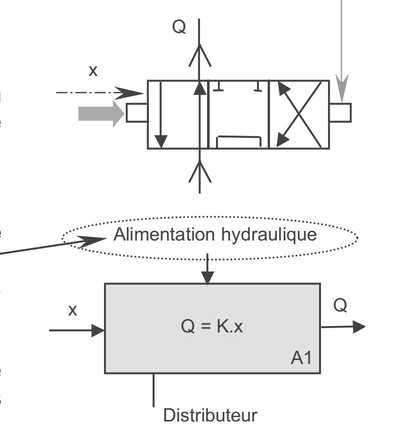
I-4 Modélisation

I-4-1 Distributeur proportionnel

Si la position du distributeur est repérée par la grandeur x, nulle en position neutre, un modèle simple de son comportement est de considérer le débit Q en sortie proportionnel à cette grandeur : $Q(t) = K.x(t)$

Où :

- la constante K dépend des caractéristiques de l'alimentation hydraulique et du distributeur lui même ;
- x appartient à un intervalle limité, défini par les caractéristiques techniques du distributeur.



Le débit Q est alors compté positivement lorsque le distributeur est traversé dans le sens qui pilote la montée des tubes et négativement dans le cas contraire.

I-4-2 Vérin

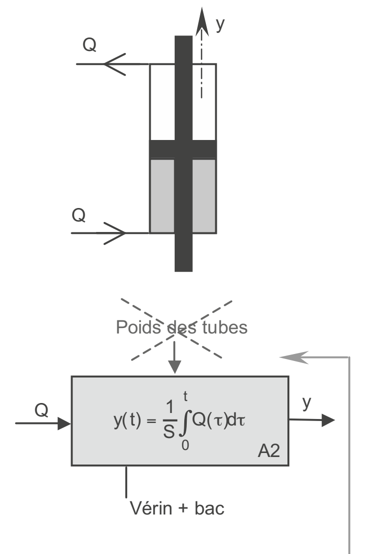
Revoir si nécessaire l'étude du vérin hydraulique, chapitre 1, III-4-3.

Si la section utile du vérin est notée S, le déplacement vertical de sa tige et donc des tubes, sera effectué à la vitesse :

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{1}{S}Q(t)$$

et donc la hauteur y obéit à : $y(t) = \frac{1}{S}\int_0^t Q(\tau)d\tau$

On notera que l'utilisation d'un vérin double tige assurant la même section S des deux côtés du piston permet un fonctionnement symétrique et donc une loi de comportement identique, que y soit croissante ou décroissante. Sinon on aurait deux sections différentes selon le cas.



I-4-3 Limites de la modélisation

Ces modélisations du distributeur et du vérin sont, comme toujours, des simplifications de la réalité. En particulier elles supposent que :

- l'huile est parfaitement incompressible ;
- l'étanchéité est parfaite ;
- toutes les pièces sont indéformables, en particulier les joints d'étanchéité.

Ainsi le poids des tubes n'intervient pas dans ce modèle simplifié.
Dans le cas contraire, la pression engendrée par le poids des tubes, comprimerait l'huile et les joints d'étanchéité, ou bien créerait quelques fuites, ce qui compliquerait considérablement les deux lois précédentes.

I-4-4 Loi de comportement globale

L'ensemble bac tampon, commandé par la position x du distributeur et définissant la hauteur y des tubes, obéit donc à la loi :

$$y(t) = \frac{K}{S}\int_0^t x(\tau)d\tau$$

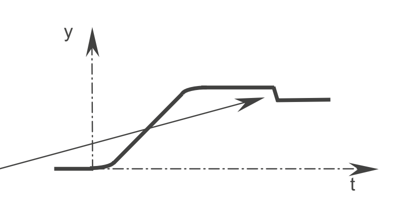
Ainsi, la commande de montée du bac sera effectuée en maintenant x à sa valeur maximale (tiroir du distributeur à droite) pendant la durée nécessaire, selon la loi ci-contre.

Un tel système est appelé ***intégrateur***, sa sortie étant proportionnelle à l'intégrale de l'entrée, depuis l'instant initial.

I-5 Introduction d'une boucle de retour

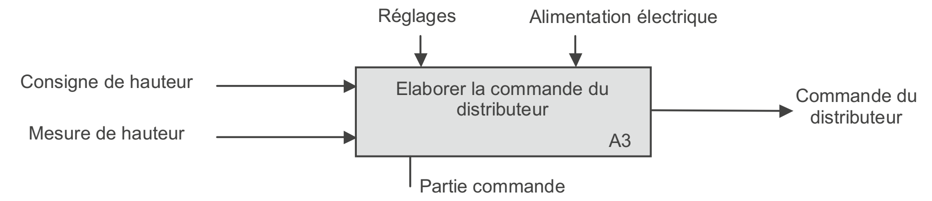
Le système précédent possède deux inconvénients majeurs :

- Le tiroir ne pouvant être déplacé instantanément, il s'en suit un comportement dynamique rendant difficile l'obtention exacte de la valeur y souhaitée.
- Certains éléments qui ne sont pas pris en compte par le modèle, comme la compressibilité de l'huile ou la déformabilité des joints d'étanchéité, font que le poids des tubes agit en ***perturbation***. Il s'en suit des variations de la hauteur du bac, qui diminuera légèrement à chaque chute d'un tube dans le bac, ou augmentera à chaque saisie d'un tube par le bras manipulateur.

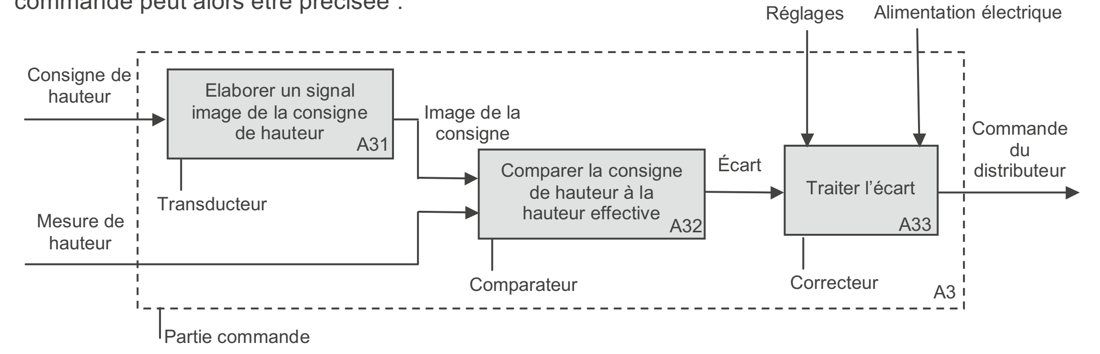


La solution fondamentale de l'automatique consiste à ***mesurer*** à chaque instant la hauteur du bac (où toutes les perturbations incontrôlées se trouvent globalisées) et à la ***comparer*** à la hauteur souhaitée.

La commande de position agissant sur le distributeur ne dépend donc plus de la hauteur souhaitée mais de l'***écart*** entre celle-ci et la hauteur effective du bac mesurée. Il convient donc d'introduire une partie commande à deux entrées et une sortie :

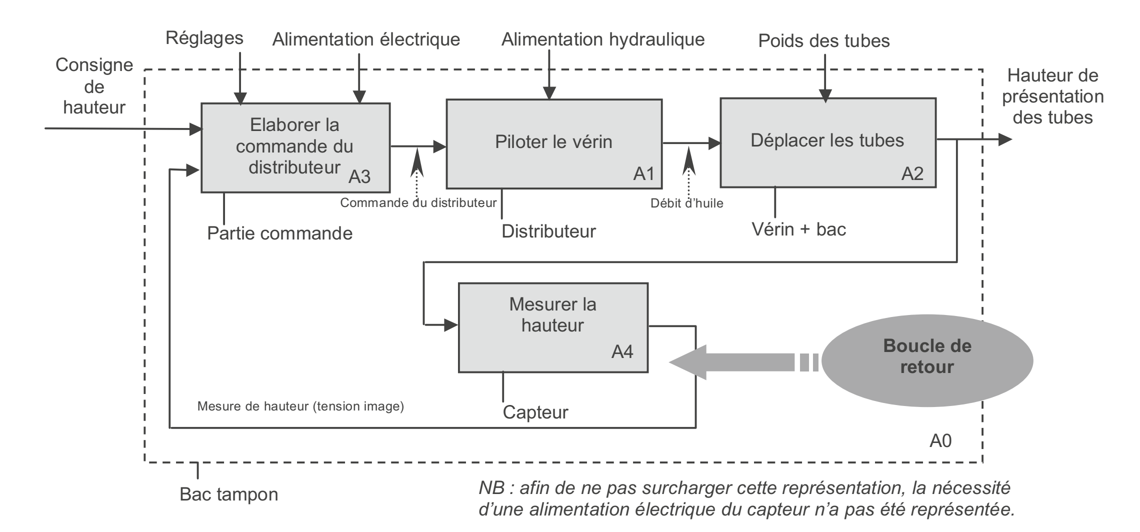


Des réglages permettent d'ajuster certaines caractéristiques dynamiques du système, comme sa rapidité par exemple. Nous le verrons plus loin. Toutes ces caractéristiques « intelligentes » de la partie commande, sont réalisées par un élément appelé ***correcteur***. Celui-ci est en général également amené à amplifier l'écart, qui est souvent trop faible pour constituer une commande. D'où la nécessité d'un raccord à une source énergétique. La structure interne de la partie commande peut alors être précisée :



Un ***transducteur*** élabore un signal image de la consigne. Ce signal doit être ***comparable*** avec celui élaboré par le système de mesure de la hauteur effective.

Les technologies actuelles sont telles que les parties commandes travaillent sur des grandeurs principalement électriques (mesure, image de la consigne, écart, commande). Aussi le distributeur devra être à commande électrique. On obtient alors la structure globale suivante, mettant en évidence la ***boucle de retour*** :



NB : afin de ne pas surcharger cette représentation, la nécessité d'une alimentation électrique du capteur n'a pas été représentée.

Dans le système étudié, les exigences dynamiques permettent de prévoir un correcteur qui soit un simple amplificateur, aussi le schéma simplifié ci-contre traduit-il la réalisation matérielle de la structure qui vient d'être décrite.

Capteur optique de mesure de la hauteur des tubes

Tension image de la mesure de la hauteur

Transducteur de consigne de hauteur (potentiomètre manuel)

Comparateur - amplificateur

Tension de commande du distributeur

Consigne manuelle de hauteur

Tension image de la consigne de hauteur

Partie commande

Raccordement au réseau électrique

Distributeur à commande électromagnétique

Rappel : La représentation de la commande du distributeur est ici simplifiée par rapport à la représentation normalisée.

I-6 Fonctionnement du système asservi

Un tel système, ***bouclé*** et ***alimenté en énergie dans la boucle*** (et non par la commande) est dit ***asservi***.

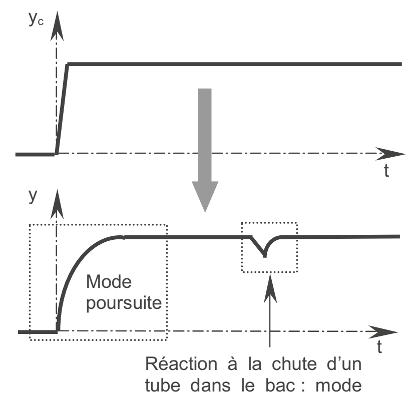
Ici, deux apports énergétiques sont effectués dans la boucle : au niveau de l'amplificateur et, surtout, au niveau de l'alimentation hydraulique.

À tout instant où la hauteur effective des tubes ne serait pas égale à la consigne de hauteur, le comparateur-amplificateur fournit une tension de commande non nulle, positive ou négative, aux bornes de la bobine du distributeur. Ceci provoque son déplacement, dans un sens ou l'autre, afin de piloter la translation de la tige du vérin dans le sens attendu. Lorsque la hauteur correspond à la consigne, les deux signaux d'entrée du comparateur-amplificateur sont identiques, et sa tension de sortie est nulle. Le distributeur n'est donc plus alimenté et revient alors en position neutre. Il ne pilote plus le vérin.

On distingue alors deux modes de fonctionnement d'un système asservi, dont on peut d'ores et déjà retenir les dénominations :

■ **La poursuite :** il s'agit du mode où le système doit faire face à une modification de son entrée. Ici une modification de la hauteur de consigne (en pratique uniquement en phase de réglage initial) amène le système à faire varier en conséquence la hauteur des tubes.

■ **La régulation :** il s'agit du mode où la consigne est maintenue à un niveau constant et où le système doit donc maintenir la sortie au niveau correspondant, lorsque des perturbations ont tendance à le modifier. Ici, en fonctionnement courant, le système fonctionne en régulation, réagissant aux perturbations consécutives à la modification du nombre de tubes dans le bac.



Bon nombre de systèmes asservis peuvent être amenés, comme celui-ci, à fonctionner selon les deux modes, toutefois l'un ou l'autre est souvent privilégié. Ici le comportement de ***régulateur*** (en régulation) est prépondérant. Dans d'autres systèmes ce sera le comportement de ***suiveur*** (en poursuite) qui le sera.

■ **L'exemple du chariot filoguidé**



Dans ce système, la chaîne fonctionnelle qui gère la vitesse de déplacement du chariot doit posséder de bonnes caractéristiques de régulateur : elle doit maintenir la vitesse à une valeur imposée. Il en va de même de la chaîne fonctionnelle qui gère le suivi du fil : elle doit maintenir une distance nulle entre la roue directrice et le fil.

■ **L'exemple de la plate-forme 6 axes**



Dans ce système, les chaînes fonctionnelles des différents vérins électriques doivent posséder de bonnes caractéristiques de suiveurs. En effet, pour faire exécuter un mouvement attendu au plateau supérieur, elles doivent répondre à des consignes de positions variables.

I-7 Modélisation du système asservi

Revenons au système de présentation à hauteur de tubes.

I-7-1 Loi de comportement

Les tensions images de la consigne de hauteur et de la hauteur effective sont proportionnelles respectivement à la consigne de hauteur y_c et à la hauteur effective y, et avec le même coefficient de proportionnalité, afin que la comparaison ait un sens. Soit A ce coefficient.

Si de plus B est le coefficient d'amplification du comparateur-amplificateur, on a alors une tension de commande du distributeur qui s'écrit :
$u = BA\,(y_c - y)$

Le déplacement du tiroir d'un distributeur à commande électromagnétique étant proportionnelle à sa tension de commande, on a donc, si on appelle C le coefficient de proportionnalité, un déplacement donné par :
$x = CBA\,(y_c - y)$

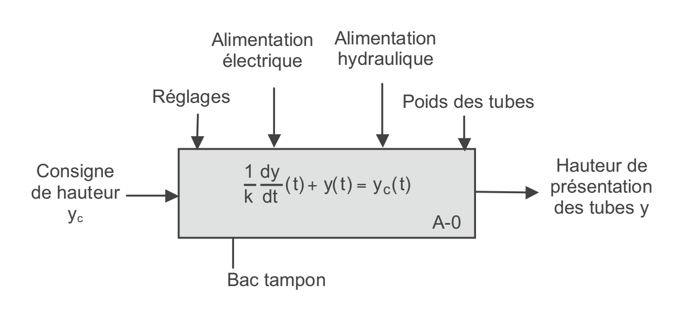
Les coefficients A, B et C sont appelés ***gains*** des systèmes à comportement proportionnel qu'ils caractérisent.

Reprenant l'équation de comportement de l'ensemble distributeur-vérin établie précédemment (I-4), il vient donc :

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{K}{S}x(t) = \frac{K}{S}CBA\,[y_c(t) - y(t)]$$

D'où, en notant KCBA/S = k, l'équation différentielle du premier ordre caractérisant le comportement du système asservi :

$$\boxed{\frac{1}{k}\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = y_c(t)}$$

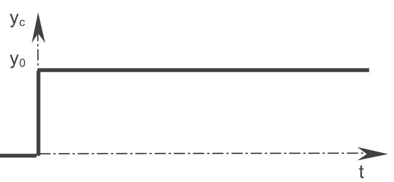


I-7-2 Comportement en poursuite

Le comportement en poursuite du système s'obtiendra alors par résolution de l'équation différentielle avec un second membre correspondant à la fonction d'évolution temporelle de la consigne. À titre d'exemple, on peut traiter le cas simple où la consigne passerait instantanément de la valeur zéro à une valeur ensuite maintenue constante y_0, la hauteur y étant nulle à l'instant initial :

$y_c = 0$ si $t < 0$

$y_c = y_0$ si $t \geq 0$



Une telle consigne est appelée ***consigne en échelon***. Elle est bien sûr idéalisée, puisqu'un changement instantané est physiquement impossible. On cherche y(t) pour $t \geq 0$ avec pour condition initiale y(0) = 0.

 Fiche ressource "équations différentielles linéaires à coefficients constants"

La solution de l'équation sans second membre $\frac{1}{k}\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = 0$ est classiquement de la forme :

$y(t) = \lambda\, e^{-kt}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre $\frac{1}{k}\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = y_0$ est $y(t) = y_0$

La solution est donc de la forme $y(t) = \lambda\, e^{-kt} + y_0$, où, compte tenu de la condition initiale y(0)=0, il est clair qu'il faut que $\lambda = -y_0$.

D'où l'évolution temporelle de la hauteur des tubes :

$$y(t) = y_0\,[1 - e^{-kt}]$$

qui tend bien vers la valeur de consigne, théoriquement au bout d'un temps infini, mais en pratique, raisonnablement au bout d'un temps fini dépendant de la constante k et donc des caractéristiques A, B, C, K et S des différents composants.

I-7-3 Comportement en régulation

Le comportement en régulation du système ne peut être établi mathématiquement à ce niveau d'étude, puisque la prise en compte des perturbations est impossible par la modélisation retenue : l'équation différentielle a été établie en acceptant le modèle idéal défini en I-4.

Mais il est ***fondamental*** d'avoir bien compris que, même sans connaître les lois qui régissent le comportement vis-à-vis des différentes perturbations, la conception d'un système asservi permet de leur résister. Ceci, toutefois, sous certaines réserves qui seront développées ultérieurement. Chacun appréciera l'intérêt de cette propriété, face à l'immense complexité des systèmes scientifiques et industriels dans l'environnement desquels travaille l'ingénieur d'aujourd'hui.

II - SCHÉMA BLOC

II-1 Intérêt et spécificités

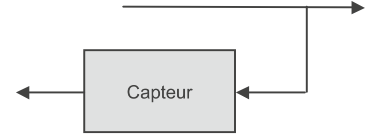
Les schémas fonctionnels qui ont été utilisés précédemment, inspirés de l'analyse descendante par la méthode SADT, s'avéreront vite peu pratiques. Il existe alors un autre outil synoptique, construit dans la même logique de blocs fonctionnels, mais parfaitement adapté aux systèmes asservis : le ***schéma bloc***. Il se différencie des schémas fonctionnels par :

- une meilleure adaptation au graphisme des chaînes de retour ;
- une représentation particulière pour l'élément clé qu'est le comparateur ;
- le fait que dans les blocs, ce ne sont plus les fonctions qui sont indiquées, mais, soit la dénomination du sous-système lui-même, soit l'équation traduisant son comportement ;
- l'absence d'indication des données de contrôle et tout particulièrement les différents ***apports énergétiques***, inutiles du point de vue de l'automaticien.

Rajoutons que la description à venir des systèmes par fonctions de transfert, donnera à ces schémas un intérêt d'ordre algébrique fondamental.

II-2 Boucle de retour

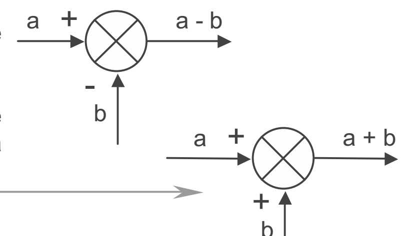
Dans les schémas blocs, le sens des entrées sorties est inversé dans la boucle de retour. Et plus généralement, il n'y a pas de sens imposé, celui-ci étant défini par la structure même du système et souligné par l'existence de flèches.



II-3 Comparateur

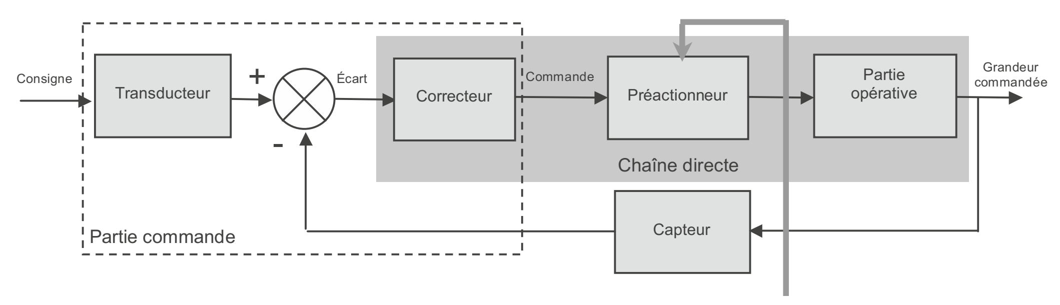
Le ***comparateur*** est souligné dans les schémas blocs par le graphisme particulier ci-contre.

La modification des signes + et – en + et + permet aussi de créer un élément appelé ***sommateur*** qui s'avérera utile par la suite.



II-4 Système asservi

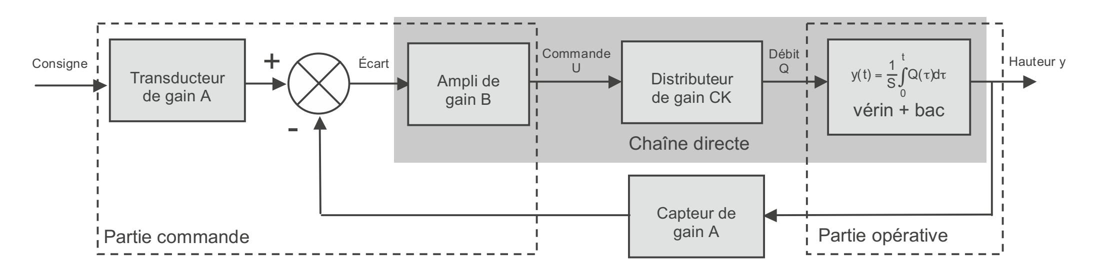
Le schéma bloc de base d'un système asservi (ou d'une chaîne fonctionnelle asservie) sera donc le suivant, assemblant les éléments introduits dans l'exemple précédent. On appelle ***chaîne directe*** l'ensemble des constituants situés entre le comparateur et l'entrée de la boucle de retour.



Remarque 1 : on se souviendra qu' un ***apport énergétique***, existe au niveau du préactionneur, mais qu'il n'est pas indiqué.

Remarque 2 : Si la chaîne de retour permet une comparaison directe de la grandeur commandée, sans capteur, on dit que le système est à ***retour unitaire***.

Exemple du système de présentation à hauteur de tubes :



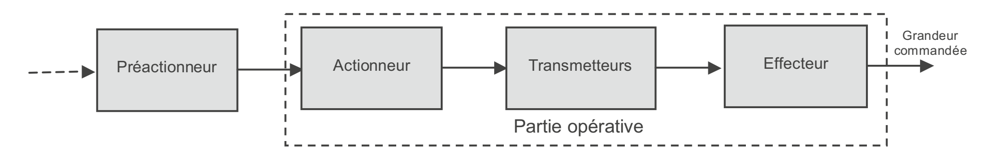
Il est intéressant d'observer la concordance de cette structure avec celle, plus générale, introduite au chapitre 1 et rappelée ci-contre. On y retrouve un préactionneur, qui reçoit les ordres de la PC et, connecté à la source d'énergie, fournit en conséquence cette énergie à la PO. Celle-ci agit sur la matière d'œuvre et envoie en retour des informations à la PC par le capteur.

On se souviendra également (voir chapitre 1, V-2) que la PO peut généralement se décomposer en :

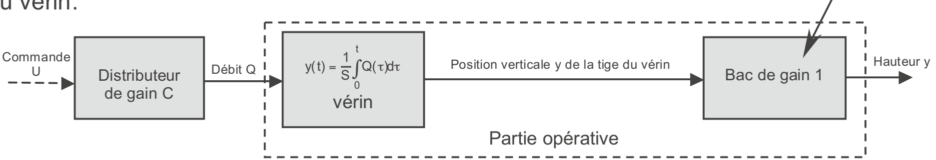
- un ***actionneur*** qui convertit l'énergie fournie par le préactionneur en l'énergie nécessaire pour agir sur la matière d'œuvre ;
- des ***transmetteurs*** qui transmettent cette énergie sans en modifier la nature ;
- un ***effecteur*** qui opère sur la matière d'œuvre.

Actions extérieures
Matière d'œuvre sortante + sorties secondaires
Matière d'œuvre entrante
Partie opérative
ÉNERGIE
Préactionneur
Capteur
Partie commande
Échanges avec l'extérieur (homme, autres parties commandes)

D'où la chaîne plus détaillée de la PO ci-dessous :

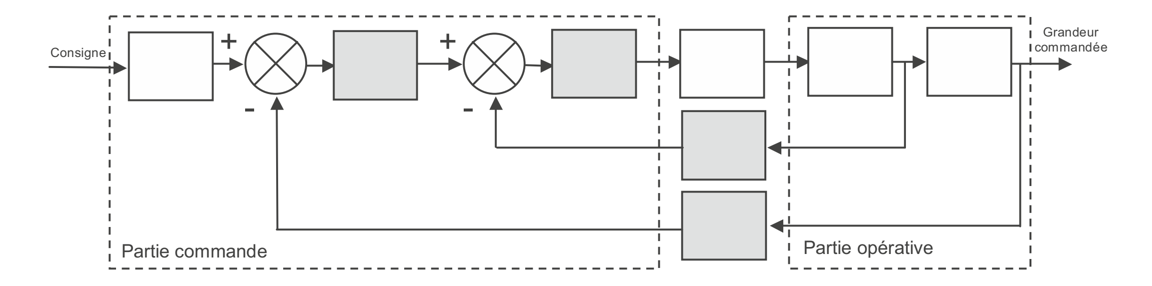


Toujours dans l'exemple du système de présentation à hauteur de tubes, l'actionneur est le vérin, qui convertit l'énergie hydraulique fournie par le distributeur en énergie mécanique. L'effecteur est le bac qui contient les tubes. Il n'y a pas de transmetteurs puisque le bac est directement relié à la tige du vérin.



Dans un autre système, un transmetteur d'énergie mécanique pourrait par exemple être un système de bielles, un système poulies-courroie, un train d'engrenages, etc.

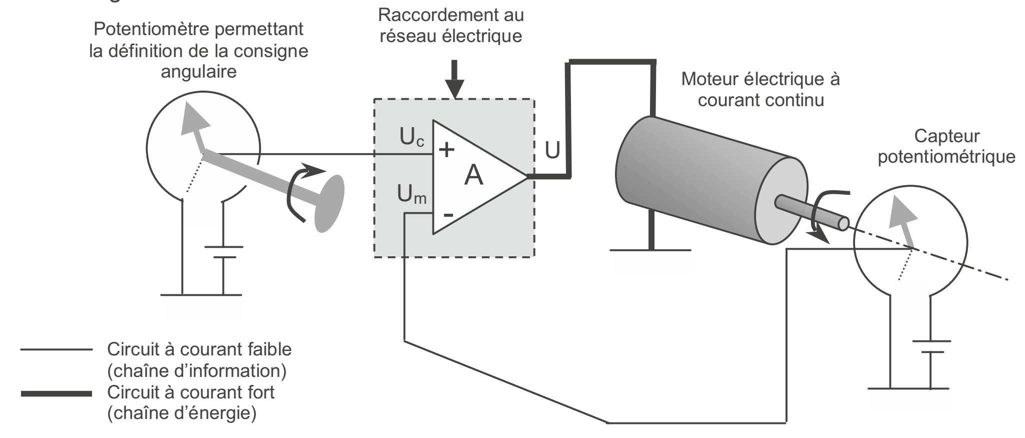
■ Cette complexité de la partie opérative peut être mise à profit pour venir capter diverses informations renvoyées en retour à la partie commande, comportant alors autant de comparateurs et de correcteurs :



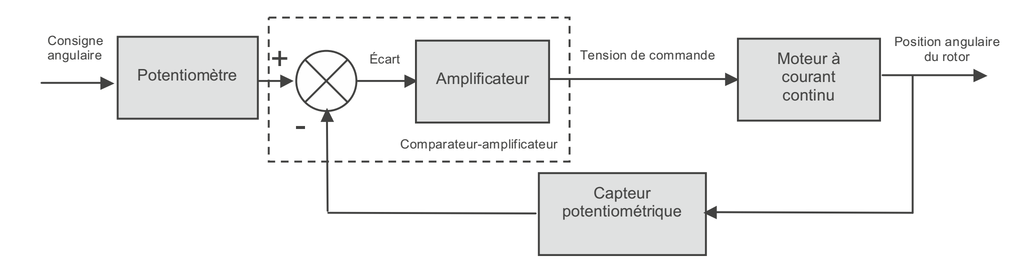
III - ASSERVISSEMENTS ÉLECTROMÉCANIQUES

III-1 Asservissement électrique de position angulaire

Un asservissement de position angulaire peut être obtenu à l'aide d'un moteur électrique à courant continu, au rotor duquel est directement accouplé le système à positionner. Un potentiomètre permet à l'utilisateur de définir la consigne de position angulaire du rotor, celle-ci étant mesurée par un capteur d'angle, strictement égal au potentiomètre lui-même (même gain C). Un comparateur-amplificateur de gain A compare la différence des tensions U_c et U_m issues du potentiomètre et du capteur, et amplifie l'écart afin de commander le moteur. Ainsi la tension d'alimentation $U=A(U_c-U_m)$ du moteur n'est nulle, et donc son rotor immobile, que si sa position angulaire est strictement égale à la consigne.



La structure de cette chaîne asservie est donc la suivante :



Cette chaîne ne fait pas apparaître explicitement de ***préactionneur***, puisque la tension d'alimentation du moteur est directement fournie par le comparateur-amplificateur. Celui-ci ***réalise donc également cette fonction***.

Il est important néanmoins d'avoir bien compris que l'amplification ne peut se faire sans un apport d'énergie, d'où le raccord de ce composant au réseau électrique. Ceci permet de fournir l'énergie nécessaire au moteur (courant de sortie dit fort, en général quelques ampères sous 12 ou 24 volts pour des moteurs de systèmes industriels courants), via un composant appelé ***hacheur***.

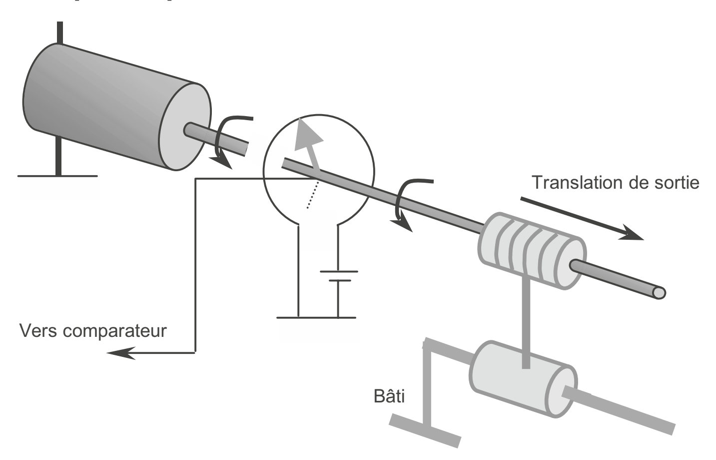
Ce raccord à la source énergétique principale caractérise la fonction de préactionneur. Les potentiomètre et capteur potentiométrique, quant à eux, sont alimentés par des courants faibles (en général quelques milliampères sous quelques volts, souvent 5 V maxi).

Comme il a déjà été signalé à plusieurs reprises, ces différents apports d'énergie ne figurent pas sur le schéma bloc.

III-2 Asservissement électrique de position linéaire

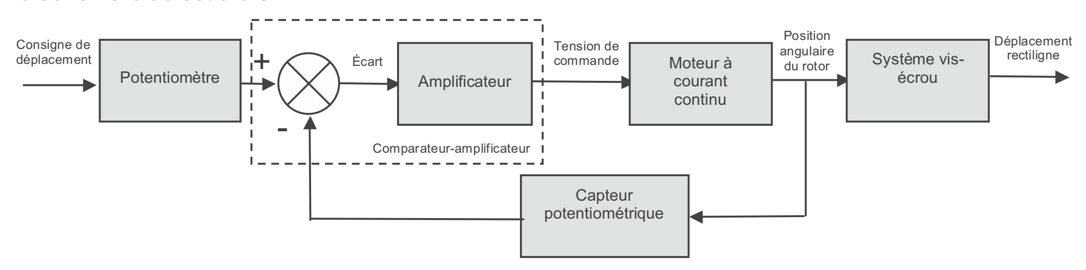
Un tel asservissement peut-être utilisé également pour réaliser un asservissement de position linéaire en accouplant au moteur une transformation de mouvement par un système vis-écrou. Celui-ci est donc un transmetteur.

Pour cela, au rotor est accouplé un arbre fileté, lui-même en liaison hélicoïdale avec l'écrou, solidaire de la pièce de sortie et guidé en translation par rapport au bâti.



La translation de sortie est proportionnelle à la rotation du rotor, le coefficient de proportionnalité étant le pas de la liaison hélicoïdale. Aussi, le signal fourni par le capteur d'angle accouplé au rotor est une image électrique proportionnelle à la position de sortie, donc exploitable par le système.

Le schéma bloc est alors :

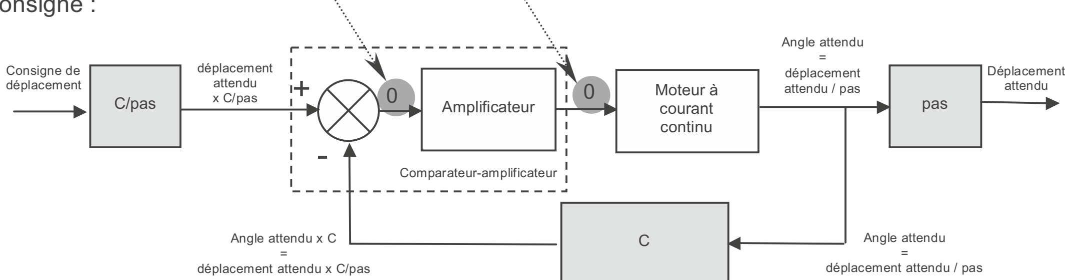


Les caractéristiques du potentiomètre et du capteur devront assurer que l'écart est nul, et donc le moteur arrêté, lorsque le déplacement en sortie égale la consigne. Ainsi, si le capteur possède un gain de C volts par tour, et si le pas (en millimètres par tour) du système vis-écrou est noté « pas », le potentiomètre devra posséder un gain de C/pas volts par millimètre.
En effet :

$$\begin{cases} \text{écart} = [\text{consigne x C/pas}] - [\text{angle x C}] \\ \text{déplacement} = \text{angle x pas} \end{cases}$$

(où l'angle est exprimé en tours)

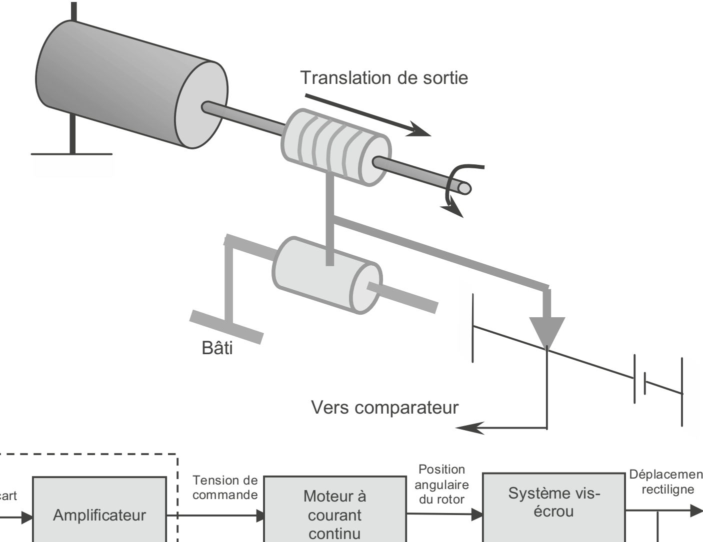
ce qui assure bien un écart nul et donc l'arrêt du moteur lorsque le déplacement est égal à la consigne :



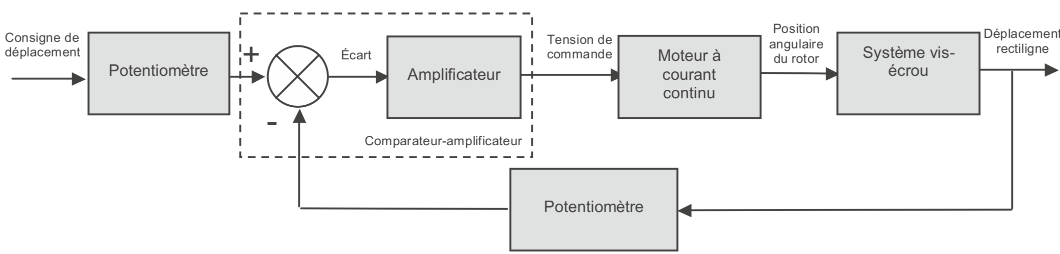
Cette structure possède l'inconvénient d'une mesure effectuée en cours de partie opérative. Si des perturbations agissent sur la partie de la chaîne située en aval de la mesure, celles si se traduisent par des effets dont la partie commande n'est pas informée et qu'elle ne peut donc corriger.

C'est le cas par exemple de jeux ou de déformations qui auraient lieu au niveau du système vis-écrou.

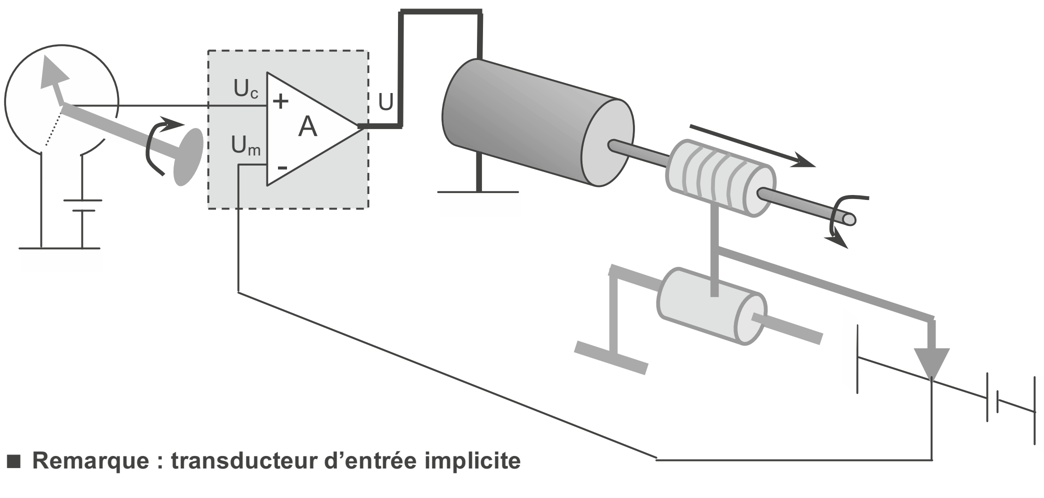
On peut donc améliorer l'asservissement de ce point de vue en remplaçant le capteur d'angle sur le rotor par un capteur linéaire en sortie. Par exemple un potentiomètre linéaire (rhéostat) comme ci-contre.



Le schéma bloc est alors :

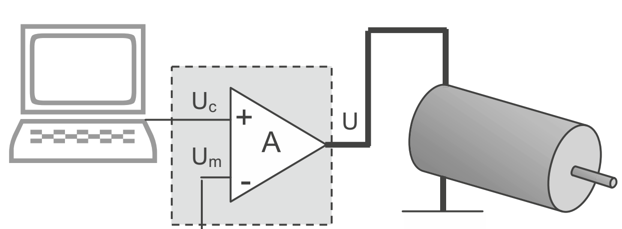


Cette fois, l'adaptation des gains est plus simple puisque les deux potentiomètres doivent avoir des gains tout simplement égaux. Cela n'exige nullement que ces deux potentiomètres soient les mêmes. D'ailleurs il est plus commode de disposer d'un potentiomètre rotatif pour entrer manuellement la consigne de déplacement. Il faudra simplement s'assurer que les graduations sur celui-ci (en millimètres) élaborent un gain (en volts par millimètres) identique à celui du potentiomètre linéaire utilisé comme capteur :

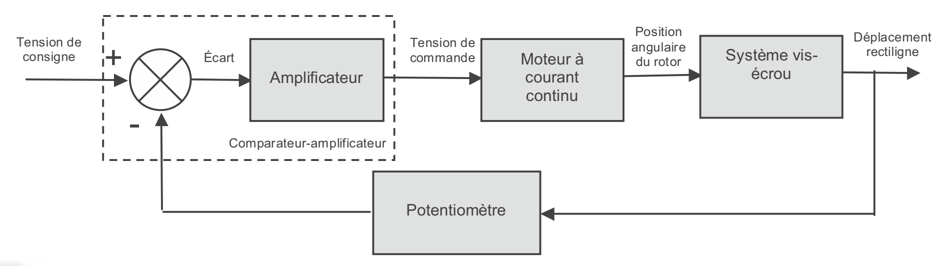


■ Remarque : transducteur d'entrée implicite

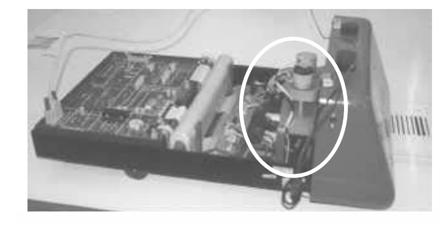
Dans la majorité des systèmes aujourd'hui, la consigne n'est pas fournie par un opérateur manuel, mais via un signal électrique issu d'un ordinateur, d'un automate programmable industriel, ou plus généralement d'une carte de commande.



Le transducteur d'entrée de la chaîne asservie est alors un simple calcul à prendre en compte dans le programme qui élabore la consigne en tension. Cette fonction peut alors être ***implicite*** dans le schéma bloc qui pourra alors seulement être :



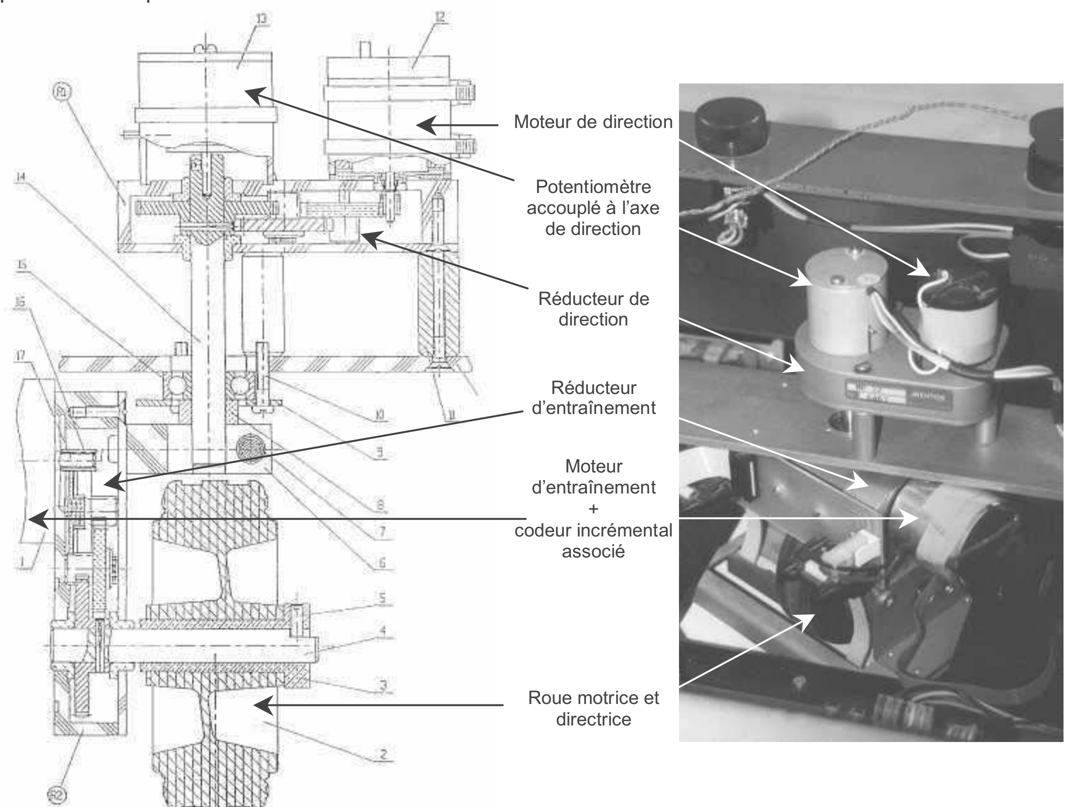
III-3 Partie opérative du chariot filoguidé



Ce chariot, déjà rencontré, est muni d'une unique roue motrice et directrice à l'avant. Les deux roulettes arrière étant uniquement porteuses.

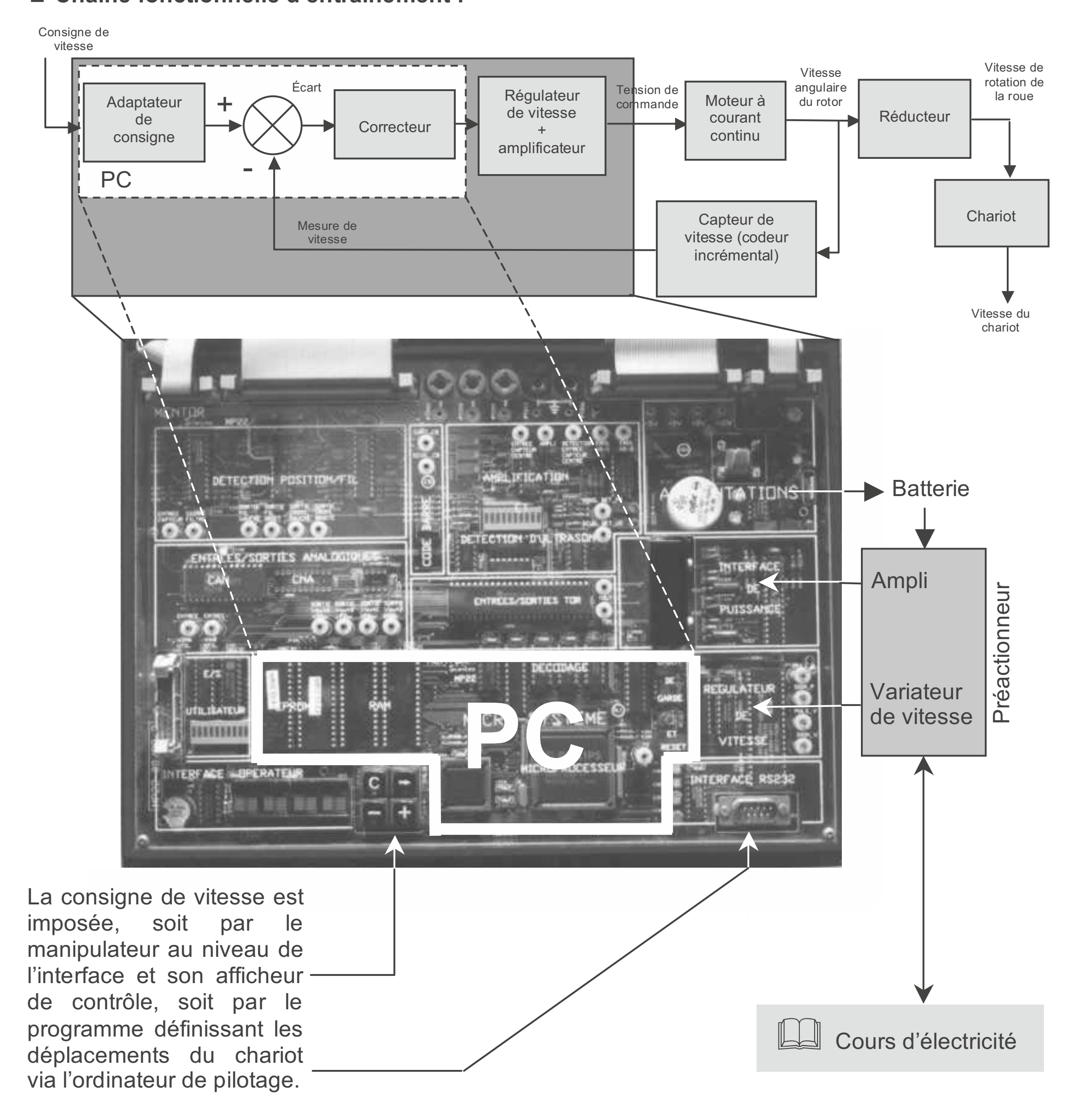
La chaîne fonctionnelle d'entraînement est asservie en vitesse. La consigne est une consigne de vitesse du chariot, fournie par l'opérateur sur le pupitre de commande ou via un programme de déplacements. Elle est liée à la vitesse de rotation de la roue, elle-même proportionnelle à celle du moteur d'entraînement qui est contrôlée par un codeur incrémental.

La chaîne fonctionnelle de direction est asservie en position. La consigne est une consigne d'orientation angulaire de la roue, fournie par la carte de commande à partir de la mesure de l'écart du chariot par rapport au fil. Elle est contrôlée par un capteur de position angulaire potentiométrique.



Ces chaînes se trouvent décrites par les schémas blocs suivants où on reconnaît les structures usuelles de systèmes asservis.

■ **Chaîne fonctionnelle d'entraînement :**



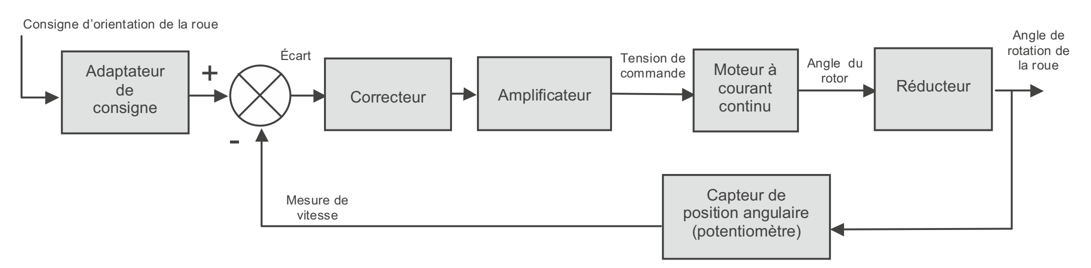
<u>Remarque relative à l'adaptation des gains :</u>

Si le rayon de la roue est R et le rapport de réduction du réducteur 1/r, la relation entre la vitesse du chariot V et la vitesse angulaire ω du rotor du moteur est : $V = R\omega/r$

Si le codeur incrémental accouplé au moteur fournit une mesure proportionnelle à la vitesse angulaire du rotor avec un gain G, la mesure fournie lorsque le chariot est la vitesse V sera donc $G\omega = (Gr/R)V$.

Alors, afin de comparer des grandeurs comparables au niveau du comparateur, l'adaptateur de consigne devra être de gain Gr/R.

■ Chaîne fonctionnelle de direction :

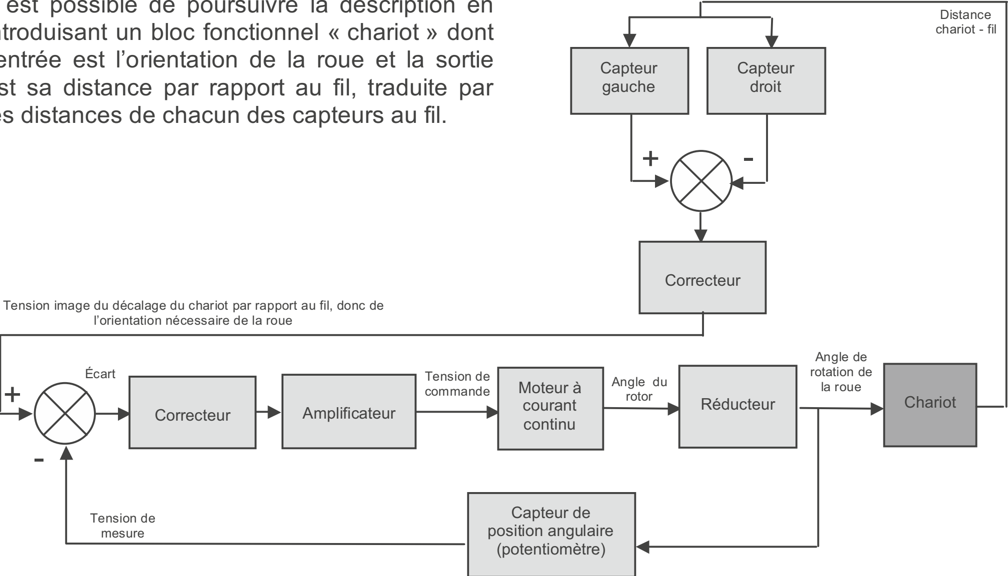


Cette fois, l'adaptation des gains est plus simple puisque le capteur mesure directement l'orientation angulaire de la roue, et non celle du rotor. Le gain de l'adaptateur de consigne et celui du capteur de position angulaire devront alors être tout simplement identiques.

Ici, contrairement à la chaîne d'entraînement, la consigne ne provient ni du manipulateur, ni du programme des déplacements. Elle provient de la mesure de l'écart du chariot par rapport au fil qu'il doit suivre. Cet écart est évalué par deux capteurs à effet Hall situés de part et d'autre de la roue, sensibles au champ magnétique émis par le fil. Chaque capteur émet ainsi une tension, image de sa distance au fil. Il convient alors d'en élaborer la différence, image (positive ou négative) de la distance du chariot par rapport au fil, nulle quand la roue est sur le fil. Cette différence est traduite en une tension, image de la rotation à donner à la roue, par un correcteur qui assure donc également la fonction d'adaptateur de consigne.

Distance chariot - fil
Capteur gauche
Capteur droit
+
-
Correcteur
Tension image du décalage du chariot par rapport au fil, donc de l'orientation nécessaire de la roue
+
-
Écart
Correcteur
PC
Amplificateur
Tension de commande
Moteur à courant continu
Angle du rotor
Réducteur
Angle de rotation de la roue
Capteur de position angulaire (potentiomètre)
Tension de mesure

Il est possible de poursuivre la description en introduisant un bloc fonctionnel « chariot » dont l'entrée est l'orientation de la roue et la sortie est sa distance par rapport au fil, traduite par les distances de chacun des capteurs au fil.



■ **Juxtaposition des deux chaînes**

Puisque que ce bloc « chariot » est le même que celui de la chaîne fonctionnelle d'entraînement, on peut alors fusionner la description des deux chaînes. Le bloc « chariot » possède alors deux entrées : l'orientation de la roue, d'une part, et sa vitesse angulaire, d'autre part ; ainsi que deux sorties : sa distance par rapport au fil d'une part et sa vitesse de déplacement d'autre part.

Distance chariot - fil
Capteur gauche
Capteur droit
+
-
Correcteur
Tension image du décalage du chariot par rapport au fil, donc de l'orientation nécessaire de la roue
Écart
+
-
Correcteur
Amplificateur
Tension de commande
Moteur à courant continu
Angle du rotor
Réducteur
Angle de rotation de la roue
Chariot
Vitesse du chariot
Tension de mesure
Capteur de position angulaire (potentiomètre)
Vitesse de rotation de la roue
Adaptateur de consigne
+
-
Écart
Correcteur
Régulateur de vitesse + amplificateur
Tension de commande
Moteur à courant continu
Vitessea ngulaire du rotor
Réducteur
Consigne de vitesse
Mesure de vitesse
Capteur de vitesse (codeur incrémental)

Ce système fonctionne alors en régulant deux grandeurs :

- la vitesse de déplacement du chariot selon la consigne fixée en entrée,
- la distance du chariot au fil, de consigne implicitement nulle par construction,

dans le but de s'opposer aux perturbations agissant sur le chariot.

IV - NOTION DE PERTURBATION

La notion de perturbation a déjà été introduite à plusieurs reprises. Il a été montré, en particulier, comment un système asservi pouvait lutter contre des perturbations, afin de chercher à maintenir sa sortie au plus près de la valeur commandée. L'objet de ce paragraphe spécifique est, d'une part de les définir plus précisément que cela a pu être fait dans ces premières approches et, d'autre part, d'entrevoir des moyens de traduction de ces perturbations dans les schémas blocs, lorsque leur connaissance est suffisante.

IV-1 Définition

Un système est conçu pour réaliser une fonction qui se traduit par les valeurs prises par sa ou ses sorties (matière d'œuvre sortante). Ceci dépend de diverses entrées, souvent très nombreuses. Parmi ces différentes entrées, on distingue :
- les ***entrées commandées***, sur lesquelles il est possible d'agir afin d'ajuster les sorties ;
- les autres entrées, ***non maîtrisées par la commande du système*** et appelées ***perturbations***.

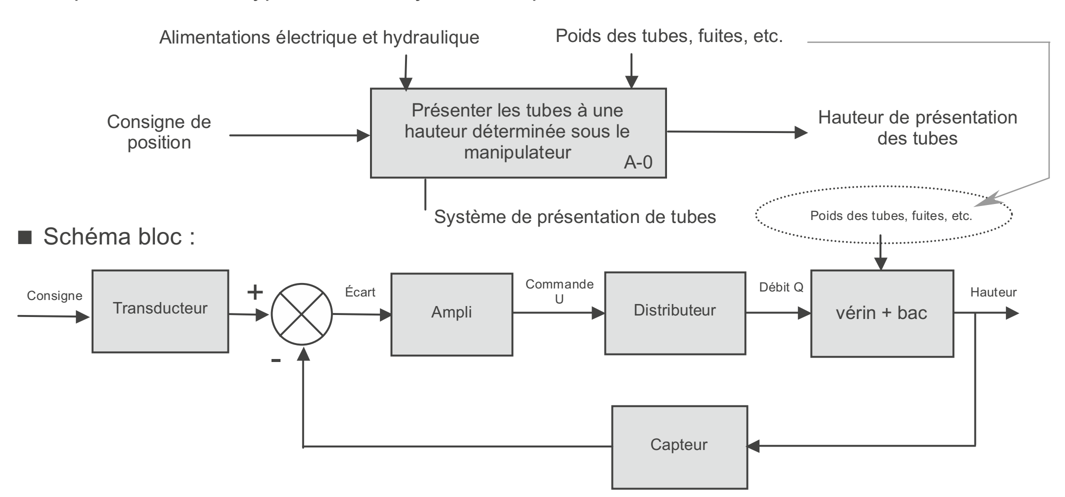
Une perturbation est une entrée non maîtrisée par la commande du système. En d'autres termes elle n'est pas commandée.

IV-2 Traduction sur un schéma bloc

Lors d'une analyse fonctionnelle de type SADT, selon le point de vue de l'automaticien, les entrées commandées sont la matière d'œuvre entrante mais aussi, en données de contrôle, les apports énergétiques et les différents réglages. Les perturbations complètent ces données de contrôles.

Dans un schéma bloc les entrées commandées sont uniquement les consignes. Les apports énergétiques et les réglages ne figurent pas, ils sont exprimés par les différentes lois de comportement des différents blocs. Les perturbations ***peuvent*** être indiquées ***pour mémoire*** par des flèches supplémentaires entrant dans les blocs concernés, souvent par le dessus.

■ Représentation de type SADT du système de présentation à hauteur de tubes :



Les alimentations électriques pour le transducteur, le capteur et l'amplificateur, ainsi que l'alimentation hydraulique qui se fait au niveau du distributeur, ne figurent pas sur le schéma bloc. Le poids des tubes, les fuites, etc. qui agissent sur la hauteur, sans être maîtrisés par la commande, sont des perturbations. On peut les rappeler sur le schéma bloc comme ci-dessus.

La liste des perturbations agissant sur un système est rarement exhaustive. Ici, par exemple, la température agit sur le comportement du capteur, de l'ampli, etc. Et bien d'autres perturbations existent encore, comme l'environnement électromagnétique général, l'âge des composants électriques ou mécaniques. Il n'est jamais réellement possible de tout envisager dans une modélisation. Mais, comme cela a déjà été dit, et c'est une des clés des systèmes asservis, la conception de leur boucle de retour et du correcteur permet bien souvent de corriger l'effet (évalué sur la sortie) de certaines familles de perturbations, sans en connaître avec exactitude la nature. Voir I-7-3.

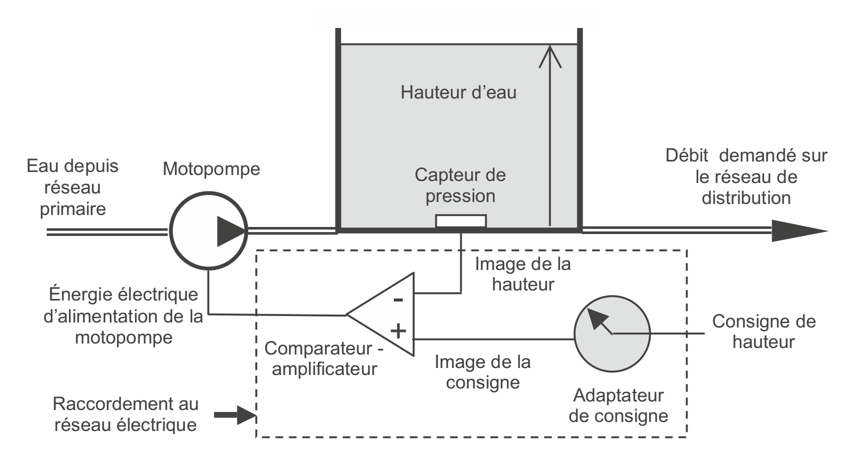
Malgré tout, dans certains cas simples où les modèles sont bien maîtrisés, des perturbations peuvent être introduites dans le schéma bloc à l'aide de ***comparateurs*** ou de ***sommateurs***, ce qui permet une prévision fine du comportement du système face à leur présence.

L'exemple qui suit en est une illustration, en restant dans les technologies hydrauliques.

IV-3 Régulation de niveau d'un château d'eau

Un château d'eau est une réserve ayant pour fonction d'offrir à un réseau de distribution une source d'eau à une certaine pression. Pour cela le niveau de l'eau dans le château, dont dépend la pression dans le réseau, doit être maintenu à une hauteur la plus constante possible, quelle que soit la demande sur le réseau. Dans ce but :

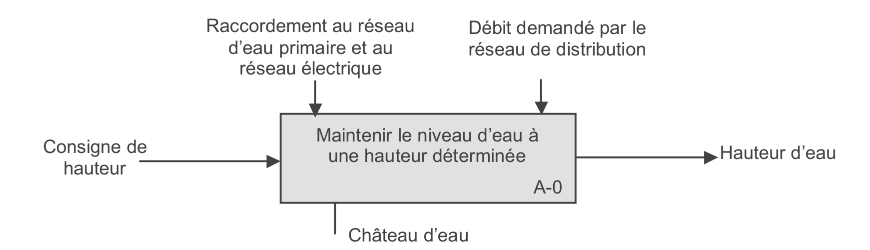
- une motopompe permet de faire monter l'eau dans le réservoir, à partir d'un réseau primaire ;
- le niveau de l'eau peut chuter par la demande sur le réseau ;
- un capteur mesure la hauteur d'eau dans le réservoir ; il peut s'agir d'un capteur de pression situé au fond de la cuve, comme schématisé ci-dessous, mais aussi d'un capteur à flotteur sur le dessus du réservoir, d'un capteur à ultrasons, etc. ;
- la partie commande compare la mesure de la hauteur d'eau à la valeur de consigne et élabore, via un amplificateur (préactionneur relié au réseau électrique), la commande de la motopompe.



Tant que le débit que peut fournir la motopompe est supérieur à celui demandé par le réseau, le niveau peut être ***corrigé***, mais peut-il être maintenu ***exactement*** à la hauteur de consigne ? Une modélisation va permettre de répondre à cette question.

Du point de vue de l'automaticien, la matière d'œuvre entrante de ce système est la consigne de hauteur d'eau dans le réservoir et la matière d'œuvre sortante est la hauteur d'eau effective. De ce point de vue, il s'agit bien d'un transformateur de commande. Mais cette hauteur d'eau effective ne dépend pas que de la consigne : elle dépend également du débit demandé sur le réseau de distribution. Celui-ci constitue donc une seconde entrée, non maîtrisée par la partie commande : c'est une ***perturbation***.

Les raccordements aux réseaux électrique et d'eau primaire sont des données de contrôle. D'où la représentation de type SADT du système en tant que transformateur de commande :



Le schéma bloc est quant à lui le suivant, faisant apparaître le débit demandé en perturbation :

La hauteur d'eau dans le réservoir dépend :

- de la quantité d'eau fournie par la pompe, matière d'œuvre entrante du système réservoir ;
- de sa géométrie, définie dans sa loi de comportement ;
- de la quantité d'eau débitée vers le réseau de distribution (perturbation).

Le comportement du réservoir peut être alors détaillé, puisqu'il s'avère relativement simple d'exprimer la manière dont la perturbation agit. En effet, il est équivalent au système réel d'avoir à l'entrée d'un ***réservoir fictif fermé*** un débit qui serait la ***différence*** entre le débit fourni par la pompe et celui demandé sur le réseau. On peut alors introduire la perturbation sur le schéma bloc par un ***comparateur fictif*** de la manière suivante :

■ Construction d'un modèle mathématique

L'adaptateur et le capteur peuvent être modélisés comme des gains égaux C exprimés en $V.m^{-1}$.
L'amplificateur est un gain A, sans dimension.
Compte tenu du temps de réponse relativement lent du système, et pour simplifier, on peut considérer que la motopompe possède une dynamique suffisamment rapide pour pouvoir considérer que le dépit est proportionnel à la tension d'alimentation.
Soit K cette constante exprimée en $m^3\ s^{-1}\ V^{-1}$.
Ainsi si $h_c(t)$ est la hauteur de consigne et $h(t)$ la hauteur effective à l'instant t, le débit d'eau en sortie de la pompe est à cet instant :
$Q(t) = K.A.C.[h_c(t) - h(t)]$, exprimé en $m^3\ s^{-1}$.

Si la demande sur le réseau est d'un débit Q_{dem} et si le réservoir est cylindrique de section S, la vitesse de montée de l'eau dans le réservoir est :

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{1}{S}[Q(t) - Q_{dem}(t)]$$

Alors, ces deux équations permettent d'établir la loi de comportement du système :

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{1}{S}[KAC(h_c(t) - h(t)) - Q_{dem}(t)]$$

ou encore :

$$h(t) + \frac{S}{KAC}\frac{dh}{dt}(t) = h_c(t) - \frac{1}{KAC}Q_{dem}(t)$$

Cette équation différentielle caractérise le système.

■ **Comportement temporel**

 Fiche ressource "équations différentielles linéaires à coefficients constants"

Lors de la phase de remplissage du château d'eau, le débit vers le réseau est coupé. Le système obéit alors à l'équation différentielle :

$$h(t) + \frac{S}{KAC}\frac{dh}{dt}(t) = h_c(t)$$

À l'instant initial, le niveau dans la cuve est h=0. Alors, obéissant à un échelon de consigne $h_c(t) = h_0$ à partir de cet instant, la hauteur d'eau dans la cuve suit classiquement (voir I-7-2) l'évolution temporelle :

$$h(t) = h_0\,[1 - e^{-\frac{KAC}{S}t}]$$



La hauteur tend donc bien vers la valeur de consigne, théoriquement au bout d'un temps infini, mais en pratique, raisonnablement au bout d'un temps fini. Ceci d'autant plus ***rapidement*** que K, A et C seront grandes et S petite, ce qui correspond à un réservoir de petite section dans lequel se déverse un débit important, ce qui satisfait le sens commun.

Le niveau d'eau ayant atteint le niveau de consigne h_0, une demande d'eau $Q_{dem}(t)$ sur le réseau est autorisée. Supposons, pour simplifier, que cette demande est immédiate et constante à partir d'un nouvel instant pris comme initial et a pour valeur $Q_{dem} = Q_0$. Le système obéit alors à l'équation différentielle :

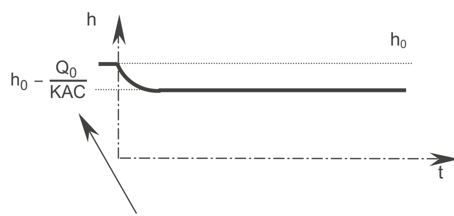
$h(t) + \frac{S}{KAC}\frac{dh}{dt}(t) = h_0 - \frac{Q_0}{KAC}$ avec la nouvelle origine des temps.

La solution est de la forme $h(t) = \lambda\,e^{-\frac{KAC}{S}t} + h_0 - \frac{Q_0}{KAC}$,

où compte tenu de la condition initiale $h(0)=h_0$, il est clair qu'il faut que $\lambda = \frac{Q_0}{KAC}$.

D'où l'évolution temporelle de la hauteur d'eau à partir de la demande $Q_{dem} = Q_0$ sur le réseau :

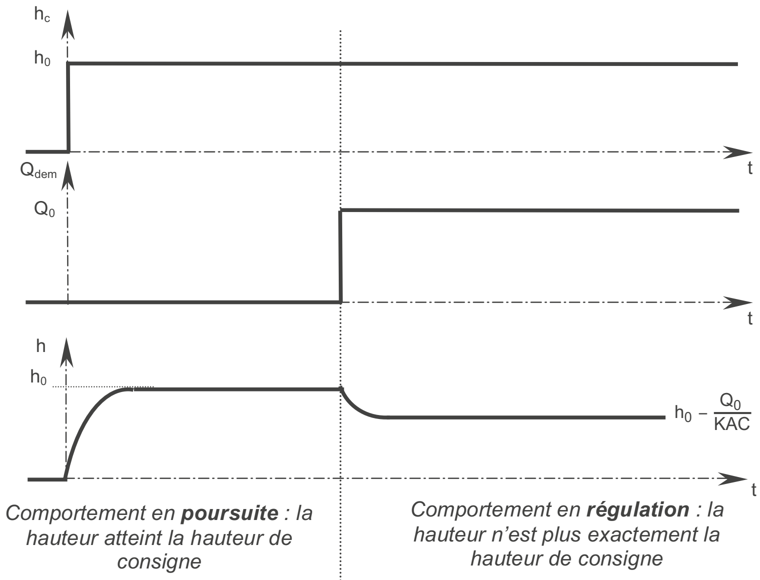
$$h(t) = h_0 - \frac{Q_0}{KAC}[1 - e^{-\frac{KAC}{S}t}]$$



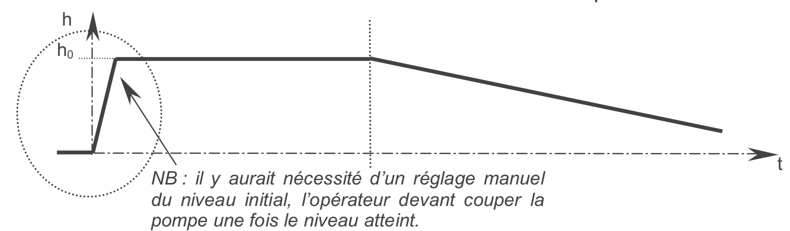
La hauteur tend donc vers un niveau constant, mais qui est inférieur au niveau de consigne. Le système rattrape l'effet de la demande d'eau sur le réseau, ***sans pour autant retrouver son niveau initial***.

Le niveau final sera d'autant plus près du niveau initial que les constantes K, A et C seront grandes. En particulier donc si la pompe est capable de débiter fortement (constante K).

Ces différentes évolutions temporelles peuvent être rassemblées sur le graphe récapitulatif ci-après :



Il va de soi que le caractère asservi du système permet de ***lutter*** contre la perturbation : en effet, en l'absence de boucle de retour (système non automatique), il est clair que l'on aurait une chute constante de la hauteur d'eau dans la cuve sans l'intervention d'un opérateur :



Néanmoins, et peut-être en contradiction avec ce que l'intuition pouvait laisser supposer initialement, ce système asservi, s'il ***lutte*** contre la perturbation, ne permet pas de la compenser ***totalement*** : le niveau dans la cuve ne pourra pas être exactement le niveau de consigne. Il pourra toutefois s'en rapprocher très raisonnablement si le système est conçu avec des constantes K, A, et C suffisantes.

Il convient par ailleurs de bien avoir à l'esprit que ce modèle mathématique ne tient pas compte de toutes les perturbations possibles : fuites, évaporation qui dépend de la température, etc.

■ Amélioration du système

Nous verrons par la suite que le type de correcteur, qui n'est ici qu'un ***simple amplificateur***, est l'élément qui limite la capacité du système à retrouver la hauteur d'eau initiale. Il existe des correcteurs plus sophistiqués qui permettent de répondre parfaitement à ce problème, mais nécessitent des développements mathématiques qu'il conviendra de mettre en place (chapitre 6).

Ainsi, le travail de l'automaticien consiste à concevoir des structures de systèmes asservis (nombre de boucles, grandeurs mesurées, types de correcteurs) et à ajuster les valeurs de constantes caractéristiques afin d'obtenir des ***performances*** attendues pour le système.

Ici, si on conserve la structure proposée et un simple amplificateur de gain A pour le correcteur, le choix des constantes K (motopompe), A (ampli) et dans une moindre mesure C, qui est imposée par la technologie du capteur et le courant de travail de la partie commande, agira sur la rapidité de réaction du système et sa capacité à vaincre l'effet de la perturbation.

V - PERFORMANCES DES SYSTÈMES ASSERVIS

V-1 Premières définitions

Les performances d'un système asservi sont usuellement classées au nombre de trois : la stabilité, la précision et la rapidité. Elles peuvent être succinctement définies de la manière suivante :

■ **Stabilité :**
Un système est dit stable s'il possède une propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre lorsqu'il en est éloigné.

■ **Précision :**
La précision d'un système est son aptitude à présenter une sortie qui tende vers la valeur attendue par sa commande.

■ **Rapidité :**
La rapidité d'un système caractérise sa promptitude de réaction aux variations de ses entrées.

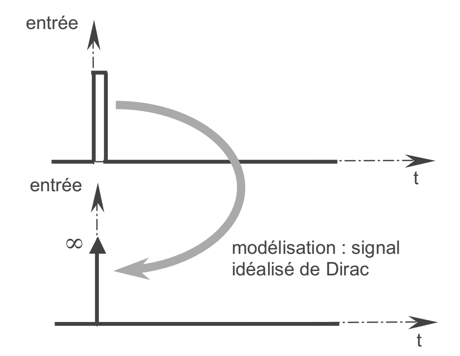
On perçoit toutefois rapidement le caractère trop général de ces définitions. Des définitions plus précises, et surtout exploitables en automatique, nécessitent tout d'abord la définition d'entrées particulières dites canoniques. La définition des performances pourra alors s'opérer à partir de la réponse du système à ces entrées particulières.

V-2 Entrées canoniques

V-2-1 L'entrée impulsionnelle

L'entrée impulsionnelle correspond à un signal très bref, mais d'amplitude suffisante pour produire un effet. Cela correspond par exemple à un choc en mécanique, à un claquement sonore en acoustique, à une décharge en électricité, etc.

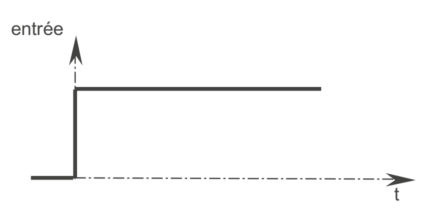
Cette entrée sera mathématiquement modélisée par le signal idéalisé de ***Dirac***, de durée nulle et d'amplitude infinie, qui possède des propriétés fondamentales.



V-2-2 L'entrée en échelon

Une entrée en échelon est une entrée qui passe instantanément (en pratique extrêmement rapidement) d'une valeur constante, généralement zéro, à une autre.

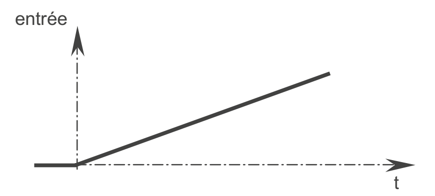
Ce type d'entrée correspond donc à la mise à un certain niveau d'une consigne. Elle a déjà été introduite dans les pages qui précèdent.



V-2-3 L'entrée en rampe

Une entrée en rampe est une entrée qui évolue linéairement avec le temps.

Ce type d'entrée correspond à une commande dynamique, comme par exemple la commande en vitesse d'un mobile à accélération constante.



V-2-4 Relation entre les entrées canoniques

Il est intéressant de noter que les entrées canoniques en rampe, échelon et impulsion idéalisée de Dirac, s'obtiennent par ***dérivations successives***.
La rampe possède une dérivée nulle avant l'instant initial, constante non nulle ensuite, ce qui définit l'échelon. L'échelon possède une dérivée nulle à chaque instant, sauf à l'instant initial où elle est infinie, ce qui définit l'impulsion idéalisée de Dirac. Dans la même logique, on pourrait définir une entrée en parabole dont la dérivée est la rampe, etc. Mais, au-delà de l'entrée en rampe, les intérêts pratiques sont plus rares.

V-2-5 L'entrée sinusoïdale

Cette entrée est très usuelle. Nous reviendrons sur son intérêt ultérieurement (voir chapitre 5), elle ne nous est pas nécessaire pour l'instant.



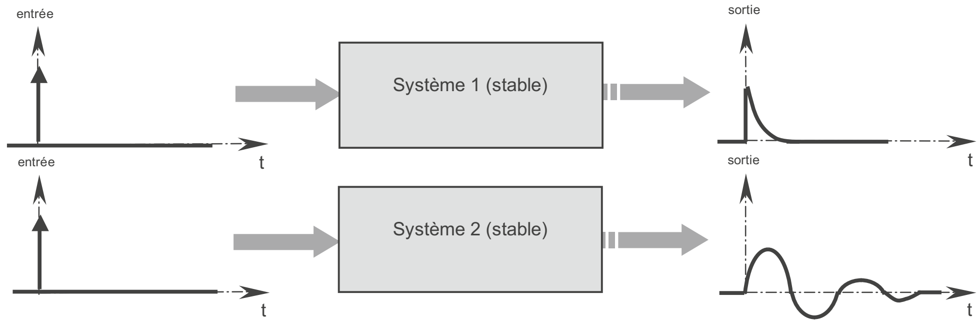
V-3 Stabilité

V-3-1 Stabilité absolue

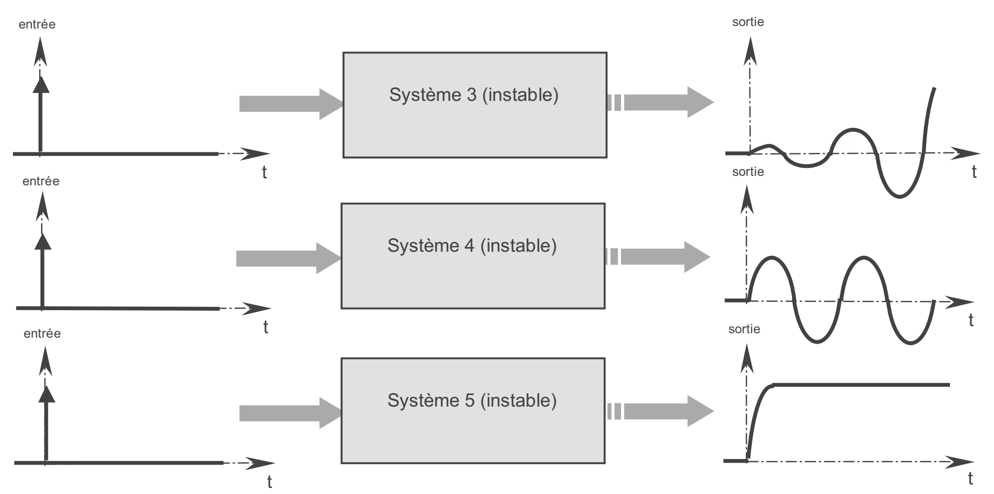
■ Caractérisation à partir d'une entrée impulsionnelle

Un système est stable si sa sortie en réponse à une impulsion de Dirac revient vers son état initial.

- Exemples de comportements ***stables*** :



- Exemples de comportements ***instables***



Avec les deux premiers systèmes, stables, la sortie revient bien vers son état initial, ici nul. Le premier sans oscillations, le second avec.

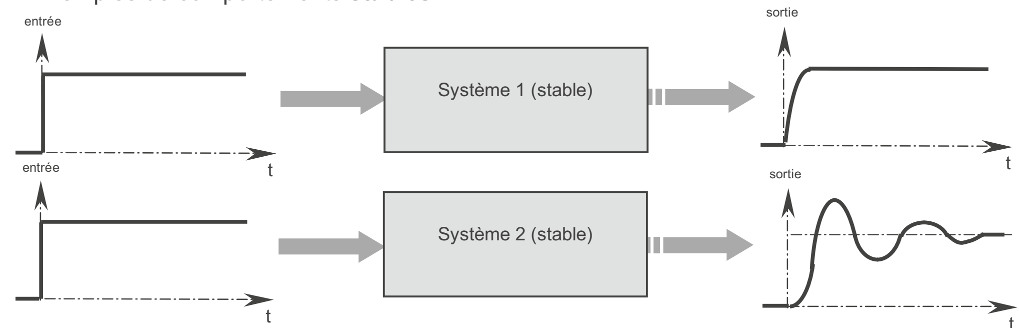
Dans le cas du troisième système, clairement instable, la sortie présente des oscillations divergentes.

Les quatrième et cinquième systèmes présentent des situations limites qui les classent dans les systèmes instables. L'un voit sa sortie se mettre à osciller indéfiniment. L'autre se déplace vers un second état, stationnaire, mais différent de l'état initial.

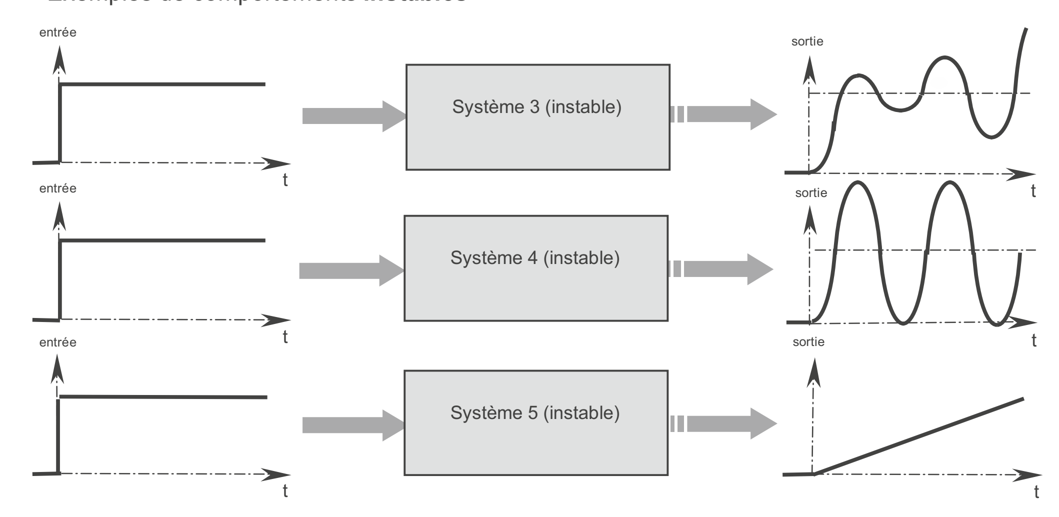
■ Caractérisation à partir d'une entrée en échelon

Un système est stable si sa sortie en réponse à une entrée en échelon tend asymptotiquement vers une valeur finie.

- Exemples de comportements ***stables*** :



- Exemples de comportements ***instables***



Avec les deux premiers systèmes, stables, la sortie tend bien vers une valeur finie. Le premier sans oscillations, le second avec.
Dans le cas du troisième système, clairement instable, la sortie présente des oscillations divergentes.
Les quatrième et cinquième systèmes présentent à nouveau des situations limites qui les classent dans les systèmes instables. L'un voit sa sortie se mettre à osciller indéfiniment autour d'une valeur en rapport avec le niveau de l'échelon d'entrée. L'autre diverge sans osciller.

■ Équivalence des caractérisations

Comme le suggèrent les cinq systèmes présentés en exemples ci-dessus, les deux caractérisations de la stabilité sont équivalentes : un système caractérisé comme stable par sa réponse à une entrée impulsionnelle le sera aussi par sa réponse à une entrée en échelon et inversement. La stabilité d'un système est une propriété qui lui est ***intrinsèque***.

V-3-2 Impératif de stabilité absolue

Hormis dans des situations très particulières, comme la réalisation d'oscillateurs en électronique ou encore dans la chimie des explosifs, ***la stabilité est un impératif de conception***.

Les performances de précision et de rapidité qui vont être ensuite définies n'ont de sens que si la stabilité est vérifiée.

V-3-3 Qualité de la stabilité

La stabilité absolue est indispensable, mais n'exclut pas l'existence d'oscillations. Deux situations peuvent alors se produire :
- ou bien les oscillations peuvent être acceptées, mais alors il convient de caractériser dans quelle mesure elles le sont : combien de temps est-il acceptable que le système oscille avant de se stabiliser ? quelle est l'amplitude maximale autorisée pour les oscillations ? leur fréquence ?
- ou bien aucune oscillation n'est acceptable.

Il apparaît donc qu'un système asservi devra être non seulement stable, mais avec une certaine qualité de la stabilité qu'il conviendra de savoir définir, au-delà de termes généraux tels que « système bien stable », « système peu stable », etc. Ceci sera abordé au chapitre 6.

■ **Remarque**

Dans les exemples introductifs présentés jusqu'ici (I-7 et IV-3), aucune oscillation n'a été mise en évidence. Cela est dû au fait qu'ils se voulaient mathématiquement assez simples. Les systèmes asservis pour lesquels un modèle mathématique a été associé étaient alors régis par des équations différentielles du ***premier ordre***. Nous verrons (chapitre 4) que des oscillations ne peuvent apparaître qu'à partir de l'ordre deux.

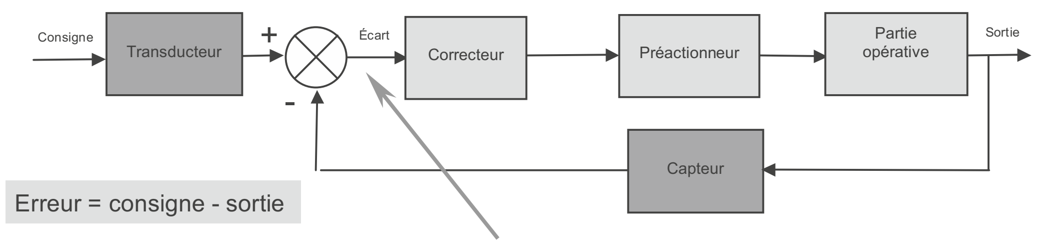
V-4 Précision

On rappelle que la définition de la précision d'un système suppose sa stabilité absolue.

Plusieurs précisions peuvent être définies, selon que l'on raisonne par rapport à une consigne ou à une perturbation, ou encore selon que ces entrées sont constantes ou variables. Par exemple le système de régulation de niveau du château d'eau présenté en IV-3 est précis en réponse à une consigne (comportement en poursuite) mais imprécis face à une perturbation (comportement en régulation).

V-4-1 Erreur et écart

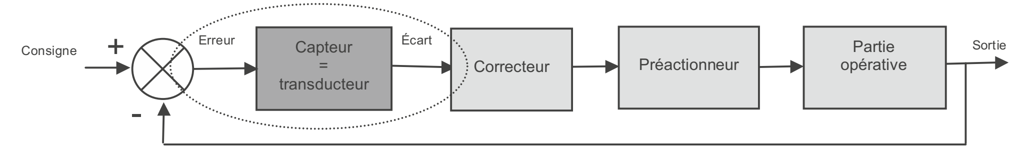
Le cadre de la précision ayant été défini, celle-ci se caractérise en général par le calcul de ***l'erreur*** qui est la différence entre la consigne et la sortie. Bien entendu cela n'a de sens que si consigne et sortie sont de même nature et que l'on attend, a priori, que la sortie tende vers la consigne. C'est généralement le cas des ***systèmes asservis***, par adaptation des gains entre le transducteur, adaptant la consigne, et le capteur, évaluant la sortie.



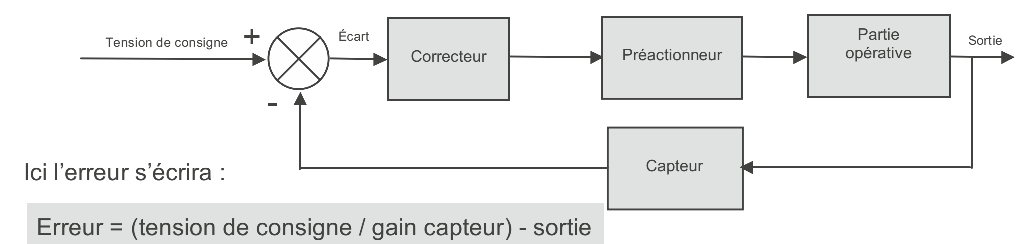
La précision peut alors aussi être définie par ***l'écart***. Par construction, cette grandeur de sortie du comparateur est nécessairement la différence de deux grandeurs de même nature.

Écart = grandeur de sortie du comparateur de la boucle d'asservissement

L'écart traduit la même notion de précision que l'erreur, à laquelle il est lié par la caractéristique du capteur, comme l'illustre le schéma ***équivalent*** à retour unitaire ci-dessous :



■ Attention aux schémas blocs où le transducteur (de gain égal à celui du capteur) est ***implicite*** :



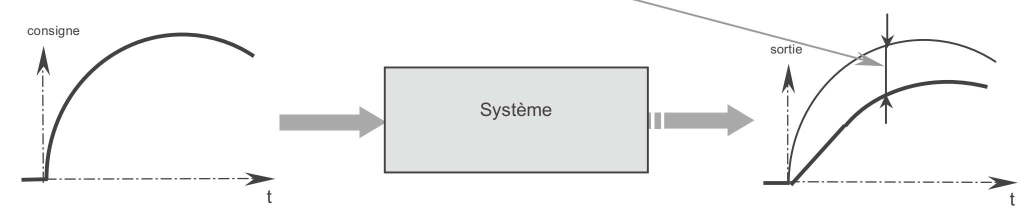
Ici l'erreur s'écrira :

Erreur = (tension de consigne / gain capteur) - sortie

Et non pas la différence entre la tension de consigne et la sortie, ce qui n'a aucun sens, d'autant plus que bien souvent ces grandeurs ne sont pas homogènes. Dans ce cas, il vaut mieux raisonner sur ***l'écart***.

V-4-2 Précision statique et précision dynamique

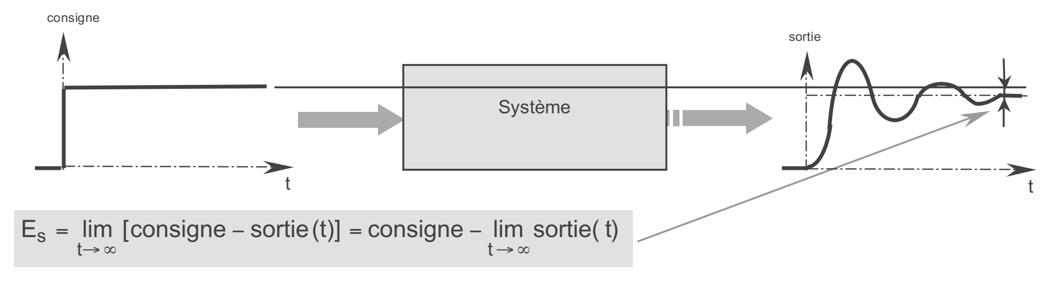
Une entrée étant définie, la ***précision dynamique*** se caractérise par la loi donnant l'erreur au cours du temps. Elle est utilisée pour certaines entrées fortement variables, comme par exemple des suivis de trajectoire d'un radar, d'une machine outil ou d'un robot. On cherchera alors à déterminer la valeur maximale de l'erreur, si elle existe.



La ***précision statique***, quant à elle, se détermine par la limite, si elle existe, atteinte par l'erreur au cours du temps.

V-4-3 Précision statique de position

Cette précision est la performance la plus couramment spécifiée. Elle se caractérise par ***l'erreur statique de position*** E_S, qui est la limite de cette grandeur lorsque l'entrée est un échelon.



$$E_S = \lim_{t\to\infty} [\text{consigne} - \text{sortie}(t)] = \text{consigne} - \lim_{t\to\infty} \text{sortie}(t)$$

Il s'agit d'une grandeur algébrique, positive si la valeur de la sortie atteint une valeur asymptotique inférieure à la valeur attendue.

Cette erreur dépendant du niveau de l'échelon, il est usuel de l'exprimer de manière ***relative*** par rapport à la consigne :

$$E_{s\%} = \frac{\text{consigne} - \lim_{t\to\infty} \text{sortie}(t)}{\text{consigne}} = 1 - \frac{\lim_{t\to\infty} \text{sortie}(t)}{\text{consigne}}, \text{ exprimée en } \%.$$

■ Écart statique de position

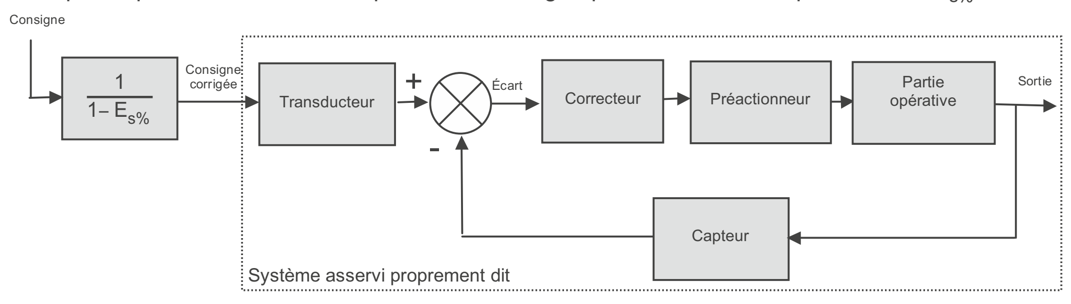
Si on raisonne par rapport à l'écart, et de manière relative, on définit alors l'écart statique de position relatif par :

$$\varepsilon_{s\%} = 1 - \frac{\lim_{t\to\infty} \text{mesure}(t)}{\text{tension de consigne}}$$

Il est ***strictement identique*** à l'erreur statique de position relative, puisque la mesure et la tension de consigne sont constamment proportionnelles à la sortie et à la consigne, et dans le même rapport.

■ Correction d'erreur par adaptation du transducteur

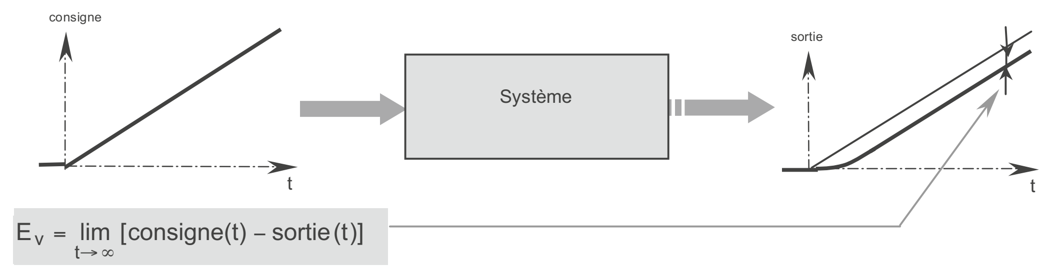
Si un système asservi est imprécis, avec une erreur statique relative de position $E_{s\%}$, il peut être rendu précis par correction de l'adaptateur de consigne par un facteur multiplicatif $1/1 - E_{s\%}$:



Mais il convient alors d'avoir bien compris que le système asservi en tant que tel (dont l'entrée est maintenant la consigne corrigée) demeure ***imprécis***. Comme souligné précédemment, lorsque le transducteur d'entrée est implicite il ne faut pas se tromper d'entrée pour déterminer l'erreur du système asservi.
Encore une fois, un ***raisonnement sur l'écart*** (inchangé puisque dans la boucle) permet d'éviter le risque de confusion.

V-4-4 Précision statique de traînage

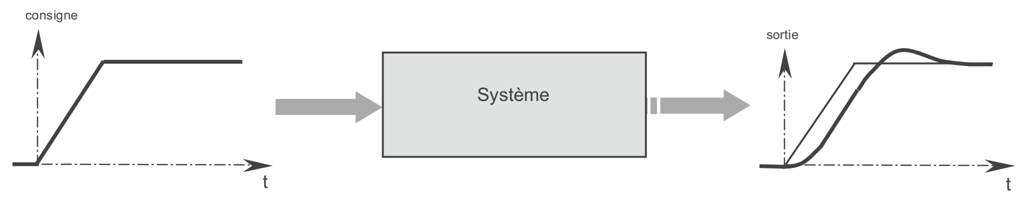
Elle est appelée aussi précision statique de vitesse dans le contexte de la mécanique. Elle se caractérise par ***l'erreur statique de traînage*** E_V qui est la limite, lorsqu'elle existe, de cette grandeur lorsque l'entrée est une rampe.



$$E_V = \lim_{t\to\infty} [\text{consigne}(t) - \text{sortie}(t)]$$

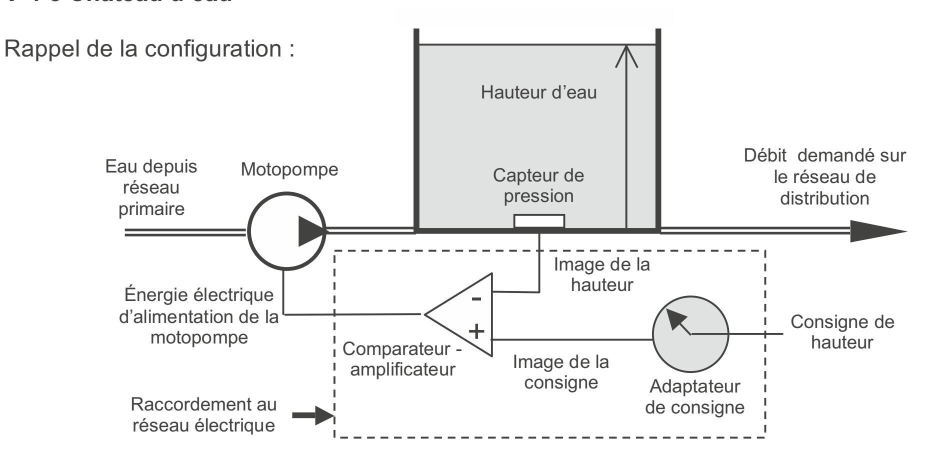
Une définition analogue peut être donnée pour définir ***l'écart*** statique de traînage.

■ Attention : Un système peut très bien présenter une erreur statique de position nulle associée à une erreur statique de traînage non nulle :

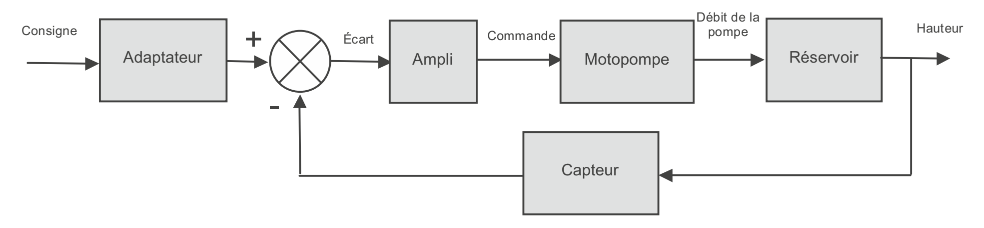


V-4-5 Château d'eau

Rappel de la configuration :



Lors du remplissage du réservoir, le débit vers le réseau est coupé. Le fonctionnement se représente alors par le schéma bloc sans perturbation suivant (voir IV-3) :

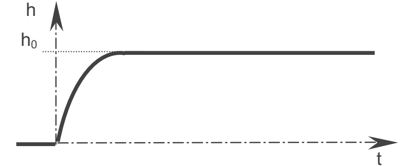


Il a été établi que le système est dans ce cas régi par l'équation différentielle :

$$h(t)+\frac{S}{KAC}\frac{dh}{dt}(t)=h_c(t)$$

■ Si, à l'instant initial, le niveau dans la cuve est h=0, obéissant à un échelon de consigne $h_c(t)=h_0$ à partir de cet instant, la hauteur d'eau dans la cuve suit alors l'évolution temporelle :

$$h(t)=h_0\,[1-e^{-\frac{KAC}{S}t}]$$



Alors, clairement, l'erreur statique de position est nulle :

$$E_s=\lim_{t\to\infty}[h_0-h(t)]=h_0-\lim_{t\to\infty}h(t)=h_0-h_0=0$$

Le système est ***précis en réponse à un échelon***.

■ Si on adopte une autre stratégie de remplissage, moins brutale, avec une commande en rampe $h_c(t)=at$, imposant une vitesse de montée de valeur a à partir de l'instant initial, la hauteur de la cuve doit obéir à :

$$h(t)+\frac{S}{KAC}\frac{dh}{dt}(t)=at$$



Fiche ressource "équations différentielles linéaires à coefficients constants"

La solution de l'équation sans second membre est toujours la même : $h(t) = \lambda e^{-\frac{KAC}{S}t}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est : $h(t) = a(t - \frac{S}{KAC})$

La solution générale de l'équation sera donc de la forme : $h(t) = \lambda e^{-\frac{KAC}{S}t} + a(t - \frac{S}{KAC})$

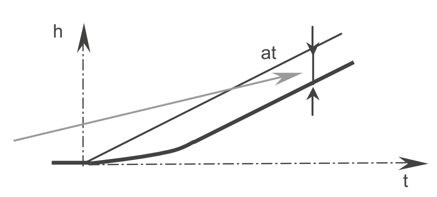
Avec $\lambda = \frac{aS}{KAC}$ pour satisfaire la condition initiale h(0)=0.

D'où l'évolution temporelle de la hauteur pour une sollicitation en rampe :

$$h(t) = \frac{aS}{KAC}[e^{-\frac{KAC}{S}t} - 1] + at$$

Alors l'erreur statique de traînage est :

$$E_v = \lim_{t\to\infty}[at - h(t)] = \lim_{t\to\infty}[at - \frac{aS}{KAC}[e^{-\frac{KAC}{S}t} - 1] - at] = \boxed{\frac{aS}{KAC}}$$

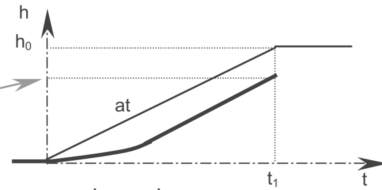


Cette erreur n'est pas nulle et proportionnelle à la vitesse de consigne a. Le système est ***imprécis en réponse à une rampe***. Mais il sera d'autant moins imprécis que les constantes K, A et C seront grandes.

NB : Il est intéressant de noter que la recherche de la précision en rampe et la recherche de la précision face à la perturbation (voir IV-3) aboutissent à des solutions convergentes : augmenter les constantes K, A et C.

■ La consigne a atteint le niveau h_0 à l'instant $t_1=h_0/a$.
Au même instant la hauteur dans la cuve est :

$$h(t_1) = \frac{aS}{KAC}[e^{-\frac{KAC}{S}\frac{h_0}{a}} - 1] + h_0 \approx h_0 - \frac{aS}{KAC}$$



À cet instant, la rampe est interrompue et la consigne est maintenue au niveau h_0.

Alors, le système obéit donc toujours à l'équation différentielle :

$$h(t) + \frac{S}{KAC}\frac{dh}{dt}(t) = h_0$$

mais avec pour condition initiale $h(0) = h(t_1) = \frac{aS}{KAC}[e^{-\frac{KAC}{S}\frac{h_0}{a}} - 1] + h_0 \approx h_0 - \frac{aS}{KAC}$

ceci en faisant un changement de variable sur le temps, pour prendre comme nouvel instant initial l'instant où la rampe a atteint la valeur de consigne.

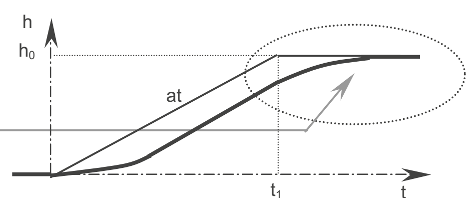
Alors la solution générale de l'équation est de la forme : $h(t) = \lambda e^{-\frac{KAC}{S}t} + h_0$

Avec, pour satisfaire la condition initiale : $\lambda = h(t_1) - h_0$.

D'où l'évolution temporelle de la hauteur, à partir de l'instant où la rampe est interrompue et en prenant cet instant comme nouvel instant initial :

$$h(t) = [h(t_1) - h_0]e^{-\frac{KAC}{S}t} + h_0$$

$$= \underbrace{\frac{aS}{KAC}[e^{-\frac{KAC}{S}\frac{h_0}{a}} - 1]}_{\text{constante}}e^{-\frac{KAC}{S}t} + h_0$$



La limite de cette évolution est bien la hauteur de consigne h_0, ce qui était prévisible compte tenu de ***la précision statique en échelon*** du système.

V-4-6 Simplification de langage

Les erreurs statiques de position et de traînage seront appelées, lorsque aucune ambiguïté n'en découlera, erreurs de position et de traînage, le qualificatif statique étant alors « implicite ».

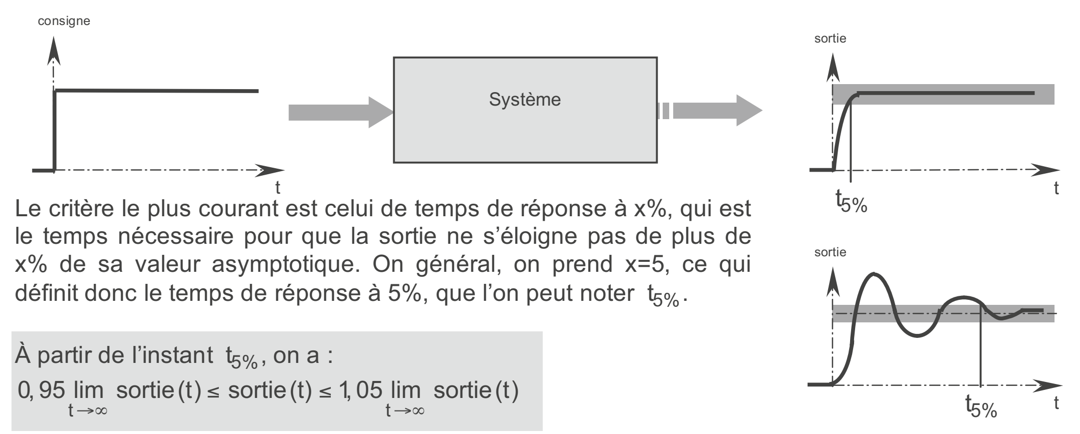


V-5 Rapidité

On rappelle que la définition de la rapidité d'un système suppose sa stabilité absolue.

Elle se définit à partir de la réponse à une entrée en ***échelon***. Mais, la stabilité reposant sur une convergence asymptotique, la valeur n'est donc généralement atteinte qu'au bout d'un temps infini. Ceci rend impossible de caractériser tout simplement la rapidité d'un système par le temps nécessaire pour répondre à la consigne. D'où l'existence de plusieurs critères diversement utilisés.

V-5-1 Temps de réponse à 5%



Le critère le plus courant est celui de temps de réponse à x%, qui est le temps nécessaire pour que la sortie ne s'éloigne pas de plus de x% de sa valeur asymptotique. On général, on prend x=5, ce qui définit donc le temps de réponse à 5%, que l'on peut noter $t_{5\%}$.

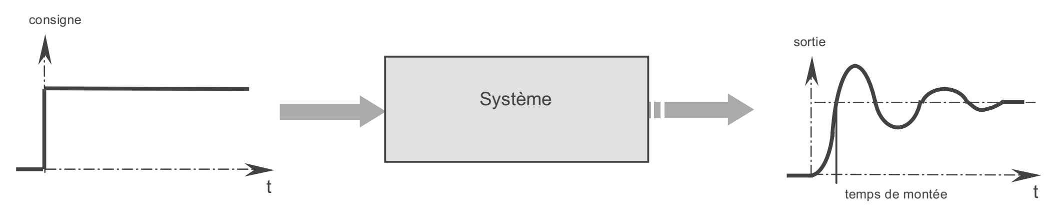
À partir de l'instant $t_{5\%}$, on a :
$$0,95 \lim_{t\to\infty} \text{sortie}(t) \leq \text{sortie}(t) \leq 1,05 \lim_{t\to\infty} \text{sortie}(t)$$

Attention : on notera bien que l'on compare la sortie à ±5% de sa valeur asymptotique, et non pas à ±5% de l'entrée.

Cette notion n'est pas tout à fait satisfaisante dans le cas de systèmes présentant des oscillations. En effet, selon le choix de prendre pour critère un temps de réponse à 5 ou à 3% par exemple, la conclusion quant à la rapidité relative de deux systèmes peut changer. D'autres critères s'imposent alors.

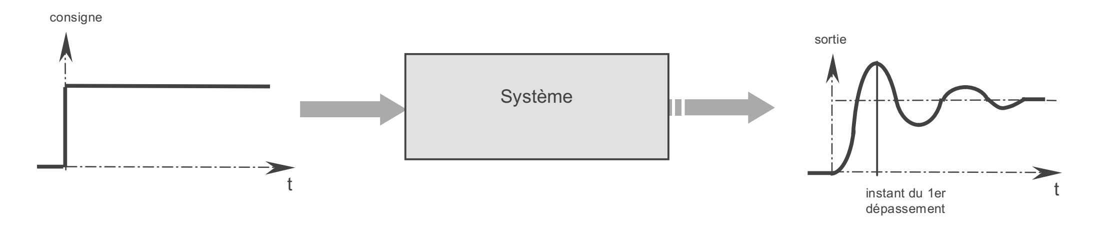
V-5-2 Autres critères

■ Dans le cas des systèmes présentant des oscillations, la rapidité peut aussi être caractérisée par l'instant où la valeur de la sortie atteint pour la première fois sa valeur asymptotique. Cet instant est couramment appelé « temps de montée ».



■ Un autre critère parfois utilisé (et aussi hélas appelé « temps de montée »…) est le temps nécessaire pour que la sortie passe de 10 à 90% de sa valeur asymptotique.

■ On rencontre aussi comme critère de rapidité l'instant du premier dépassement :



■ Il faut donc avoir conscience de la grande diversité des critères permettant de caractériser la rapidité d'un système. Ces différents critères sont souvent issus de différents « métiers » ayant leur histoire et des dénominations propres auxquelles il faut savoir s'adapter.

En conclusion, la caractérisation de la rapidité d'un système doit toujours être associée à la définition précise du critère retenu.

V-5-3 Bande passante

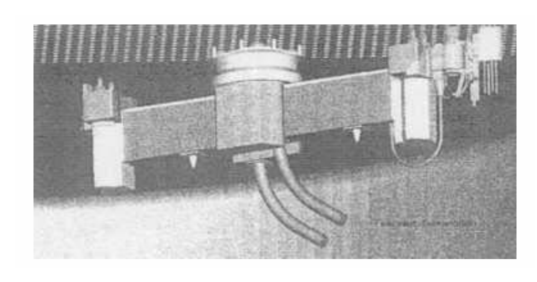
Cette notion, qui sera définie ultérieurement (chapitre 5), repose sur la réponse du système à une consigne ***sinusoïdale***. Elle permettra également de caractériser la rapidité du système.

EXERCICES



I - SYSTÈME DE CONTRÔLE D'UN GÉNÉRATEUR DE CENTRALE

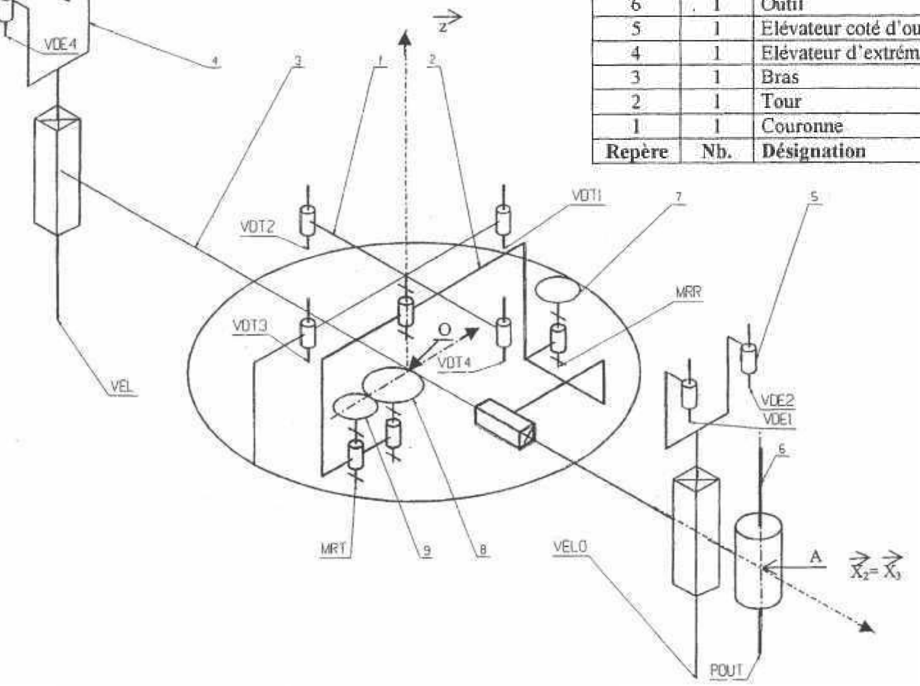
D'après une épreuve du concours ESIM MP & PSI.



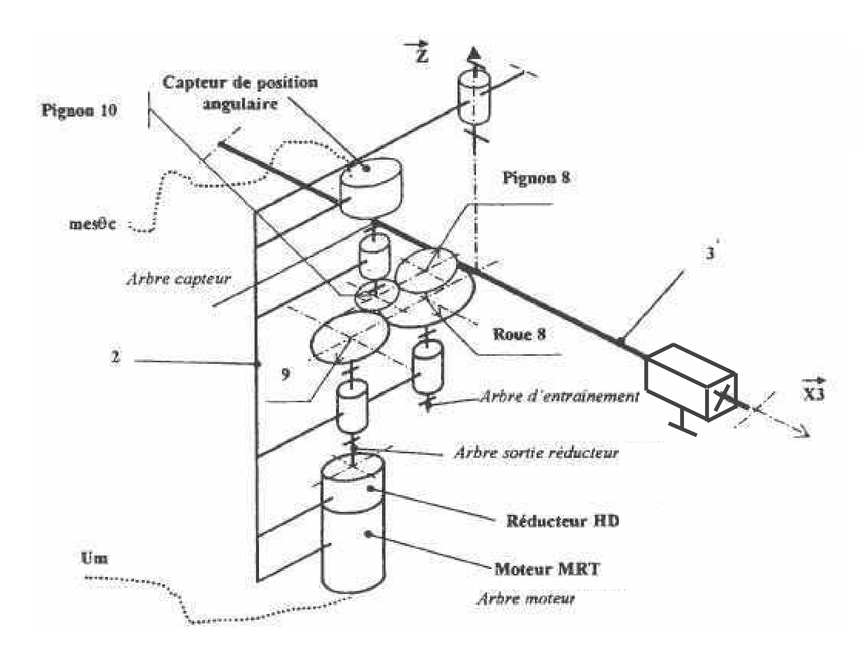
I-1 Présentation

L'ensemble mécanique étudié est représenté schématiquement ci-dessous. Il permet le déplacement d'un bras de contrôle **3** positionnant un outil **6** devant des tubes d'un générateur de vapeur de centrale nucléaire. L'ensemble est agrippé sur le générateur par des doigts commandés par les vérins VDT ou VDE selon les phases de fonctionnement. Deux moteurs actionnent l'ensemble : MRR et MRT, donnant deux mobilités au bras **3** par rapport au générateur.

Repère	Nb.	Désignation
VDTi	4	Vérins de doigts de tourelle
VDEi	4	Vérins de doigts d'élévateurs
VEL	1	Vérin élévateur
VELO	1	Vérin élévateur d'outil
POUT	1	Porte outil
MRR	1	Motoréducteur de rotation
MRT	1	Motoréducteur de translation
9	1	Pignon moteur de translation
8	1	Pignon intermédiaire
7	1	Pignon moteur de rotation
6	1	Outil
5	1	Elévateur coté d'outil
4	1	Elévateur d'extrémité
3	1	Bras
2	1	Tour
1	1	Couronne



On s'intéresse à la commande de position du bras **3** par rapport à la tour **2**, commandée par le moteur MRT. La chaîne cinématique de commande de ce mouvement de translation rectiligne de direction $\vec{x}_3$ est plus précisément représentée sur la figure suivante :



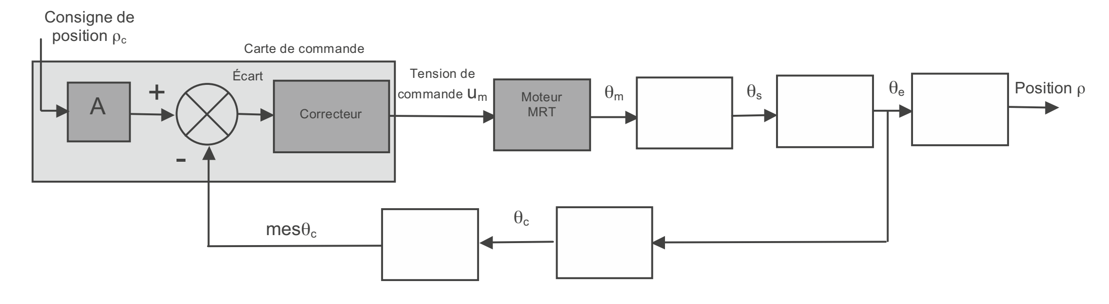
Le moteur MRT, dont la position angulaire du rotor est repérée par un angle θ_m exprimé en rad, est accouplé à un réducteur-inverseur HD de rapport r_R = - 1/100. Le pignon **9** de rayon primitif R_9 est encastré sur l'arbre de sortie du réducteur tournant d'un angle noté θ_s, exprimé en rad.
La roue **8** et le pignon **8**, de rayons primitifs respectifs R_8 et r_8, sont encastrés sur un arbre intermédiaire appelé arbre d'entraînement, tournant d'un angle noté θ_e, exprimé en rad.
La roue **8** engrène sur une crémaillère liée au bras **3**, assurant ainsi son mouvement de translation par rapport à la tour **2**. Le paramètre de position de **3**/**2** est noté ρ, exprimé en mm.
Par ailleurs, le pignon **8** entraîne le pignon **10** de rayon primitif R_{10}, solidaire du capteur de position angulaire et tournant d'un angle noté θ_c, exprimé en rad.

Le capteur de position angulaire fournit une tension de mesure de la position angulaire (mesθ_c exprimée en V) proportionnelle à l'angle θ_c. Le coefficient de proportionnalité est α (V/rad).
La carte de commande, qui reçoit la mesure de la position angulaire et la consigne de position (ρ_c exprimée en mm) élabore la tension de commande du moteur u_m. Elle possède un comparateur, un bloc adaptateur de consigne de gain A (V/mm) en amont du comparateur et un correcteur d'écart en sortie de comparateur.

I-2 Travail demandé

Question 1 : structure de la chaîne fonctionnelle

Compléter le schéma bloc ci-dessous, modélisant la commande de position du bras par rapport à la tour, en indiquant, dans chacun des blocs à remplir, les rayons ou rapports de rayons, ainsi que les signes qui conviennent, afin de traduire les proportionnalités entre les différentes grandeurs indiquées.



Question 2 : adaptateur d'entrée

Quel doit être le gain A du transducteur d'entrée ?
Quel doit être le signe du gain α du capteur ?



I-3 Correction

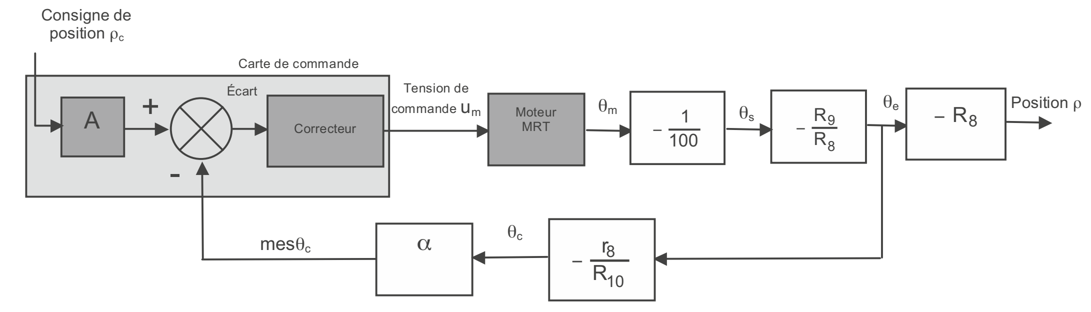
Question 1 : structure de la chaîne fonctionnelle

Les différentes relations cinématiques dans les engrenages permettent d'écrire :

$\frac{\theta_s}{\theta_m} = -\frac{1}{100}$, $\frac{\theta_e}{\theta_s} = -\frac{R_9}{R_8}$, $\frac{\theta_c}{\theta_e} = -\frac{r_8}{R_{10}}$, nombres sans dimension

$\frac{\rho}{\theta_e} = -R_8$, exprimé en mm/rad.

D'où le schéma bloc répondant à la question :



Question 2 : adaptateur d'entrée

■ L'adaptateur d'entrée doit permettre que la comparaison au niveau du comparateur ait un sens. Il doit donc fournir une tension image de la position de consigne dans le même rapport qui lie la tension de mesure en sortie du capteur à la position courante.

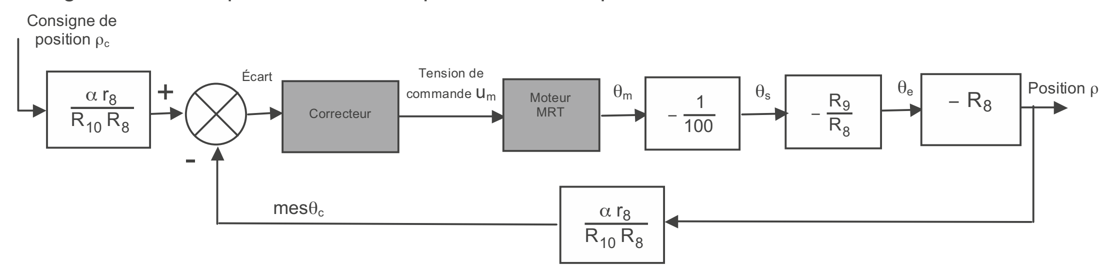
D'où : $A = \alpha \times \left(-\frac{r_8}{R_{10}}\right) \times \left(-\frac{1}{R_8}\right)$ soit : $\boxed{A = \frac{\alpha\, r_8}{R_{10}\, R_8}}$

On peut vérifier, compte tenu des considérations précédentes sur les unités et sachant que α s'exprime en V/rad, que A s'exprime bien en V/mm.

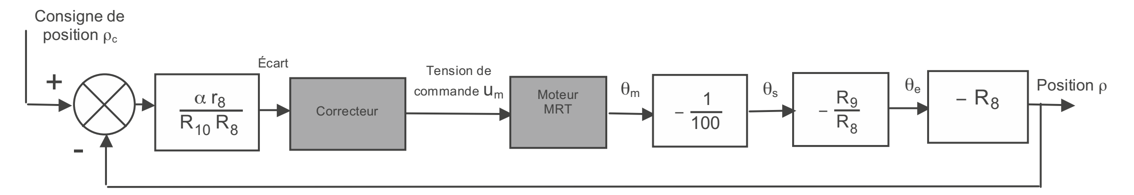
Remarque 1 :
Une façon plus systématique de procéder à une telle adaptation de gains est d'écrire que le produit des gains en dehors de la boucle doit être égal au produit des gains de la boucle de retour :

$$A\, R_8 = \frac{\alpha\, r_8}{R_{10}}$$

Remarque 2 :
Les gains étant adaptés, le schéma équivalent suivant peut être construit :



ou encore le schéma à retour unitaire :



■ Si le gain du correcteur est positif, ce qui est en général le cas, les différents schémas montrent que le coefficient α doit être négatif. Cela permet de compenser l'inversion de sens dû à l'engrenage d'entraînement du capteur. Alors, une consigne de déplacement positive génère une tension négative qui entraîne le moteur dans le sens qui, compte tenu des différents engrenages, permet un déplacement effectivement dans le sens positif du bras **3**.

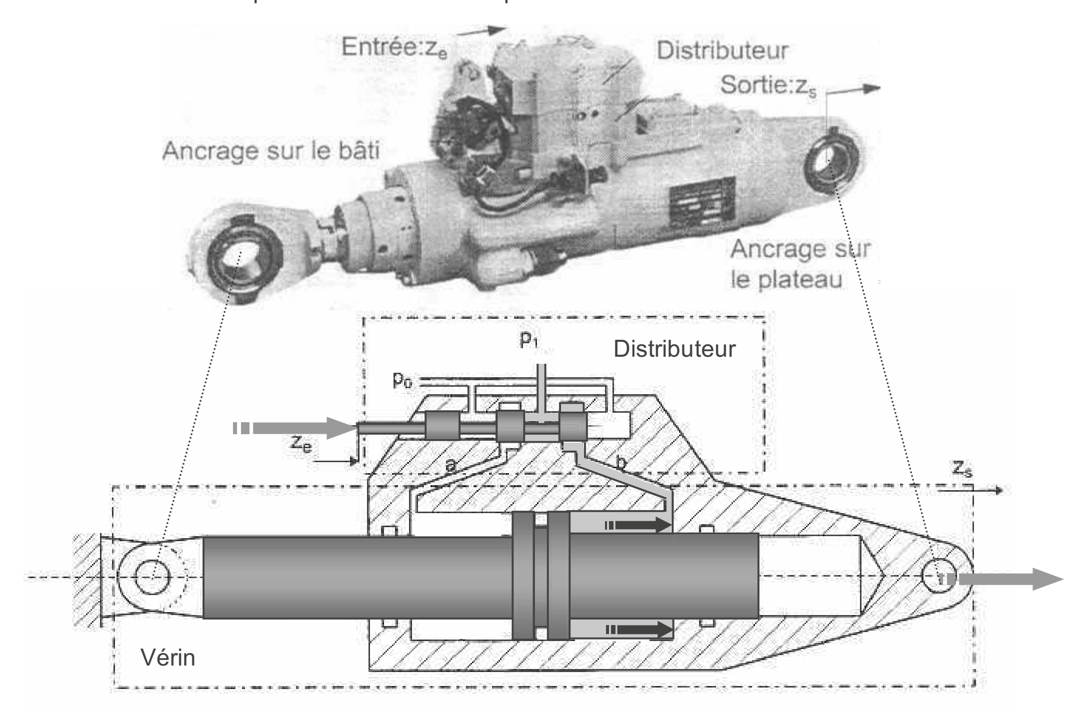
En d'autres termes, le produit des gains de la chaîne directe du schéma équivalent à retour unitaire ci-dessus doit être positif.

II - ASSERVISSEMENT HYDRAULIQUE DE POSITION LINÉAIRE

À partir d'un support du Concours Commun Mines-Ponts PSI.

II-1 Présentation

La photographie et le dessin simplifié ci-dessous représentent la servocommande du plateau cyclique d'un rotor d'hélicoptère. Ce plateau cyclique permet de commander l'incidence des pales, variable sur un tour du rotor, par son inclinaison par rapport à l'axe de rotation de celui-ci. Cette inclinaison est obtenue par la servocommande présentée.



La différence notable de ce système hydraulique, par rapport à celui du système de positionnement de tubes vu dans le chapitre de cours, provient de l'absence de capteur de position et donc

d'intermédiaires électriques dans cet asservissement qui est ainsi purement mécanique. Ceci est obtenu par le fait que le corps du distributeur est lié au corps du vérin qui constitue la pièce de sortie du système, l'extrémité du piston étant ancrée par une rotule sur le plateau à orienter.

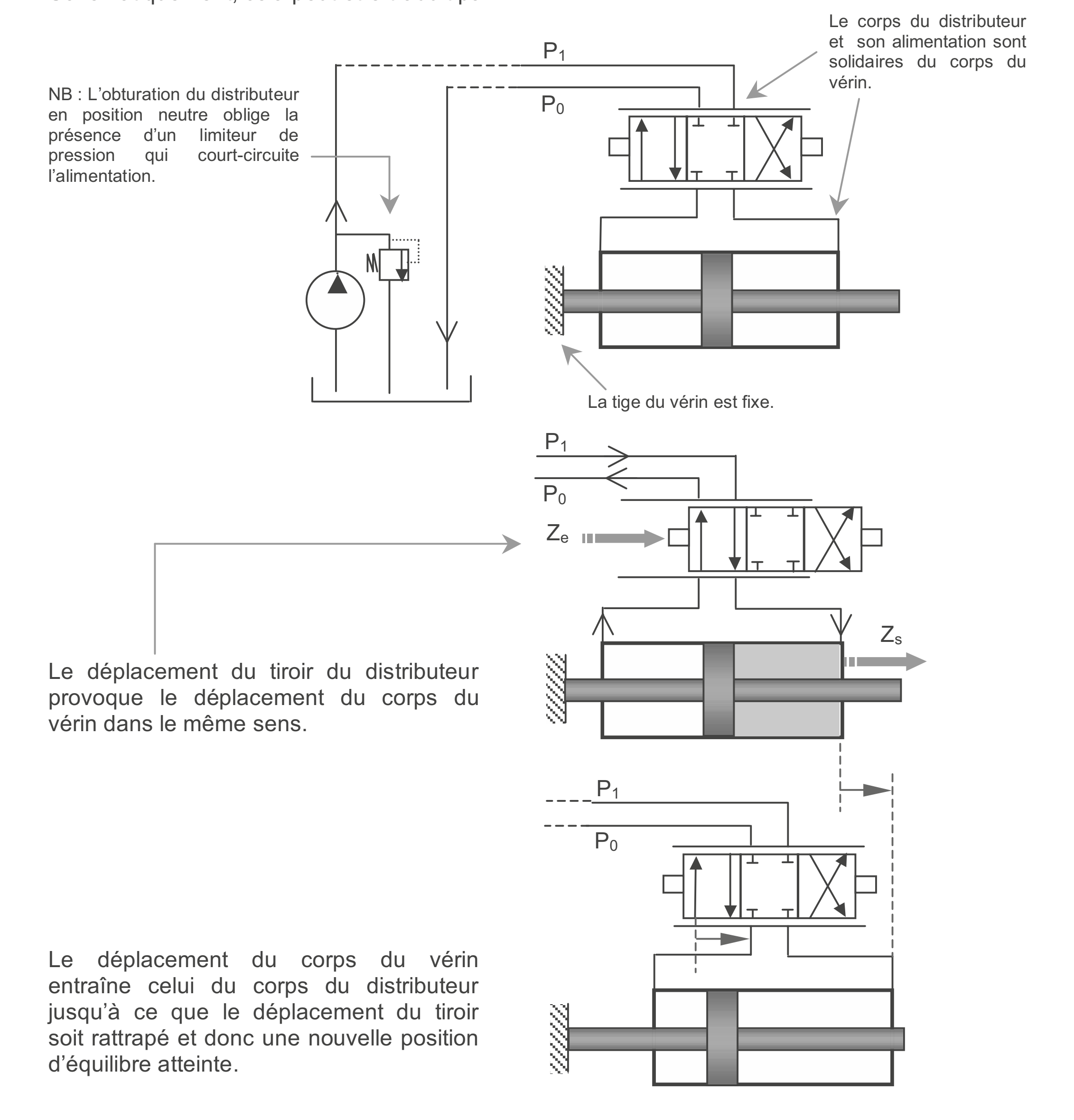
P_1 est la pression du circuit d'alimentation.
P_0 est la pression du réservoir.

La consigne manuelle du pilote est traduite mécaniquement par un système de câbles et de biellettes (non étudié ici) en un déplacement $+Z_e$ du tiroir du distributeur.
Cela a pour effet :

- de mettre en communication, via la conduite b, la chambre droite du vérin avec l'alimentation ;
- de mettre en communication, via la conduite a, la chambre gauche du vérin avec le réservoir.

Il s'ensuit un déplacement Z_s du corps du vérin vers la droite, jusqu'à ce que celui-ci ait atteint la valeur Z_e replaçant le distributeur en position fermée (situation limite d'équilibre représentée ci-dessus). Le déplacement est bien entendu inversé (vers la gauche) si la consigne est $-Z_e$.

Schématiquement, cela peut être traduit par :





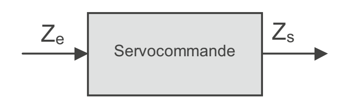
II-2 Travail demandé

Le distributeur pourra être supposé proportionnel, c'est-à-dire fournissant un débit proportionnel au déplacement de son tiroir par rapport à son corps. La constante de proportionnalité est K.

Le vérin hydraulique est de section utile S.

Question 1 :

Donner les équations caractéristiques du distributeur et du vérin et construire une description par schéma bloc du système servocommande (entrée Z_e, sortie Z_s).
Quel est le préactionneur de ce système ? Quel est l'actionneur ?
Que peut-on dire des fonctions de correction et de comparaison ?



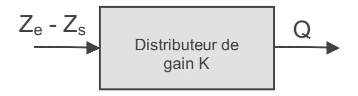
Question 2 :

Quelle est l'équation différentielle caractérisant le comportement de cette servocommande ?
Quelle est sa réponse à une consigne de déplacement en échelon Z_e ?
Que peut-on dire de sa précision statique ?
Quel est son temps de réponse à 5% ?

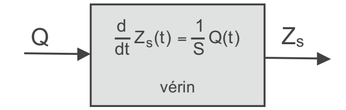
II-3 Correction

Question 1 :

Équation caractéristique du distributeur : $Q(t) = K[Z_e(t) - Z_s(t)]$
En effet, le débit est proportionnel au déplacement relatif entre le tiroir et la tige.

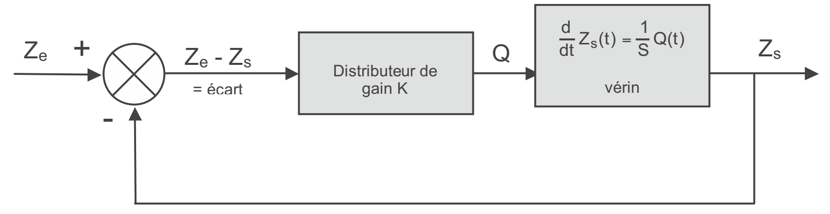


Équation caractéristique du vérin : $\frac{d}{dt}Z_s(t) = \frac{1}{S}Q(t)$



En effet, la vitesse de déplacement du corps par rapport à la tige fixe est proportionnelle (rapport 1/S) au débit d'huile entrant dans le vérin.

En introduisant un bloc comparateur, le fonctionnement de cette servocommande peut être décrit par le schéma bloc suivant :



La structure est à retour unitaire.

Le préactionneur du système est le distributeur car c'est à son niveau que s'effectue l'apport énergétique dans la boucle : arrivée de l'énergie hydraulique fournie par la pompe, extérieure au système.

L'actionneur du système est le vérin qui transforme l'énergie hydraulique en énergie mécanique. Le corps de ce vérin est l'effecteur.

Les fonctions de comparaison et de correction sont globalisées, avec d'ailleurs la fonction de mesure dans la chaîne de retour, par la structure mécanique d'assemblage du distributeur et du vérin, assurant, par mouvement relatif, l'ensemble de ces fonctions. Ainsi, il n'y a pas d'éléments matériel proprement dit pour réaliser ces fonctions. Au découpage fonctionnel ne se superpose pas nécessairement un découpage matériel.

Question 2 :

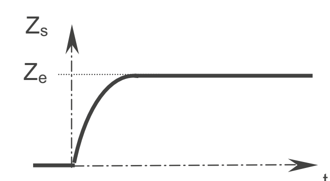
D'après ce qui précède il vient clairement l'équation de comportement de la servocommande :

$$\frac{d}{dt}Z_s(t) = \frac{K}{S}[Z_e(t) - Z_s(t)]$$

ou encore : $\boxed{\frac{S}{K}\frac{d}{dt}Z_s(t) + Z_s(t) = Z_e(t)}$

Alors, classiquement, la réponse de la servocommande à une entrée en échelon Z_e est :

$$\boxed{Z_s(t) = Z_e(1 - e^{-\frac{K}{S}t})}$$



Et $\lim_{t \to \infty} Z_s(t) = Z_e$.

Cette limite étant finie le système est stable.

La valeur de cette limite étant égale à la consigne en échelon le système est précis.

En d'autres termes, son écart statique $\varepsilon_{s\%} = \frac{1}{Z_e}\lim_{t \to \infty}[Z_e - Z_s(t)]$ est nul.

Puisque la réponse ne présente pas d'oscillations, le temps de réponse à 5% est l'instant où la sortie Z_s atteint 95% de sa valeur asymptotique Z_e.

On résout alors : $0,95\, Z_e = Z_e(1 - e^{-\frac{K}{S}t})$

Soit : $e^{-\frac{K}{S}t} = 0,05 = \frac{1}{20}$

Ce qui fournit le temps de réponse à 5% : $\boxed{t_{5\%} = \frac{S}{K}\ln 20 \approx 3\frac{S}{K}}$

Ce qui montre que la servocommande sera d'autant plus rapide que la section S du vérin sera faible et que le gain du distributeur sera grand, ce qui satisfait le bon sens : le distributeur alimentant avec un fort débit un vérin de petite section, le déplacement est alors rapide.

On peut anticiper sur le chapitre 4 pour définir le rapport S/K comme étant la constante de temps du système. Le temps de réponse à 5% de la servocommande est donc trois fois sa constante de temps.

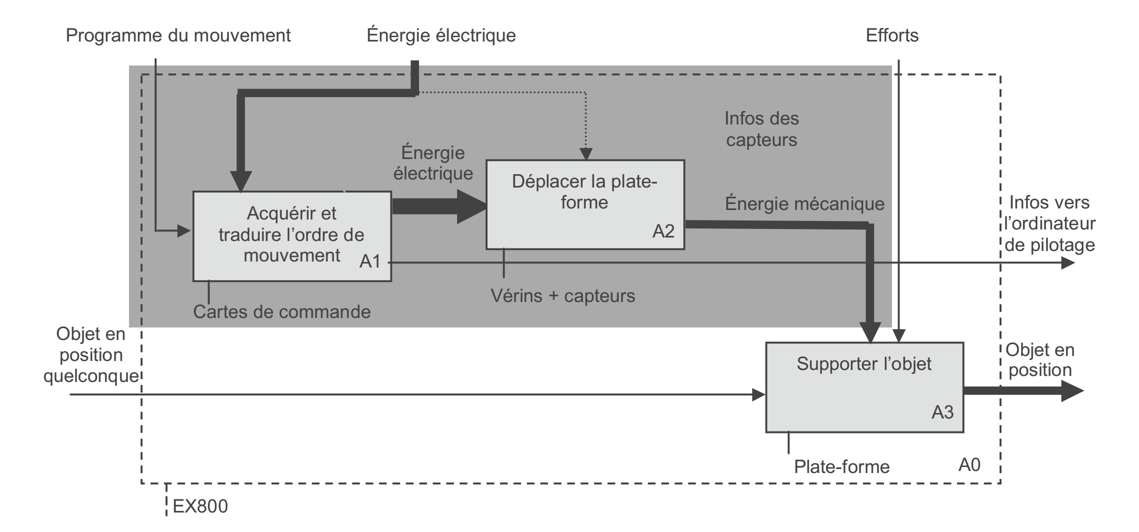
III - VÉRIN ÉLECTRIQUE DU ROBOT PARALLÈLE EX800

III-1 Présentation



Le système EX800 a déjà été présenté.

On s'intéresse ici à la chaîne fonctionnelle d'un de ses vérins électriques à vis (en grisé dans le diagramme de type SADT ci-dessous : fonctions A1 et A2).



Cette chaîne fonctionnelle est constituée :

- des cartes de commande qui regroupent la partie commande et le variateur de vitesse ;
- du vérin proprement dit qui regroupe la partie opérative et les capteurs de position et de vitesse.

Programme du mouvement
Infos des capteurs
Énergie électrique
Élaborer la commande A11
Commande
Commander l'alimentation du moteur A12
Énergie électrique
PC
Variateur de vitesse
A1
Infos des capteurs
Cartes de commande
Acquérir des infos en retour A22
Déplacer la plate-forme A21
Capteurs
Énergie mécanique
PO
A2
Vérin + capteurs

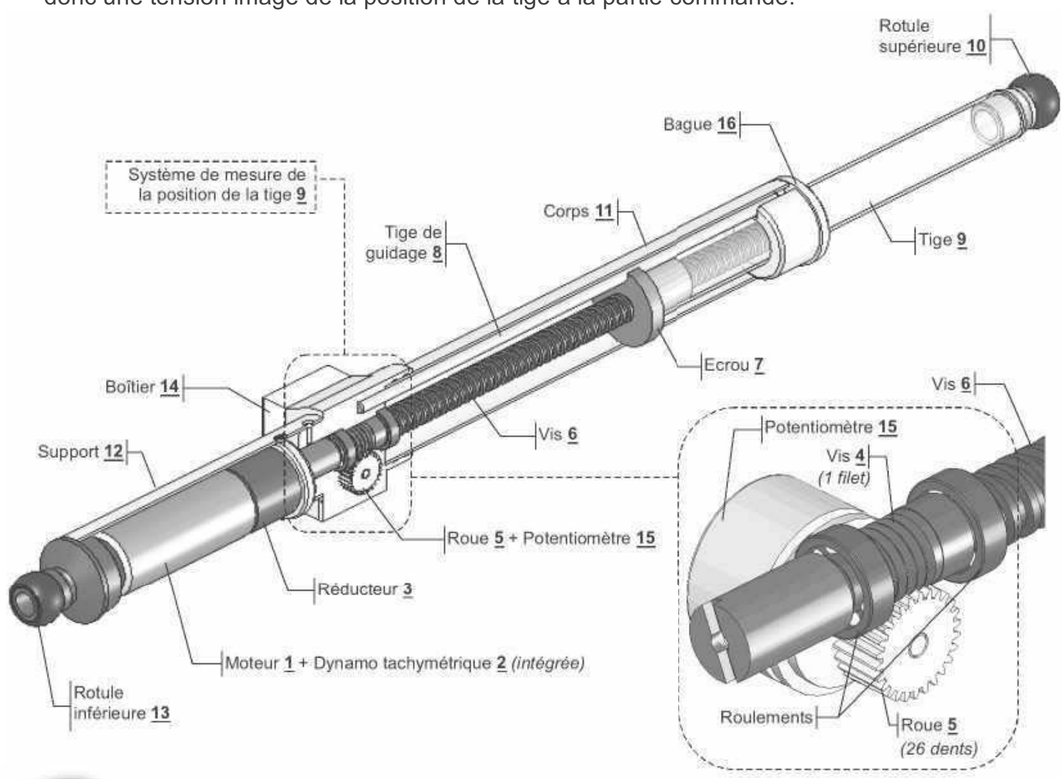
Ensemble {vérin + capteur} :

Tension d'alimentation du moteur
Tension image vitesse moteur
9
{6,4}
Réd.
Moteur
Tachy.
5
Potentiomètre
Tension image position tige

Ce vérin est un vérin électrique à vis constitué :

- d'un moteur électrique à courant continu **1** associé à une génératrice tachymétrique **2** qui fournit à la partie commande une tension image de sa vitesse de rotation ;
- d'un réducteur **3** qui réduit cette vitesse afin de fournir un couple suffisant ;

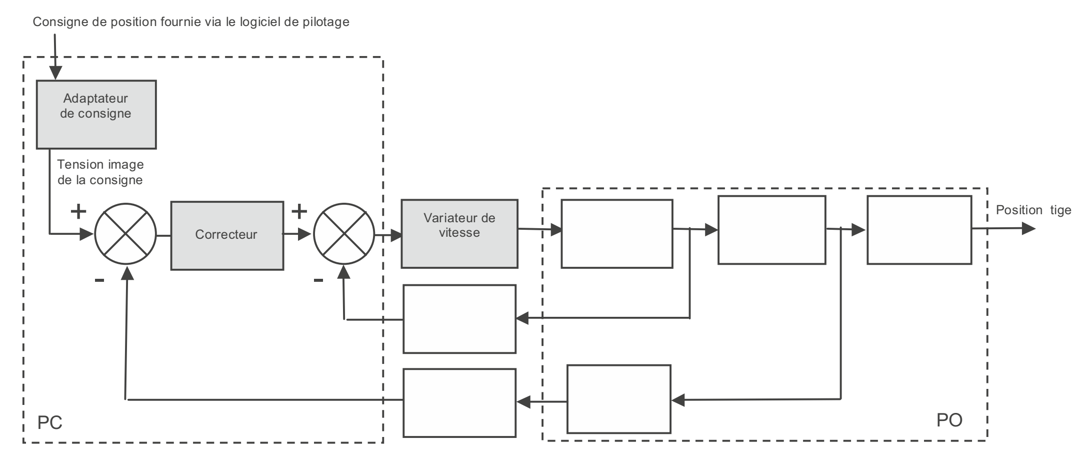
- d'une vis <u>**6**</u> accouplée à la sortie du réducteur et en liaison hélicoïdale avec la tige de sortie <u>**9**</u> par un <u>système vis-écrou</u> <u>**6-7**</u> ;
- d'un <u>potentiomètre</u> rotatif <u>**15**</u> qui est entraîné par la vis (par un <u>engrenage roue-vis</u> <u>**5-4**</u>) et fournit donc une tension image de la position de la tige à la partie commande.



III-2 Travail demandé

<u>Question 1 :</u> structure de la chaîne fonctionnelle

Compléter le schéma bloc ci-dessous en indiquant les composants représentés par les différents blocs non désignés :



Identifier le préactionneur, l'actionneur, les transmetteurs et l'effecteur de cette chaîne fonctionnelle asservie.

<u>Question 2 :</u> adaptation au potentiomètre

- Le pas du système vis écrou est p = 6,35 mm/tour.
- La course maximale de la tige est de 150 mm.
- La plage de mesure du potentiomètre est de 345°.

Quel doit être le rapport de l'engrenage roue-vis afin que le potentiomètre soit utilisé au maximum de sa plage de mesure ?
Cet engrenage est tel que la vis est à un seul filet et la roue possède 26 dents. Cf. dessin.
Que peut-on en conclure en termes de précision de la mesure ?
La tension délivrée par le potentiomètre varie en 0 et +5V le long de sa plage de mesure.
Quel doit être le gain du transducteur d'entrée de la chaîne asservie ?

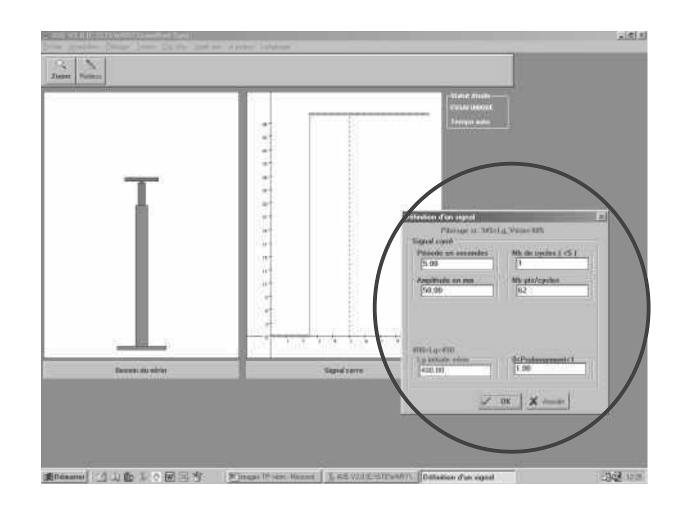
<u>Question 3 :</u> mesures de performances

On souhaite caractériser globalement les performances de cette chaîne asservie à partir de différents essais, en choisissant des lois de consigne de position parmi les signaux canoniques : échelon, rampe et sinus, ceci à partir du logiciel de pilotage.

Ce même logiciel, recevant en retour la position de la tige, via le potentiomètre et la carte de commande, permet, pour chaque consigne, le tracé de l'évolution temporelle de la position de la tige en réponse.

<u>3-1 :</u> réponse à un échelon

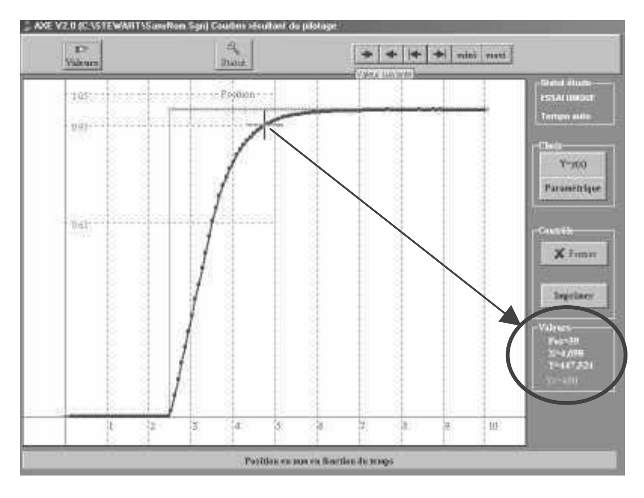
L'échelon est défini comme une entrée en signal carré particulière. Soit ci-contre une consigne de position, sous forme d'un échelon de 50 mm, à partir de l'instant t = 2,5 s et d'une longueur de référence du vérin de 400 mm.



La loi d'évolution temporelle de la position de la tige en réponse à cette consigne est alors donnée par la courbe ci-contre.

Le système est manifestement stable. Quelle est son erreur statique de position ?
Que peut-on en conclure ?

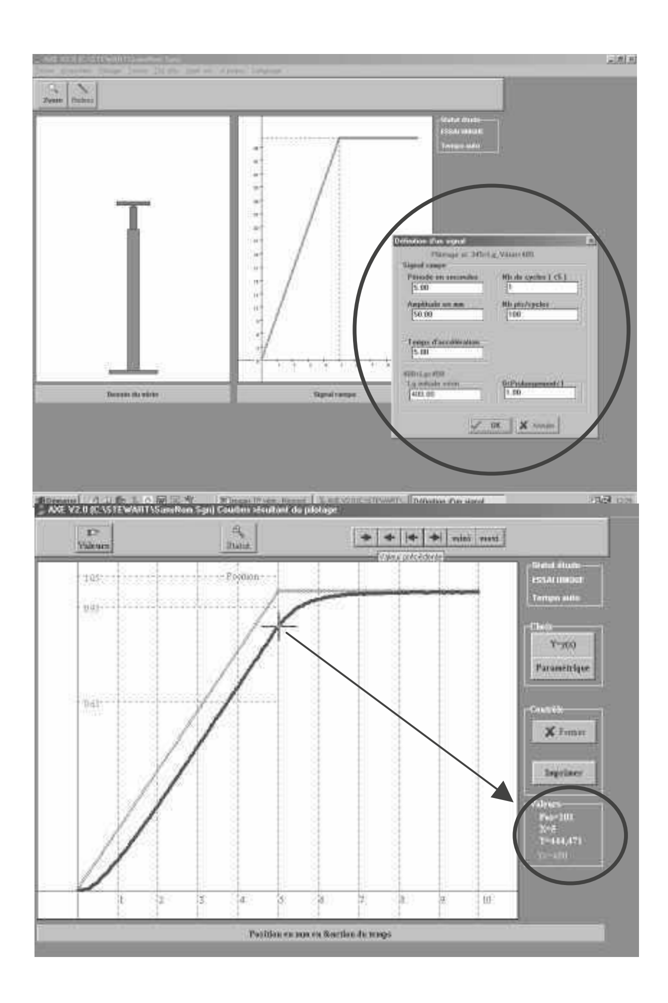
Le curseur est placé ci-contre à la position 447,5 mm. L'instant lu est 4,7 s.
Quel est le temps de réponse à 5% du système ?



3-2 : réponse à une rampe

Le système reçoit cette fois une consigne de position selon une rampe, à partir de l'instant t = 0 s et d'une longueur de référence du vérin de 400 mm. La pente de cette rampe est de 50 mm en 5 secondes. Ensuite, la consigne est maintenue.

NB : cette consigne en rampe de position est équivalente à une consigne en échelon de vitesse.



La loi d'évolution temporelle de la position de la tige en réponse à cette consigne est alors donnée par la courbe ci-contre.

Le curseur est placé ci-contre à la fin de la rampe (t = 5s) : on lit une longueur de 444,5 mm.

Quelle est l'erreur statique de traînage de ce système ainsi sollicité ?

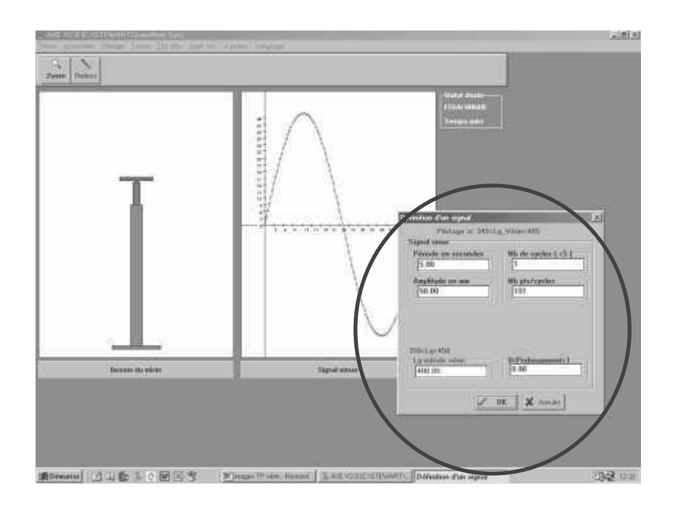
Quelle hypothèse raisonnablement vérifiée est nécessaire à la conclusion précédente ?

Quelle performance, mise en évidence lors de l'essai précédent, peut être vérifiée ici aussi ?

3-3 : réponse à un sinus

Le système reçoit pour finir une consigne de position selon une loi sinusoïdale, à partir de l'instant t = 0 s autour d'une longueur de référence du vérin de 400 mm.

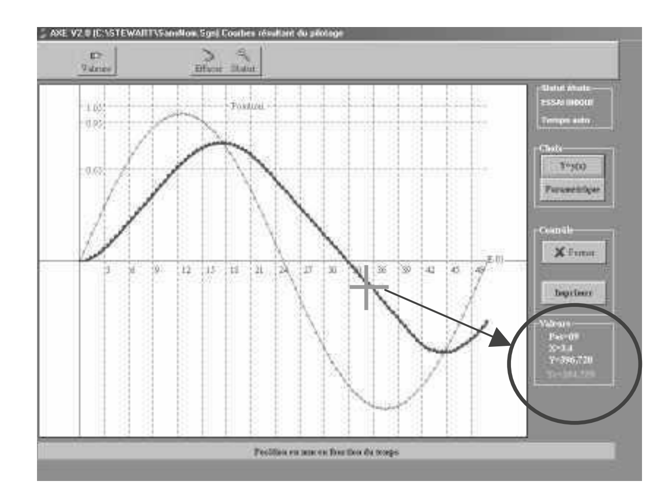
L'amplitude du signal sinusoïdal est de 50 mm et la période de 5 secondes.



La loi d'évolution temporelle de la position de la tige en réponse à cette consigne est alors donnée par la courbe qui suit :

Le curseur est placé ci-contre à l'instant t = 3,4 s, la longueur lue est de 396,7 mm.

Quelle est l'erreur dynamique de traînage à cet instant ?

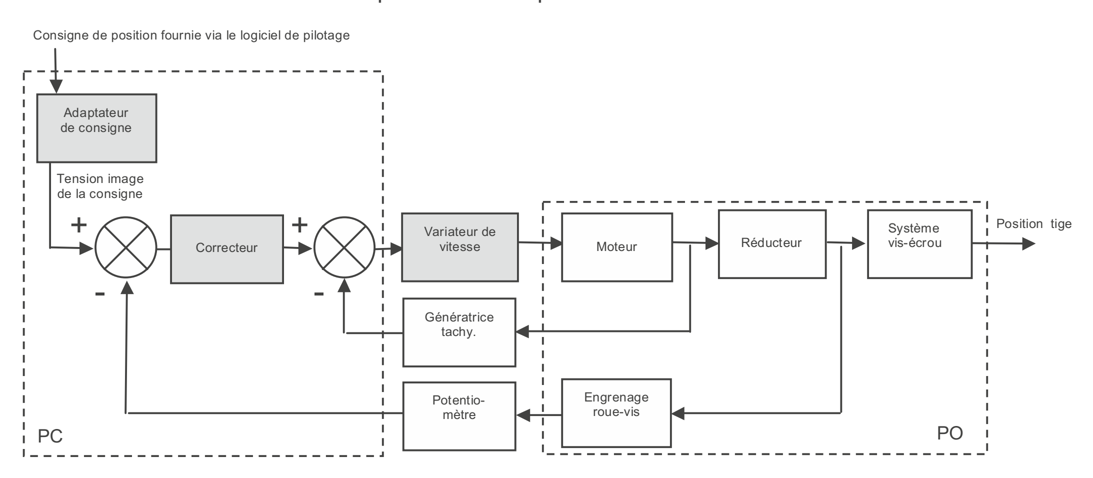




III-3 Correction

<u>Question 1 :</u> structure de la chaîne fonctionnelle

La lecture des différents documents permet de compléter le schéma :



- Le préactionneur est le variateur de vitesse. Relié à la source d'énergie électrique, il reçoit les ordres de la partie commande et fournit l'énergie électrique au moteur.
- L'actionneur est le moteur électrique qui transforme l'énergie électrique en énergie mécanique.
- Les transmetteurs sont le réducteur, le système vis-écrou et l'engrenage roue-vis.
- L'effecteur n'apparaît pas explicitement dans le schéma-bloc, il est en fait l'écrou du système vis-écrou, lié à la tige du vérin.

<u>Question 2 :</u> adaptation du potentiomètre

Le pas du système vis écrou étant de 6,35 mm/tour (1/4 de pouce), une course complète de la tige de 150 mm correspond à :

$\frac{150}{6,35} \approx 23,62$ tours de la vis.

Ces 23,62 tours de la vis doivent entraîner le potentiomètre sur 345°. L'engrenage roue-vis doit donc avoir pour rapport :

$$\frac{345}{23,62 \text{x} 360} = \boxed{\frac{1}{24,65}}$$

Le nombre de dents de la roue devant bien sûr être un nombre entier, on retiendra a priori un rapport de 1/25. Soit 25 dents pour la roue. Le choix d'un nombre de dents égal à 26 correspond à une marge de sécurité, qui conduit le potentiomètre à n'être utilisé, non pas sur 345°, mais sur :

$$\frac{24,65}{26}\text{x}345 = \boxed{327°}$$

Cette sécurité diminue légèrement (dans un rapport 26/25) la précision de la mesure.

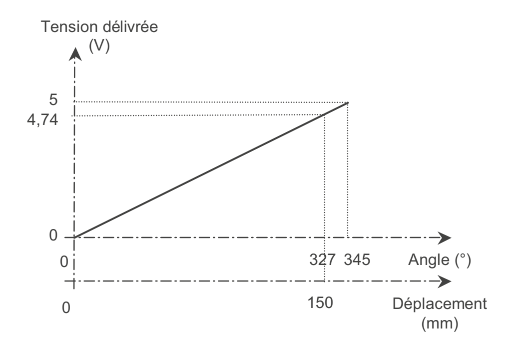
Dans la position 345° le potentiomètre délivre 5V.
Donc dans la position 327° il délivre :

$$5\text{x}\frac{327}{345} = 4,740\text{ V} \quad \text{(hypothèse de linéarité)}$$

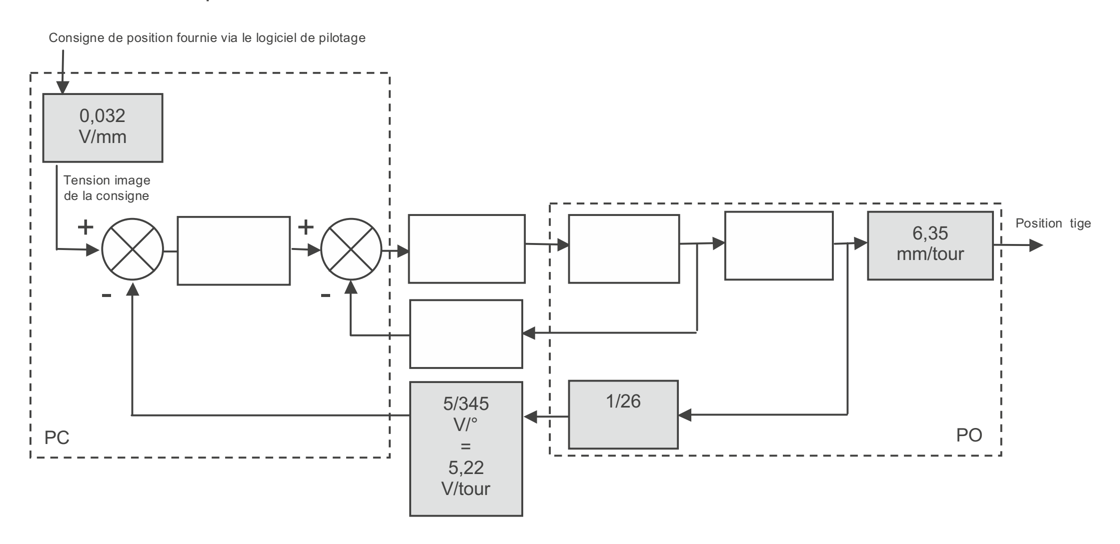
Ceci correspond à un déplacement de la tige de 150 mm. La mesure du déplacement de la tige se fera donc au total avec un gain de :

$$\frac{4,740}{150} = \boxed{0,032\text{ V.mm}^{-1}}$$

On retiendra donc ce gain pour le transducteur d'entrée afin de comparer des tensions comparables.



■ Une autre façon de procéder peut être proposée, sous la forme de la vérification qui suit :
on vérifie en effet que le gain de la chaîne de retour : 5,22 x 1/26 = 0,2 V/tour (de la vis)
est bien le même que celui extérieur à la boucle : 0,032 x 6,35 = 0,2 V/tour.



<u>Question 3 :</u> mesures de performances

<u>3-1 :</u> réponse à un échelon

La réponse tend vers la consigne : l'erreur statique de position est donc <u>nulle</u>.
Conclusion : le système est <u>précis</u> en réponse à un échelon.

La réponse ne présentant pas d'oscillations, le temps de réponse à 5% est la durée mise par la tige pour atteindre 95% de son déplacement total.

Le déplacement total étant égal à la consigne de 50 mm, puisque le système est précis, le temps de réponse est donc simplement la durée mise par la tige pour se déplacer de 0,95x50 = 47,5 mm. Soit, puisque la longueur de départ du vérin est 400 mm, pour que celle-ci ait atteint 447,5 mm. Ceci se produit à l'instant 4,7s.

L'instant de la commande en échelon étant t = 2,5 s , on en déduit le temps de réponse à 5% :

$t_{5\%} = 4,7 - 2,5 = \boxed{2,2\ \text{s}}$

<u>3-2 :</u> réponse à une rampe

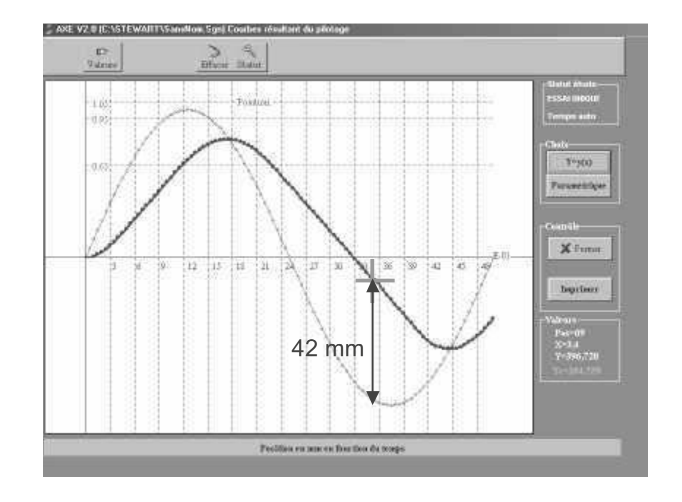
À la fin de la rampe, la valeur de la consigne est de 50 mm alors que le déplacement de la tige n'est que de 44,5 mm.
L'erreur statique de traînage est donc :

$E_v = 50 - 44,5 = \boxed{5,5\ \text{mm}}$

Cela suppose que cet écart n'évolue plus à l'instant considéré ce qui semble bien le cas puisque la courbe de réponse a « rejoint» son asymptote parallèle à la consigne.

On vérifie à nouveau que l'erreur statique de position est nulle.

<u>3-3 :</u> réponse à un sinus



À l'instant considéré, la consigne de déplacement est :

$$50\sin\left(\frac{2\pi}{5}3,4\right) = -45,3\ \text{mm}$$

amplitude (en mm) — période (en s)

Or le déplacement de la tige est $396,7 - 400 = -3,3$ mm
L'erreur dynamique est donc :

$E_v = -45,3 - (-3,3) = \boxed{-42\ \text{mm}}$

Cette erreur, en valeur absolue, semble à première vue être l'erreur dynamique maximale sur un cycle de consigne sinusoïdale.
Un résultat plus précis nécessiterait de tracer la différence des deux courbes.



IV - ASSERVISSEMENT DE VITESSE DU CHARIOT MP22



IV-1 Présentation



On s'intéresse à la chaîne fonctionnelle d'entraînement du chariot filoguidé MP22 déjà rencontré :

Consigne de vitesse
Adaptateur de consigne
+
-
Écart
Correcteur
Régulateur de vitesse + amplificateur
Tension de commande
Moteur à courant continu
Vitesse angulaire du rotor
Réducteur
Vitesse de rotation de la roue
Chariot
Vitesse du chariot
Capteur de vitesse (codeur incrémental)
Mesure de vitesse

Mentor FIL
Fichier Editer Configurer Etudier
Aide A propos de...
Déplacement chariot
Consigne(s)
Vitesse
C_{nv} = 320 inc
C_{nv} = $ 0140 inc
C_v = 73.9 mm/s
Consigne de vitesse
Régulateur de Déplacement
Commande Proportionnelle Vitesse
Cv
Correcteur
K_c = 4.00
Sortie régulateur
I.P.
M
Réducteur
Interface Capteur
ΔMx pendant Te
Mesure de x
$00827C inc
33404 inc
Codeur
Roue
X
Déplacement Maxi
X_{maxi} = 100 mm
Condition de départ
Start
Condition d'arrêt
DEP_{maxi} + Stop

Cette chaîne permet un asservissement de la vitesse du chariot selon une valeur de consigne. En fait, plus précisément, c'est la vitesse de sortie du moteur qui est réellement asservie, la suite de la chaîne, hors boucle, comportant des composants proportionnels dépendant du rapport du réducteur et du rayon de la roue motrice et étant faiblement l'objet de perturbations.

L'asservissement travaillant sur des grandeurs numériques, donc échantillonnées, la consigne de vitesse doit être traduite numériquement en un nombre d'incréments (noté inc). Le codage est de **4,33 inc / mm.s^{-1}**.

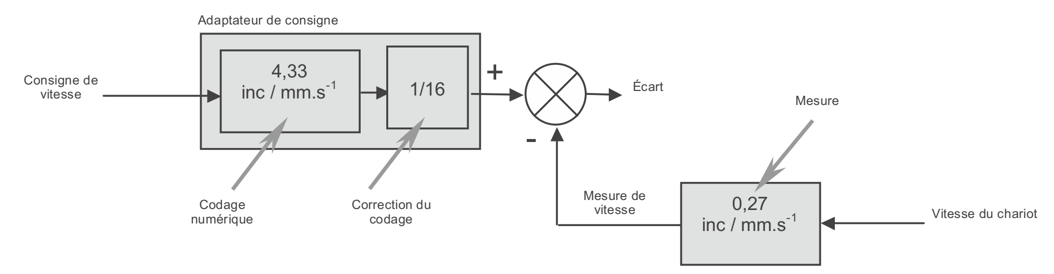
On pourra vérifier, dans la copie d'écran du logiciel de pilotage donnée ci-dessus, que la consigne de 320 inc correspond à une vitesse de 320 / 4,33 = **73,9 mm.s^{-1}**.

Remarque 1 :
La résolution du codage est donc de 1/4,33 = 0,24 mm.s^{-1} / inc.
Le chiffre de 73,9 mm.s^{-1} est donc à considérer avec cette approximation, soit 73,9 ± 0,12 mm.s^{-1} que l'on pourra arrondir donc à 74 mm.s^{-1}.

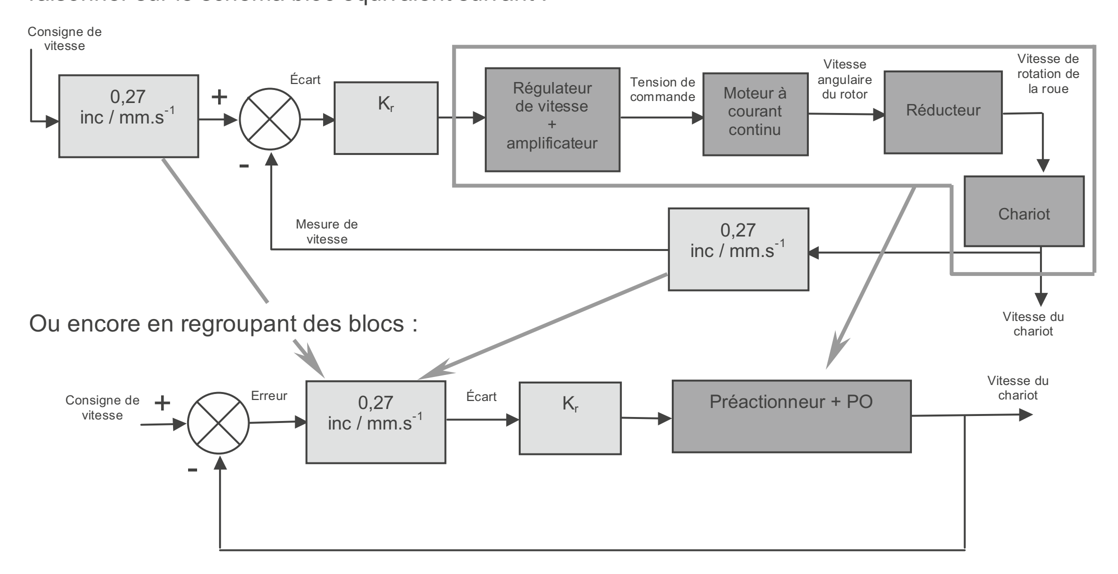
Remarque 2 :
On peut lire, toujours sur la copie d'écran précédente, la traduction en hexadécimal (base 16) du nombre 320 qui est 0140.
En effet $0x16^3 + 1x16^2 + 4x16 + 0 = 320$
Cette écriture hexadécimale est directement traduisible en binaire sur 16 bits :
0000 0001 0100 0000
0 1 4 0
La carte numérique travaille en effet sur des mots de 16 bits.

La mesure de la vitesse se fait par décompte du nombre d'incréments émis par le codeur incrémental toutes les T_e secondes, T_e étant un temps prédéfini, infiniment petit par rapport à la durée totale du déplacement du chariot. Ce nombre d'incréments est alors l'image de la vitesse. Le système est configuré tel que l'on ait **0,27 inc/mm.s^{-1}**. Ce nombre provient du rapport du réducteur, du rayon de la roue, de la précision du codeur et de la période d'échantillonnage T_e.

Comme toujours, l'adaptateur de consigne doit posséder la même caractéristique que la chaîne de retour, afin que le comparateur compare des nombres comparables qui soient les images des vitesses de consigne et effective, dans le rapport 0,27 inc/mm.s^{-1}. Aussi, après codage numérique dans le rapport 4,33 inc/mm.s^{-1}, la consigne doit être corrigée dans le rapport 4,33/0,27 = **16** :



Plusieurs types de correcteurs peuvent être retenus. On retiendra ici un **correcteur proportionnel**, c'est-à-dire commandant le régulateur proportionnellement à l'écart. Le rapport de proportionnalité (gain du correcteur) est noté K_r. Ce gain est réglable via le logiciel de pilotage. Ainsi on pourra raisonner sur le schéma bloc équivalent suivant :



Ou encore en regroupant des blocs :

Ce schéma ***à retour unitaire*** permet la description du système de la manière suivante :

L'écart, image en incréments de l'erreur de vitesse par rapport à la consigne, est amplifié dans le rapport K_r. Cette commande numérique est traduite en vitesse du chariot par l'ensemble {préactionneur + PO} constitué des éléments suivants :

- le préactionneur constitué du régulateur de vitesse et de l'amplificateur, qui contient une conversion numérique-analogique et élabore la tension de commande du moteur ;
- l'actionneur (le moteur) qui transforme l'énergie électrique en énergie mécanique ;
- un transmetteur (le réducteur) qui adapte la vitesse du moteur afin de fournir un couple suffisant à la roue ;
- l'effecteur (le chariot lui-même mais cinématiquement tout simplement sa roue motrice) qui traduit la vitesse de rotation en sortie de réducteur en vitesse d'avancement.

Cet ensemble a un comportement complexe qui ne sera pas étudié dans cet exercice.

IV-2 Travail demandé

<u>Question 1 :</u> influence de K_r

Les valeurs 4 et 8 sont testées pour K_r. On relève alors les deux courbes ci-contre, donnant l'évolution temporelle de la vitesse du chariot soumis à la consigne en **<u>échelon de 74 mm/s</u>**.

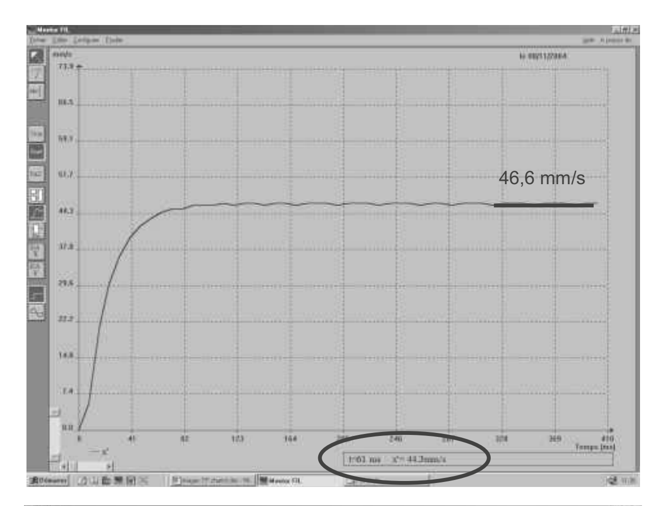
- $K_r = 4$:

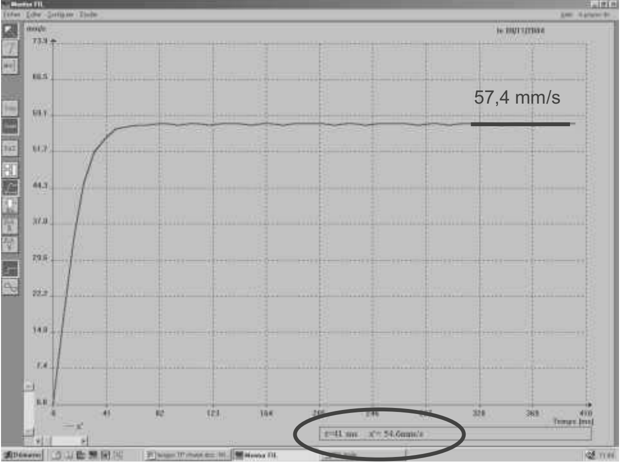
La vitesse se stabilise sensiblement autour de la valeur 46,6 mm/s. À l'instant t = 61 ms, elle valait 44,3 mm/s.

- $K_r = 8$:

La vitesse se stabilise sensiblement autour de la valeur 57,4 mm/s. À l'instant t = 41 ms, elle valait 54,6 mm/s.

➔ Pour chaque valeur de K_r, donner l'erreur statique E_s et le temps de réponse à 5% du système.

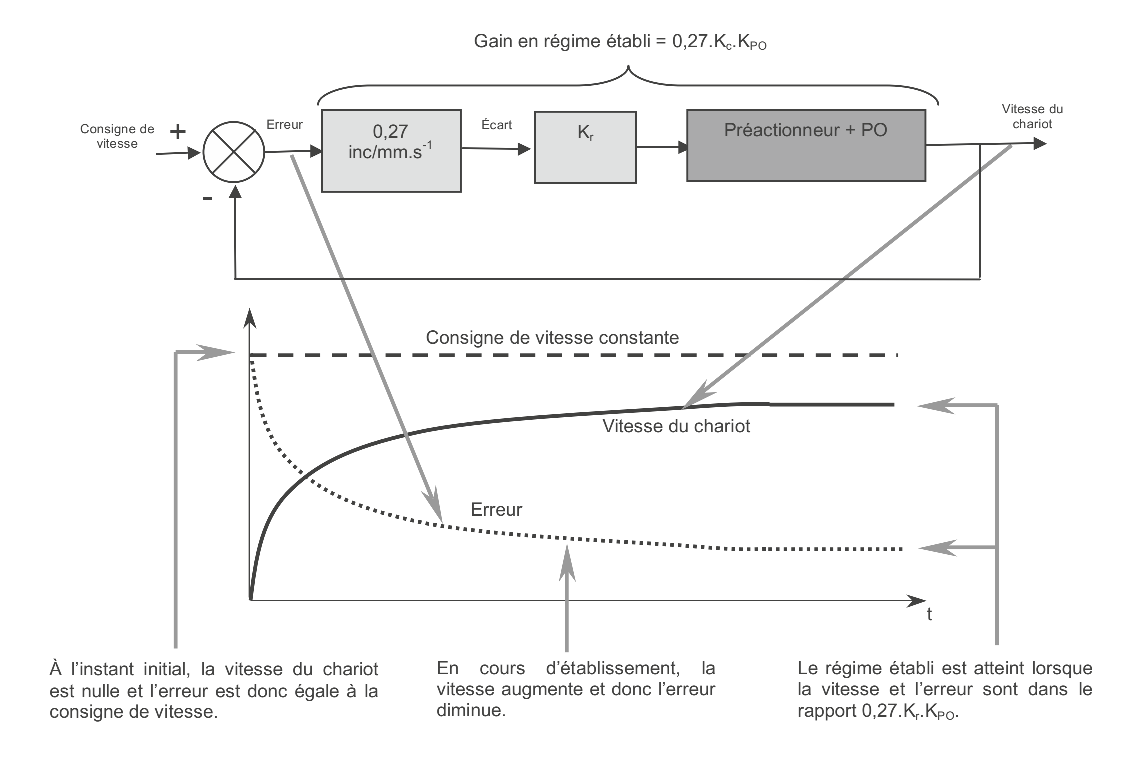




<u>Question 2 :</u> interprétation

Les résultats précédents montrent un système imprécis. Cela s'explique par le fait qu'un écart nul conduirait à l'arrêt de l'alimentation du moteur (qui est proportionnelle à l'écart), ce qui est contraire au fonctionnement de l'ensemble.

En fait, le système tend vers la situation d'équilibre où la vitesse du chariot et l'erreur sont exactement dans la proportion définie par le comportement en régime établi de la chaîne directe. Ainsi, si en régime établi l'ensemble {préactionneur + PO} génère une vitesse proportionnelle à sa commande avec un rapport K_{PO} ($mm.s^{-1}$/inc), alors le système se stabilisera lorsque la vitesse et l'erreur seront dans la proportion $0{,}27.K_c.K_{PO}$, comme cela peut s'illustrer sur le graphe qui suit :



Ainsi, en régime établi, la vitesse V_∞ du chariot est liée à l'erreur par : $\boxed{V_\infty = 0{,}27.K_r.K_{PO} \times E_s}$

➔ Vérifier alors que le rapport $\dfrac{V_\infty}{K_c\,E_s}$ est le même dans les deux essais conduits précédemment.

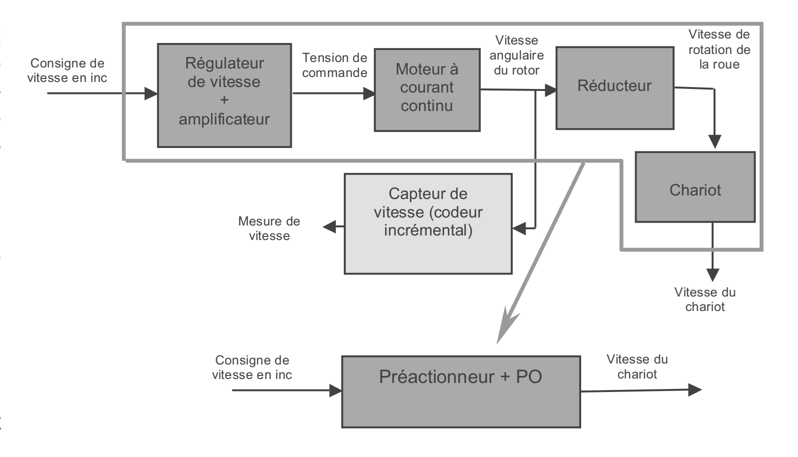
➔ En déduire la valeur du coefficient K_{PO}.

➔ Quelle relation lie alors V_∞ à la consigne de vitesse V_c en fonction du gain K_r ?
Quel devrait alors être théoriquement la valeur de K_r pour que l'asservissement soit précis ?

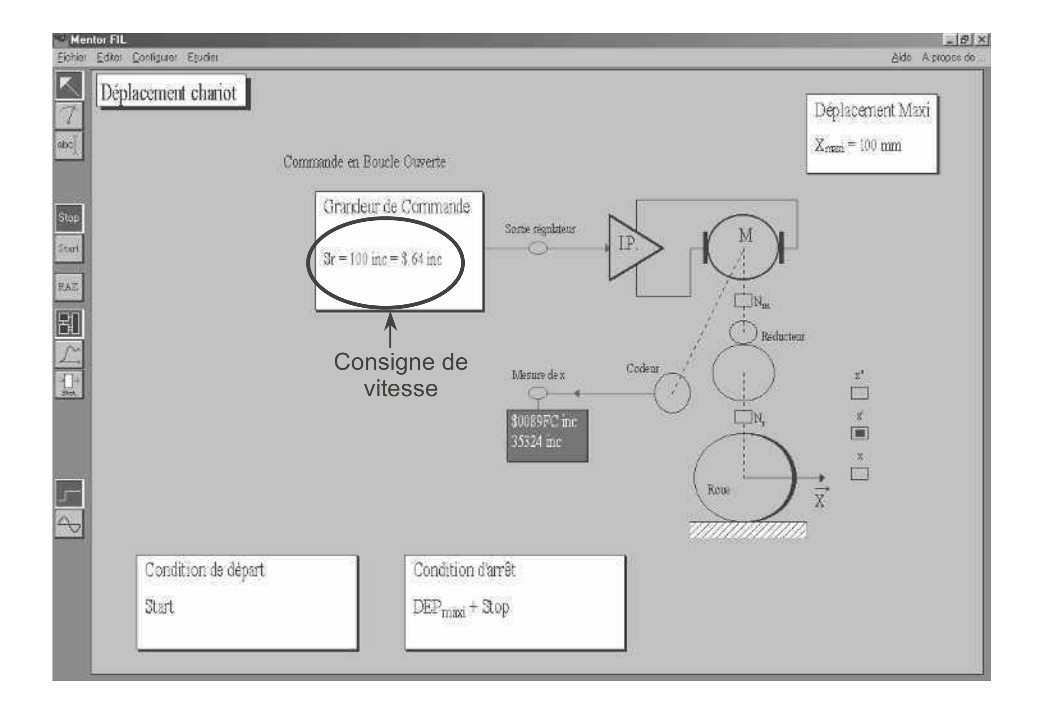
Question 3 : vérification du coefficient K_{PO} à partir d'un essai en boucle ouverte

Le chariot peut également être piloté sans boucle de retour, en donnant directement une consigne de vitesse codée en incréments à l'entrée du régulateur de vitesse.

La sortie du capteur de vitesse permet alors la mesure de celle-ci et le tracé de son évolution temporelle. Sa valeur en régime établi permet alors d'accéder au coefficient K_{PO}.

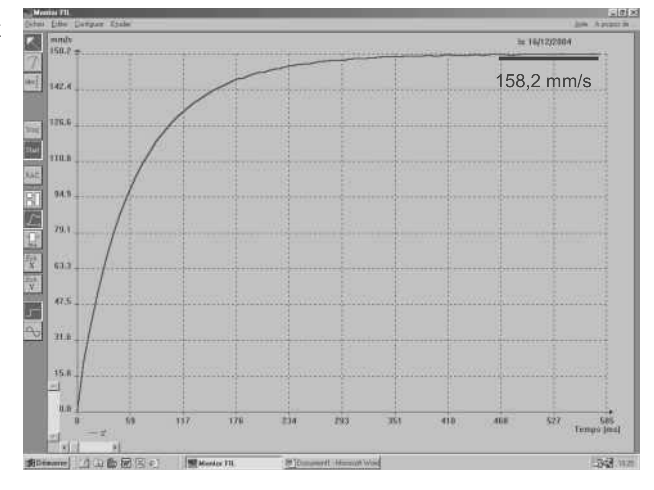


On procède alors à l'essai décrit ci-après, en donnant par exemple une consigne de 100 incréments au régulateur de vitesse :



La vitesse se stabilise sensiblement autour de la valeur 158,2 mm/s.

➔ En déduire la valeur du coefficient K_{PO} et conclure.



IV-3 Correction

<u>Question 1 :</u> influence de K_r

L'erreur statique est la différence entre la valeur de consigne de 74 mm/s et la valeur limite atteinte. La vitesse ne présentant pas d'oscillation, le temps de réponse à 5% est le temps nécessaire pour que la vitesse atteigne 95% de sa valeur limite.

D'où le tableau des valeurs demandées :

K_r	Valeur limite	Erreur statique	95% de la valeur limite	Temps de réponse à 5%
4	$V_\infty = 46{,}6\ mm.s^{-1}$	$E_s = 27{,}4\ mm.s^{-1}$	$0{,}95\ V_\infty = 44{,}3\ mm.s^{-1}$	$T_{5\%} = 61\ ms$
8	$V_\infty = 57{,}4\ mm.s^{-1}$	$E_s = 16{,}6\ mm.s^{-1}$	$0{,}95\ V_\infty = 54{,}6\ mm.s^{-1}$	$T_{5\%} = 41\ ms$

Question 2 : interprétation

K_r	$\dfrac{V_\infty}{K_c\,E_s}$
4	0,43
8	0,43

Le rapport (sans dimension) $\dfrac{V_\infty}{K_c\,E_s}$ est lié à K_{PO} par la relation : $V_\infty = 0{,}27.K_r.K_{PO} \times E_s$.

Alors $$K_{PO} = \frac{1}{0{,}27}\frac{V_\infty}{K_r\,E_s} = 1{,}59\ mm.s^{-1}\ /\ inc$$

La relation précédente permet de déterminer la relation liant la vitesse limite V_∞ à la vitesse de consigne V_c, pour un certain réglage de K_r. Il suffit pour cela d'exprimer que $E_s = V_c - V_\infty$:
$V_\infty = 0{,}27.K_r.K_{PO} \times (V_c - V_\infty)$

D'où : $$V_\infty = \frac{0{,}27.K_r.K_{PO}}{1 + 0{,}27.K_r\,K_{PO}}V_c$$

Cette relation montre que le système ne peut pas être précis. En effet, $V_\infty = V_c$ ne peut être obtenu que pour un gain K_r tendant vers l'infini, ce qui bien sûr n'est pas possible.

Question 3 : vérification du coefficient K_{PO} à partir d'un essai en boucle ouverte

La vitesse se stabilisant autour de la valeur 158,2 mm/s pour une consigne en entrée du régulateur de 100 incréments, cela permet d'évaluer K_{PO} à :

$$K_{PO} = \frac{158{,}2}{100} = 1{,}58\ mm.s^{-1}\ /\ inc$$

Ce résultat est tout à fait cohérent avec les essais conduits en boucle fermée.

FONCTIONS DE TRANSFERT

Les chapitres précédents ont permis de définir la notion de système, puis d'introduire celle de système asservi. Dans le cas restreint, mais très usuel, des systèmes linéaires et invariants, le but de ce chapitre fondamental est de donner des méthodes générales de modélisation mathématique. Celles-ci, à travers l'outil puissant qu'est la transformation de Laplace, aboutiront à la notion de fonction de transfert qui donnera toute sa puissance à la description par schéma bloc. Enfin, dans le cas des systèmes asservis, seront distinguées les fonctions de transfert en boucle fermée et en boucle ouverte, dont seront exposées les premières propriétés.

I - PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES PHYSIQUES

I-1 Définitions - entrées et sorties

Un système a été défini comme un ensemble organisé d'éléments interagissant entre eux et avec l'extérieur dans le but de réaliser une fonction. Un système ***physique*** est un système soumis aux lois des sciences physiques ; ceci par opposition, par exemple, à un système économique, un système organisationnel, etc. Cet ouvrage traite exclusivement des systèmes physiques.

Les lois physiques lient des grandeurs de deux types : les ***entrées*** et les ***sorties***.

- Les entrées sont les grandeurs selon lesquelles le système agit. Du point de vue de l'automaticien, elles sont classées en deux catégories :
  - les grandeurs de commande ou consignes, qui sont contrôlées,
  - les perturbations qui ne sont pas contrôlées et que le système doit subir.
- Les sorties sont les grandeurs dont l'état justifie l'existence du système. Elles sont fonction du système lui-même et des entrées.

Un système est dit ***multivariable*** s'il comporte plusieurs entrées ou sorties. Dans le cas contraire il est dit ***monovariable***.

Ces entrées et sorties sont décrites par leurs évolutions temporelles : ce sont des fonctions du temps. Les systèmes sont alors dits ***temporels***.

I-2 Causalité et irréversibilité

Les sorties du système dépendent des valeurs présentes et passées des entrées. Elles ne peuvent dépendre des valeurs futures. En d'autres termes, un effet ne peut exister qu'***après*** sa cause. Ce principe important est appelé ***principe de causalité***.

■ Ce principe, qui peut sembler évident, possède des conséquences majeures dans la conception des systèmes. Prenons, par exemple, le cas d'un système monovariable qui aurait pour fonction de construire une sortie qui soit la dérivée de l'entrée :

e(t) → Système → s(t)

Les mathématiques définissent - une dérivée à gauche : $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{e(t) - e(t - \Delta t)}{\Delta t}$

- une dérivée à droite : $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{e(t + \Delta t) - e(t)}{\Delta t}$

La fonction e est dite dérivable à l'instant t si ses deux dérivées, à gauche et à droite, sont les mêmes. La dérivée à l'instant t a alors un sens et n'est autre que :

$$\frac{de}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t+\Delta t) - e(t-\Delta t)}{2\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t) - e(t-\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t+\Delta t) - e(t)}{\Delta t}$$

Mais d'un point de vue physique, seule la dérivée à gauche est déterminable à l'instant t. En effet, elle vérifie le principe de causalité, puisque qu'elle ne dépend que de la valeur présente de l'entrée e(t) et de sa valeur passée e(t-Δt), connue à l'instant t. Par contre, la dérivée à droite nécessite de connaître le futur de l'entrée, e(t+Δt), ce qui est impossible à l'instant t. La dérivée à droite ne vérifie donc pas le principe de causalité.

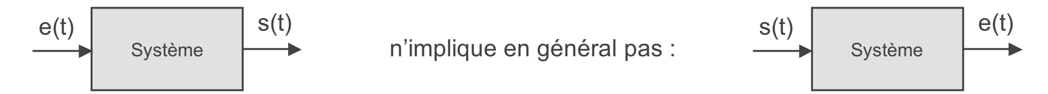
Ainsi, s'il est possible de concevoir un système dont la sortie est la dérivée à gauche de l'entrée, il n'est pas possible de concevoir un système dont la sortie en serait la dérivée à droite. A fortiori un système dérivateur pur au sens mathématique n'est pas concevable.

Par contre, un intégrateur ayant pour sortie $s(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau$ vérifie le principe de causalité.

En effet, seule la connaissance du passé (ici entre 0 et t) de l'entrée est nécessaire à l'élaboration de la sortie à chaque instant. Alors, ce système intégrateur, causal, est ***irréversible*** puisque le dérivateur, nous venons de le voir, n'obéit pas, lui, au principe de causalité.

■ On s'aperçoit alors des conséquences immédiates et capitales du principe de causalité en termes d'irréversibilité des systèmes : ***les effets ne peuvent provoquer leurs causes !***

L'écriture ***orientée*** par bloc fonctionnel, qui précise les entrées et les sorties est, de ce point de vue, fondamentale et bien plus porteuse d'information que le signe « = » des mathématiques :

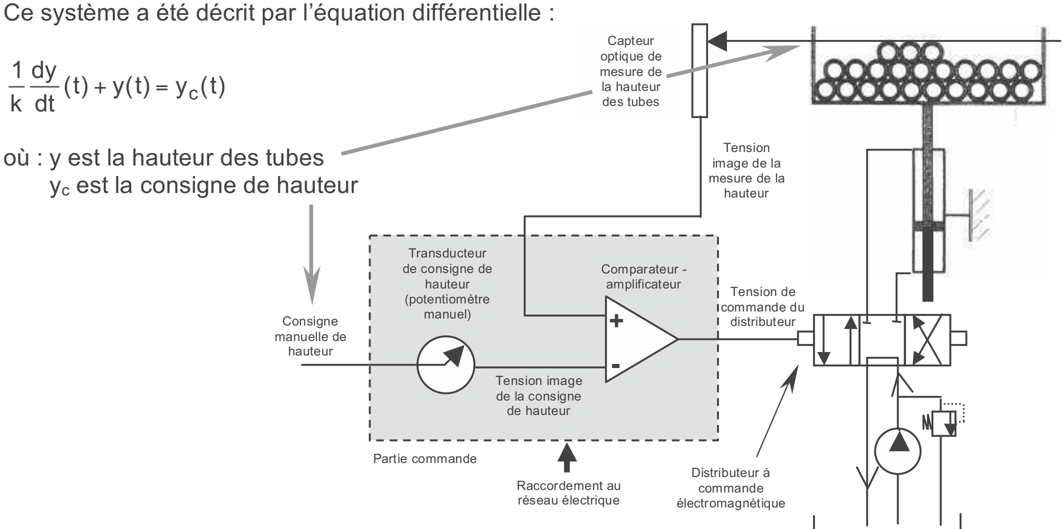


■ **Exemple : système de présentation à hauteur de tubes** (cf. chapitre précédent)

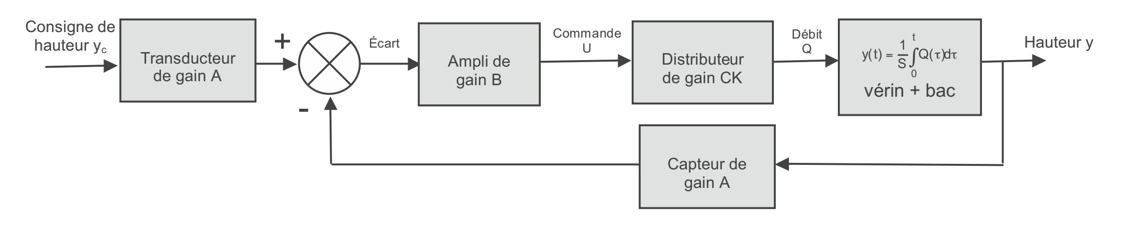
Ce système a été décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{k}\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = y_c(t)$$

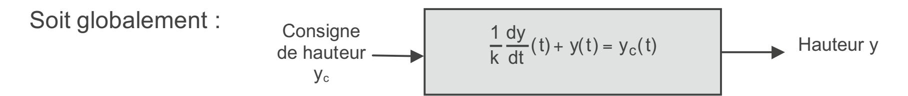
où : y est la hauteur des tubes
y_c est la consigne de hauteur



Le schéma bloc est le suivant :



Soit globalement :



Il est bien évident que, bien que l'équation différentielle puisse être inversée, le système physique correspondant n'a aucun sens : une modification de la hauteur des tubes, sous l'effet d'une perturbation, ne provoque pas une modification de la consigne !

La consigne est une cause de la hauteur des tubes, mais la hauteur des tubes ne peut pas physiquement être une cause de la consigne de hauteur.

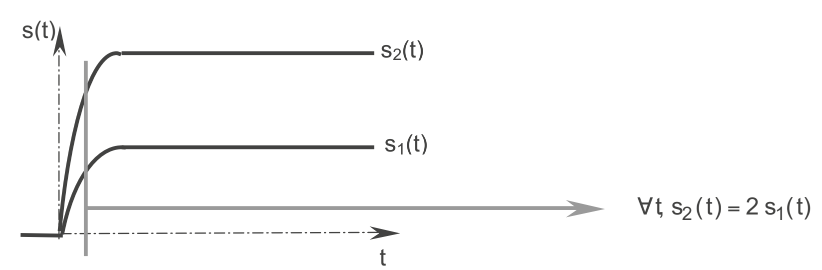
Nous reviendrons plus loin (paragraphe II-1) sur cette notion importante de causalité.

I-3 Linéarité et non linéarité

■ Un système est dit ***linéaire*** si, soumis à une entrée qui est combinaison linéaire de plusieurs entrées, il élabore une sortie qui est la même combinaison linéaire des sorties correspondant à chaque entrée. On dit qu'il satisfait le théorème de ***superposition***.

$e_k(t)$ → Système → $s_k(t)$ ⟹ $\sum \lambda_k e_k(t)$ → Système → $\sum \lambda_k s_k(t)$

Ainsi, pour prendre un exemple simple, si on sollicite le système selon la somme de deux entrées, la sortie est la somme des sorties correspondant à chaque entrée. Ou, encore plus simplement, si on double la valeur d'une entrée en échelon, la sortie est doublée également et à chaque instant :

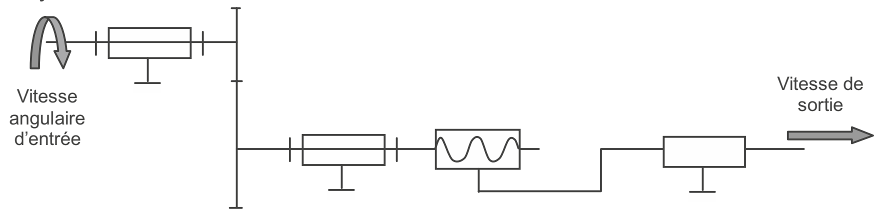


Le système de mise à hauteur de tubes est linéaire. En effet, sa loi de comportement ne fait intervenir que des fonctions qui le sont. Si on double la consigne, la hauteur est à chaque instant doublée également et a fortiori la hauteur atteinte finalement est doublée.

Important : Il suffit qu'en régime établi la linéarité ne soit pas vérifiée pour pouvoir conclure à la non-linéarité du système.

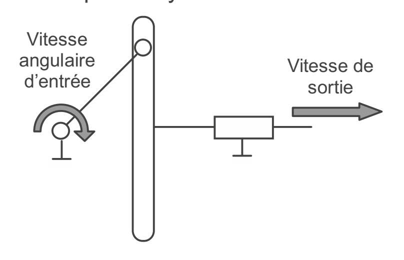
■ En mécanique, à part les engrenages et les systèmes vis-écrou, de nombreuses transformations de mouvement ne sont pas linéaires puisqu'elles font intervenir des grandeurs trigonométriques qui ne le sont pas.

Exemple de système de transformation de mouvement linéaire :



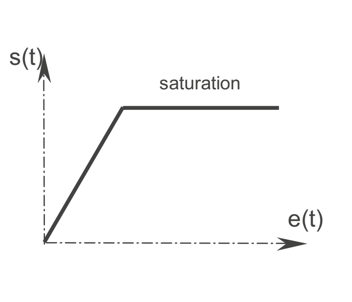
Il s'agit du cas de linéarité le plus élémentaire : sortie et entrée sont proportionnelles.

Exemple de système de transformation de mouvement non linéaire :



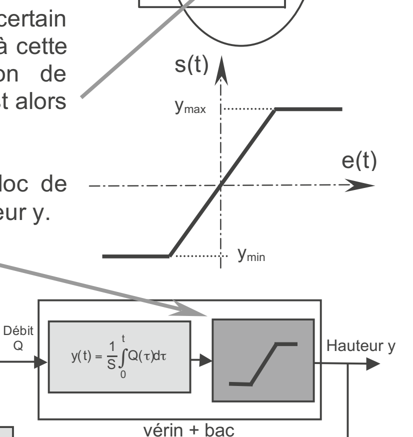
La vitesse de sortie est une fonction sinusoïdale de la vitesse angulaire d'entrée. Or chacun sait que $\sin(2\theta) \neq 2\sin\theta$. Ce système n'est donc pas linéaire.

■ La plupart des systèmes, quand ils présentent un comportement linéaire, ne le présentent que dans certaines plages : ils présentent alors des ***saturations*** qui correspondent à des valeurs maximales ou minimales que peut prendre la sortie. Cela correspond, par exemple, à des butées en mécanique ou à des protections en électricité.



vérin en fin de course

Si on considère encore une fois le système de mise à hauteur de tubes, on s'aperçoit que la hauteur du bac ne peut pas prendre toute valeur. En effet, elle appartient nécessairement à un certain intervalle, au maximum égal à la course du vérin. Il y a existence d'une saturation. Ce système n'est en fait linéaire que sur un certain domaine. Une fois la butée atteinte, la hauteur est maintenue à cette valeur, bien que le distributeur soit toujours en position de commande, puisque l'entrée est maintenue. Le débit d'huile est alors court-circuité par le limiteur de pression.

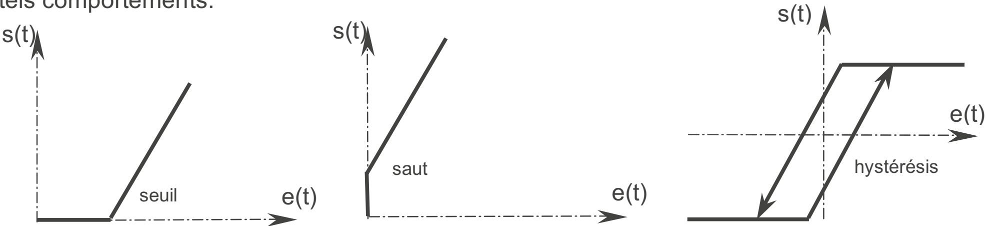


Le schéma bloc peut alors être complété en ajoutant un bloc de saturation de pente 1 et limité aux valeurs extrêmes de la hauteur y.

Consigne de hauteur y_c → Transducteur de gain A → + ⊗ → Écart → Ampli de gain B → Commande U → Distributeur de gain CK → Débit Q → [vérin + bac : $y(t) = \frac{1}{S}\int_0^t Q(\tau)d\tau$ → saturation] → Hauteur y

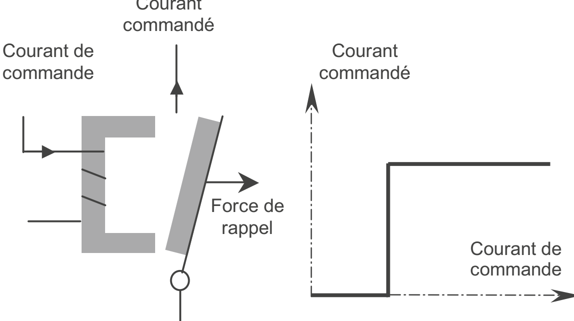
Retour : Capteur de gain A → - (comparateur)

■ Les ***seuils***, les ***sauts*** et plus généralement les phénomènes d'***hystérésis*** sont également sources de non linéarités. Le seuil correspond à une valeur minimale (en valeur absolue) de l'entrée nécessaire pour permettre l'évolution de la sortie. Le saut correspond à une valeur non nulle de la sortie dès que l'entrée évolue. L'hystérésis caractérise les systèmes qui se comportent différemment selon le sens de variation de l'entrée. En mécanique par exemple, les jeux génèrent de tels comportements.



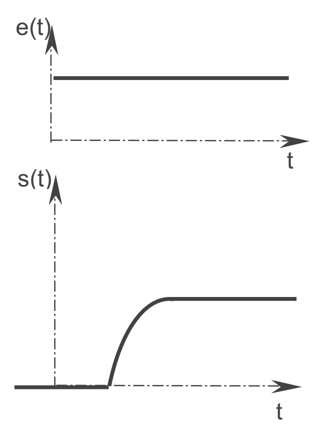
■ Les systèmes tout ou rien dont la sortie ne peut prendre que deux valeurs (ce qui les classe en fait dans les systèmes logiques, voir chapitre 1) sont typiquement non linéaires. Ils peuvent ou non présenter des seuils.

En électromécanique, un interrupteur à relais est un système tout ou rien. À partir d'un certain courant seuil dans le circuit de commande, le champ magnétique généré par la bobine attire l'interrupteur qui se ferme en vainquant la force de rappel, assurée en général par un ressort. Ceci permet au courant de s'établir dans le circuit commandé selon les lois de celui-ci.



■ Citons, pour clore cette liste de non linéarités, le phénomène de retard. Un retard a pour effet de décaler temporairement la sortie. Il ne faut pas confondre retard et seuil. Un seuil traduit l'existence d'une valeur minimale de l'entrée pour que la sortie ait lieu, ce qui n'est pas la même chose. Avec un retard, la sortie est nulle pendant une certaine durée, quelle que soit l'entrée.

Un phénomène de retard peut être dû à un jeu en mécanique ou bien, en mesure, lorsqu'une prise d'information ne s'effectue pas à l'endroit précis où l'on désire contrôler une grandeur et que cette grandeur met un certain temps à se propager. C'est le cas, par exemple en mesure de température, lorsque le capteur est situé à une certaine distance de la zone à contrôler.



I-4 Invariance

L'invariance, ou stationnarité, est la qualité d'un système dont le comportement ne varie pas dans le temps.

II - SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS

Dorénavant, l'étude est limitée aux systèmes linéaires, invariants et monovariables. D'après la linéarité, des systèmes à plusieurs entrées pourront être alors décrits en utilisant le théorème de superposition. Par exemple en superposant l'effet de la consigne à celui d'une perturbation.

II-1 Description par équation différentielle

■ Un tel système peut-être décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants liant sa sortie s(t) à son entrée e(t). Soit dans le cas général :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}(t) + \ldots + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + b_{m-1}\frac{d^{m-1}e}{dt^{m-1}}(t) + \ldots + b_1 \frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t)$$

où les a_i et b_i sont des constantes (caractère invariant du système).

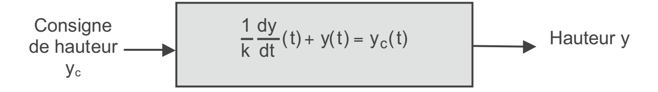
Il est immédiat qu'un tel système est linéaire et invariant, compte tenu de la linéarité de la dérivation. On admettra la réciproque qui est que tout système linéaire invariant monovariable peut être ainsi décrit.

■ **Causalité :**

La causalité impose que dans une telle équation différentielle l'ordre maximum de dérivée de la sortie soit supérieur ou égal à celui de l'entrée, soit : $n \geq m$

En effet, on peut alors réécrire l'équation différentielle après m intégrations successives, afin de supprimer toute dérivation non causale de l'entrée dans le second membre, tout en conservant bien entendu un terme en s(t) dans le premier membre.

Si on reprend l'exemple du système de mise à hauteur de tubes :



l'équation de comportement est bien une équation différentielle qui vérifie le principe de causalité, avec n=1 et m=0.

■ **Termes constants ?**

L'équation différentielle générale présentée ne possède pas de termes constants. En effet, si c'était le cas, on pourrait toujours, par changement de variable, se ramener à une équation sans termes constants. Supposons en effet que l'on ait :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}(t) + \dots a_1 \frac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t) + a = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + b_{m-1}\frac{d^{m-1}e}{dt^{m-1}}(t) + \dots b_1 \frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t) + b$$

On peut alors poser :

$$S(t) = s(t) + \frac{a}{a_0}$$

$$E(t) = e(t) + \frac{b}{b_0}$$

et alors le système peut être décrit par l'équation sans termes constants :

$$a_n \frac{d^n S}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}S}{dt^{n-1}}(t) + \dots a_1 \frac{dS}{dt}(t) + a_0 S(t) = b_m \frac{d^m E}{dt^m}(t) + b_{m-1}\frac{d^{m-1}E}{dt^{m-1}}(t) + \dots b_1 \frac{dE}{dt}(t) + b_0 E(t)$$

II-2 Ordre du système

L'équation différentielle est qualifiée d'équation différentielle d'ordre n. De même, ce nombre n est appelé ***ordre du système***.

C'est un nombre important qui interviendra de nombreuses fois dans les analyses qui vont suivre.

Par exemple le système de mise à hauteur de tubes est un système d'ordre 1, que l'on appelle aussi système du premier ordre.

II-3 Réversibilité

La causalité montre clairement qu'une condition nécessaire pour qu'un système soit réversible est que les deux nombres n et m soient égaux. Inversement, si $n \neq m$ le système est nécessairement irréversible.

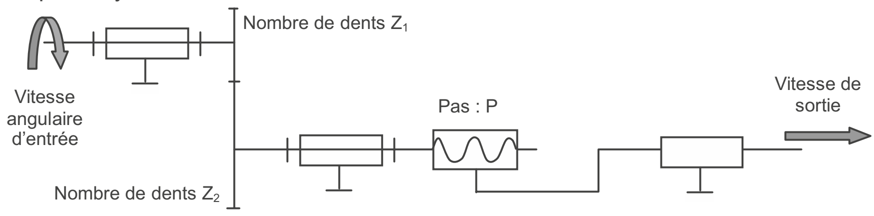
Par exemple le système de mise à hauteur de tubes est irréversible puisque n = 1 et m = 0. Comme il a déjà été souligné, une variation de hauteur n'engendre pas une variation de consigne.

Mais par exemple une équation différentielle du premier ordre telle que:

$$a_1 \frac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t) = b_1 \frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t)$$
peut caractériser un système réversible.

L'exemple le plus simple est encore celui du système d'ordre 0, dit proportionnel, caractérisé par $a_0 s(t) = b_0 e(t)$. On dit alors que ce système est un gain pur, de gain $K = \frac{b_0}{a_0}$.

Soit par exemple le système :



décrit par :

Vitesse angulaire d'entrée ω → Transformation de mouvements → Vitesse de sortie v

Il est caractérisé par l'équation (équation différentielle d'ordre 0) : $v(t) = \frac{Z_1}{Z_2} P.\omega(t)$.

Il s'agit donc d'un gain pur, de gain : $K = \frac{Z_1}{Z_2} P$

Puisque n = m (=0) la réversibilité est ***possible***.

Toutefois, l'égalité de n et de m n'est ici bien clairement qu'une condition ***nécessaire***. La réalisation de la liaison hélicoïdale (géométrie du filet, nature du frottement) peut conduire à de l'irréversibilité, mais pour des raisons alors mécaniques et non causales.

II-4 Exemples

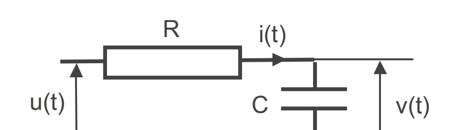
Voici deux exemples supplémentaires de systèmes physiques très simples pour illustrer les propos précédents, l'un dans le contexte de l'électricité, l'autre dans celui de la mécanique.

II-4-1 Système électrique du premier ordre

Cours d'électricité

Soit le filtre RC ci-contre.

La tension aux bornes du circuit RC est notée u(t).
La tension aux bornes du condensateur est notée v(t).



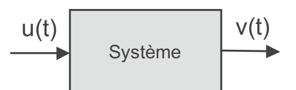
Le courant i(t) parcourant le circuit s'écrit :

- en considérant la résistance : $i(t) = \frac{u(t) - v(t)}{R}$
- en considérant le condensateur : $i(t) = C \frac{dv}{dt}(t)$

On obtient alors, par égalisation, la loi de comportement du système : $RC \frac{dv}{dt}(t) + v(t) = u(t)$

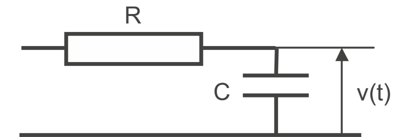
On reconnaît la forme générale d'un système linéaire invariant.
Par ailleurs, cette équation différentielle impose, compte tenu du principe de causalité (vérifié par n=1 et m=0), que la tension v soit la sortie et la tension u l'entrée.

Le système, du premier ordre, peut donc être décrit par le bloc :



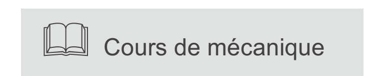
L'inversion des entrées et des sorties n'est pas possible.

Physiquement, cela signifie que si une tension u est imposée aux bornes de l'ensemble, il s'établit un courant à travers la résistance qui charge le condensateur et génère donc une tension v en conséquence à ses bornes.



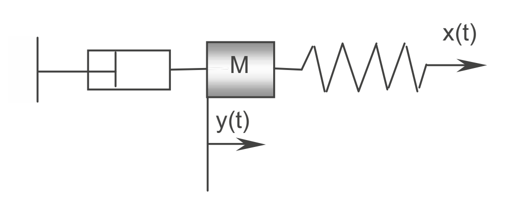
Inversement si une tension v est imposée directement aux bornes du condensateur, celui-ci ne peut pas dans ce cas se décharger à travers la résistance, puisque aucun circuit n'est établi. Il ne peut donc pas exister de courant, donc de tension u.

II-4-2 Système mécanique du second ordre



Soit une masse M ci-contre, insérée entre un ressort et un amortisseur.

Le ressort exerce une force de rappel proportionnelle à son allongement (rapport k).
L'amortisseur exerce une force de rappel proportionnelle à sa vitesse d'allongement (rapport f).
L'ensemble est disposé horizontalement, la pesanteur s'exerce donc perpendiculairement au mouvement sur lequel elle n'agit donc pas.



Le déplacement de l'extrémité du ressort est x(t). Le déplacement de la masse est y(t).

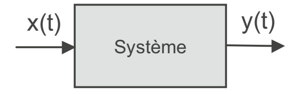
Alors, l'application du principe fondamental de la dynamique à la masse en mouvement par rapport au référentiel supposé galiléen permet d'écrire que :

$$M\,\frac{d^2y}{dt^2}(t) = -\,f\,\frac{dy}{dt}(t) - k\,[y(t) - x(t)]$$

D'où la loi de comportement du système : $M\,\frac{d^2y}{dt^2}(t) + f\,\frac{dy}{dt}(t) + k\,y(t) = k\,x(t)$

On reconnaît la forme générale d'un système linéaire invariant.
Par ailleurs, cette équation différentielle impose, compte tenu du principe de causalité (vérifié par n=2 et m=0), que le déplacement y soit la sortie et le déplacement x l'entrée.

Le système, du second ordre, peut donc être décrit par le bloc :



L'inversion des entrées et des sorties n'est pas possible.

Physiquement, cela signifie que si un déplacement x est imposé à l'extrémité du ressort, il s'ensuit un déplacement y en conséquence de la masse M.

Inversement, si un déplacement y est imposé directement à la masse M, celui-ci n'engendrera pas de déplacement x de l'extrémité du ressort obéissant à l'équation différentielle, mais tout simplement x = y, le ressort se déplaçant alors en bloc, sans déformation.

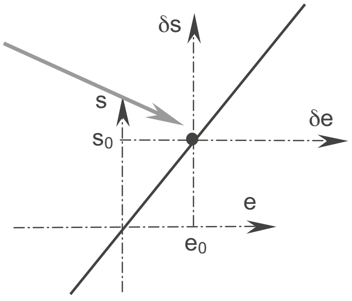
II-5 Point de fonctionnement

Le régime établi d'un système est la situation où toutes les dérivées sont nulles dans l'équation différentielle qui le caractérise. L'entrée et la sortie du système sont alors tels que $a_0 s(\infty) = b_0 e(\infty)$.

On appelle alors ***point de fonctionnement*** (ou point d'équilibre) tout couple entrée-sortie qui peut être atteint en régime établi, c'est-à-dire dans le rapport : b_0 / a_0.

Tous les points de fonctionnement sont donc situés sur une droite appelée ***caractéristique***, passant par l'origine et ayant ce rapport pour pente. Le point (0,0) étant bien entendu un point de fonctionnement.

Cette ***caractéristique linéaire*** est représentative de la linéarité du système.



Alors, par changement de variable, il peut être intéressant, dans certaines situations, de n'étudier que les variations des entrées et sorties autour de ce point de fonctionnement. On pose donc, si (e_0, s_0) est le point de fonctionnement considéré :

$\delta e(t) = e(t) - e_0$

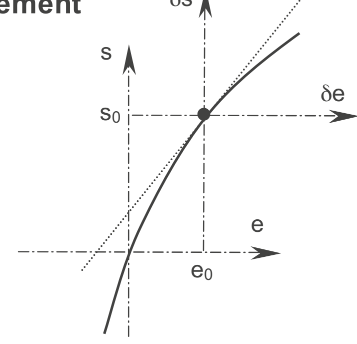
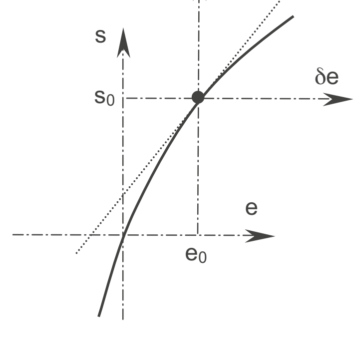
$\delta s(t) = s(t) - s_0$

Alors, si e(t) et s(t) sont solutions de l'équation différentielle, les variations δe(t) et δs(t) le sont également par élimination des termes constants e_0 et s_0, comme signalé au paragraphe II-1.

II-6 Linéarisation autour d'un point de fonctionnement

Si un système n'est pas linéaire, l'ensemble de ses points de fonctionnement ne se situe pas sur une droite : la caractéristique n'est pas linéaire. Toutefois, une modélisation linéarisée peut parfois être effectuée autour d'un point de fonctionnement (e_0, s_0) si les variations δe(t) et δs(t) sont suffisamment faibles.

On assimile pour cela la caractéristique à sa tangente au point de fonctionnement considéré. Ceci permet de simplifier les équations et de pouvoir traiter le système comme un système linéaire.

■ **Exemple :**

Soit un système décrit par l'équation différentielle: $a_1 \dfrac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t) = b_0 \sin(e(t) - \varphi)$

Cette équation, manifestement non linéaire, a pour caractéristique la sinusoïde :

$s = \dfrac{b_0}{a_0} \sin(e - \varphi)$.

Soit par exemple le point de fonctionnement (φ,0). On y définit les variations :

$\delta e(t) = e(t) - \varphi$

$\delta s(t) = s(t)$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$a_1 \frac{d\delta s}{dt}(t) + a_0 \delta s(t) = b_0 \sin(\delta e(t))$$

Si les variations de l'entrée sont suffisamment faibles autour de la valeur φ, on pourra confondre sin(δe(t)) et δe(t) : il s'agit de l'approximation classique dite des petits angles. Alors l'équation différentielle devient l'équation linéaire approchée :

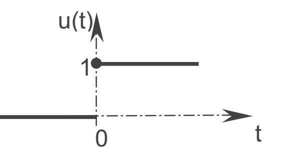
$a_1 \dfrac{d\delta s}{dt}(t) + a_0 \delta s(t) = b_0 \delta e(t)$ Le système est dit ***linéarisé*** autour du point de fonctionnement (φ,0).

III - TRANSFORMATION DE LAPLACE

Les systèmes linéaires invariants sont décrits par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Lorsque les systèmes interagissent entre eux, par exemple pour élaborer un système asservi, la description interconnecte ces équations différentielles et l'on obtient des systèmes d'équations différentielles qui peuvent rapidement devenir compliqués. La transformation de Laplace permet d'exploiter une méthode de calcul (dite calcul symbolique) mise au point par Heaviside à la fin du XIXème siècle. Cette méthode permet de remplacer les équations différentielles par des équations algébriques, afin d'en faciliter la manipulation.

III-1 Définitions

III-1-1 Fonction causale et fonction existence



Une fonction f de la variable t est dite causale si : $t < 0 \Rightarrow f(t) = 0$.
En pratique la variable t sera le temps.
On définit alors la fonction existence u par :
$t < 0 \Rightarrow u(t) = 0$
$t \geq 0 \Rightarrow u(t) = 1$
c'est-à-dire l'échelon unitaire.
Elle est également appelée parfois fonction de Heaviside, ou encore fonction unité.

Toute fonction non causale est transformée en une fonction causale par multiplication par la fonction existence.

III-1-2 Transformée de Laplace

On appelle transformée de Laplace d'une fonction causale f, la fonction F, si elle existe (condition de convergence de l'intégrale), qui à tout nombre complexe p associe le nombre complexe :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

■ Il sort du cadre de cet ouvrage d'expliciter les conditions de convergence de cette intégrale qui seront donc toujours implicitement vérifiées. Disons seulement que cela suppose que :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t)e^{-pt} = 0$$

ce qui est le cas pour toute fonction f usuelle, compte tenu de la rapidité de décroissance de l'exponentielle.

NB : la limite d'un nombre complexe doit s'entendre au sens de son module.

■ Le nombre complexe p, ***homogène à l'inverse d'un temps***, est appelé opérateur de Laplace ou opérateur symbolique. On pourra utilement se souvenir qu'il est noté s dans les pays de langues anglosaxones.

Si nécessaire, on posera : $p = \sigma + j\omega$, avec $j^2 = -1$.
σ est la partie réelle de p,
ω est la partie imaginaire de p.
Ces deux nombres réels sont également homogènes à l'inverse d'un temps, bien entendu.

La fonction f est appelée transformée de Laplace inverse de F, ou fonction originale de F. Mais l'inversion de la transformée de Laplace n'est pas d'un usage pratique en automatique où l'utilisation de tables de transformées sera préférée, comme nous allons le voir.

Les notations usuelles sont : $F = \mathcal{L}(f)$ et alors $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$.

III-2 Premières propriétés

■ Linéarité

De la linéarité de l'intégration découle immédiatement celle de la transformation de Laplace, soit :

$$\mathcal{L}[a.f(t)+b.g(t)] = a.\mathcal{L}[f(t)] + b.\mathcal{L}[g(t)]$$

■ Théorème de la dérivation

Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$, alors $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t)e^{-pt}dt$

Or, l'intégration par parties nous permet d'écrire que pour toutes fonctions u et v :

$$\int_a^b \frac{du}{dt}(t).v(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u(t).\frac{dv}{dt}(t)dt$$

Ainsi, en intégrant par parties la transformée de la dérivée, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t)e^{-pt}dt = [f(t).e^{-pt}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\frac{d}{dt}e^{-pt}dt$$

où : $[f(t).e^{-pt}]_0^{+\infty} = 0 - f(0) = -f(0)$ car la définition de la transformée impose $\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt} = 0$

et : $\int_0^{+\infty} f(t)\frac{d}{dt}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)(-pe^{-pt})dt = -p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$, puisque p est indépendant de l'intégration.

soit donc simplement : $\int_0^{+\infty} f(t)\frac{d}{dt}e^{-pt}dt = -p\ \mathcal{L}[f(t)]$

Donc la transformée de la dérivée est : $\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t)e^{-pt}dt = -f(0) + p\ \mathcal{L}[f(t)]$. D'où le résultat à retenir :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] = p\ \mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

Ainsi, on peut calculer les dérivées successives d'une fonction :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}(t)\right] = p\ \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] - \frac{df}{dt}(0) = p\left[\ p\ \mathcal{L}[f(t)] - f(0)\ \right] - \frac{df}{dt}(0) = p^2\ \mathcal{L}[f(t)] - p\ f(0) - \frac{df}{dt}(0)$$

Soit, d'une manière générale :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}(t)\right] = p^n\ \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k}\frac{d^kf}{dt^k}(0)$$

En pratique, la dérivation sera surtout utilisée avec des ***conditions initiales nulles***, pour la fonction f et toutes ses dérivées (conditions dites ***de Heaviside***). Il viendra alors :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] = p\ \mathcal{L}[f(t)] \quad \text{et, d'une manière générale :} \quad \mathcal{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}(t)\right] = p^n\ \mathcal{L}[f(t)]$$

La multiplication par p dans le domaine symbolique de Laplace est équivalente à la dérivation dans le domaine temporel, sous les conditions de Heaviside.

Ce résultat est fondamental.

■ **Théorème de l'intégration**

Le résultat précédent : $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] = p\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$

conduit à : $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{p}\left[\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] + f(0)\right]$

Ainsi, si $f(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$, alors : $\mathcal{L}\left[\int_0^t g(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{p}\left[\ \mathcal{L}[g(t)] + \int_0^0 g(\tau)d\tau\ \right] = \frac{1}{p}\mathcal{L}[g(t)]$

D'où le résultat à retenir :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t g(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{p}\mathcal{L}[g(t)]$$

La division par p dans le domaine symbolique de Laplace est équivalente à l'intégration dans le domaine temporel.

■ **Théorème de la valeur initiale**

D'après le théorème de la dérivation : $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] = p\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$

Donc, $p\,\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] + f(0) = = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t)e^{-pt}dt + f(0).$

Soit en passant à la limite :

$$\lim_{p\to+\infty} p\,\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t)e^{-pt}dt + f(0)$$

$$\lim_{p\to+\infty} p\,\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) \lim_{p\to+\infty} e^{-pt}dt + f(0)$$

or**,** sous certaines ***réserves de convergence*** de l'intégrale non développées ici :

$$\lim_{p\to+\infty} e^{-pt} = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) \lim_{p\to+\infty} e^{-pt}dt = 0$$

Donc $\lim_{p\to+\infty} p\,\mathcal{L}[f(t)] = f(0)$

Ce résultat est appelé théorème de la valeur initiale, on le retiendra plutôt sous la forme usuelle :

$$\lim_{t\to0} f(t) = \lim_{p\to+\infty} p\,F(p)$$

puisque : $\lim_{t\to0} f(t)$ n'est autre que la valeur initiale f(0) prise par la fonction f

et il a été convenu de noter également $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$.

Par ailleurs, les ***réserves de convergence*** exprimées plus haut limitent la validité de ce résultat à l'existence de la limite de pF(p).

■ **Théorème de la valeur finale**

Cette fois on cherche la limite quand p tend vers 0 :

$$\lim_{p\to0} p\,\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{p\to0} \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t)e^{-pt}dt + f(0)$$

$$\lim_{p\to0} p\,\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) \lim_{p\to0} e^{-pt}dt + f(0)$$

or, sous certaines ***réserves de convergence*** de l'intégrale non développées ici :

$$\lim_{p\to 0} e^{-pt} = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) \lim_{p\to 0} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) dt$$

Donc $\lim_{p\to 0} p\, \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) dt + f(0) = \lim_{t\to +\infty} f(t) - f(0) + f(0) = \lim_{t\to +\infty} f(t)$

Ce résultat est appelé théorème de la valeur finale, on le retiendra plutôt sous la forme usuelle :

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\, F(p)$$

Par ailleurs, les ***réserves de convergence*** exprimées plus haut limitent la validité de ce résultat à l'existence de la limite de f(t).

■ Théorème du retard

Considérons la fonction g qui retarde les valeurs prises par la fonction causale f d'un temps τ, soit donc : $g(t) = f(t - \tau)$

Puisque $g(t) = 0$ pour $t < \tau$ (car f est causale), $\int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt = \int_\tau^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt$.

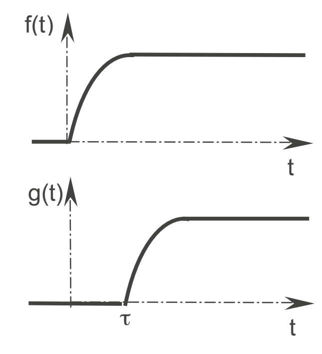
Donc : $\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt = \int_\tau^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt = \int_\tau^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt$.

Si on effectue alors le changement de variable $\delta = t - \tau$, il vient :

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{+\infty} f(\delta) e^{-p(\tau+\delta)} d\delta = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(\delta) e^{-p\delta} d\delta$$

Où on reconnaît : $\int_0^{+\infty} f(\delta) e^{-p\delta} d\delta = \mathcal{L}[f(t)]$

Ainsi : $\mathcal{L}[g(t)] = e^{-p\tau} \mathcal{L}[f(t)]$



D'où le résultat appelé ***théorème du retard*** :

$$g(t) = f(t - \tau) \Rightarrow \mathcal{L}[g(t)] = e^{-p\tau} \mathcal{L}[f(t)]$$

■ Produit de fonctions

Il reste important, pour clore cette liste de propriétés, de souligner que la transformée de Laplace du produit de deux fonctions ***n'est pas*** le produit des transformées. Elle fait appel à la notion de produit de convolution, hors de propos ici. On retiendra donc que :

$$\mathcal{L}[f(t) \times g(t)] \neq \mathcal{L}[f(t)] \times \mathcal{L}[g(t)]$$

!

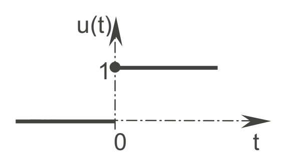
■ Autres résultats

La transformation de Laplace possède de nombreuses propriétés qui ne seront pas utiles pour les systèmes automatiques objets de cet ouvrage et donc non exposées. On pourra se référer à des ouvrages de mathématiques pour approfondir ses connaissances.

III-3 Calculs de transformées

Seules quelques transformées de Laplace sont utiles en automatique. Ce paragraphe a pour objectif d'établir les plus courantes.

■ Rappel préalable



La transformation de Laplace s'opère sur des fonctions causales. On utilisera pour cela, si nécessaire, la multiplication préalable par la fonction existence u, dont on rappelle ici la définition :

$t < 0 \Rightarrow u(t) = 0$

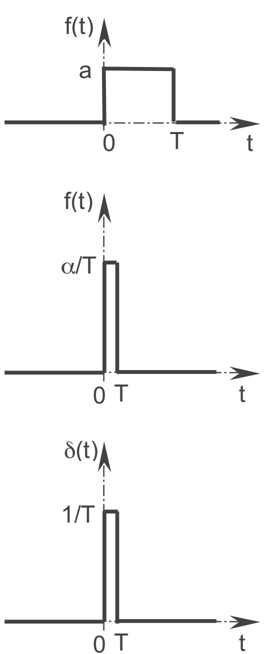
$t \geq 0 \Rightarrow u(t) = 1$

■ Échelon

Soit la fonction échelon définie par f(t) = a u(t).
Sa transformée de Laplace est :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} a e^{-pt} dt = -\frac{a}{p}[e^{-pt}]_0^{+\infty} = -\frac{a}{p}[0-1] = \frac{a}{p}$$

■ Créneau, impulsion et Dirac



Soit la fonction créneau de niveau a définie par :
$0 \leq t \leq T \Rightarrow f(t) = a$
f(t) = 0 sinon.
Sa transformée de Laplace est :

$$F(p) = \int_0^{T} a e^{-pt} dt = -\frac{a}{p}[e^{-pt}]_0^{T} = -\frac{a}{p}[e^{-pT}-1] = \frac{a}{p}[1-e^{-pT}]$$

On appelle impulsion une fonction créneau de durée infiniment brève. L'aire du créneau est appelée le ***poids*** de l'impulsion, noté α.

Il s'agit donc du créneau précédent avec : $a = \dfrac{\alpha}{T}$ et $T \to 0$

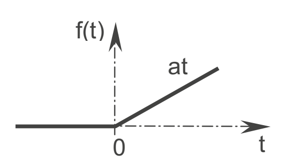
Sa transformée de Laplace s'obtient alors en passant à la limite :

$$F(p) = \lim_{T\to 0} \frac{\alpha}{pT}[1-e^{-pT}] = \alpha \lim_{T\to 0} \frac{1-e^{-pT}}{pT} = \alpha$$

La transformée de Laplace d'une impulsion est donc son poids.

Le cas le plus courant est l'impulsion de poids 1, appelée ***impulsion de Dirac,*** ou plus simplement ***Dirac***, et notée $\delta(t)$. Sa transformée de Laplace est l'unité.

■ Rampe et fonctions puissance



Soit la fonction rampe de pente a définie par f(t) = at u(t).
On pourrait calculer sa transformée de Laplace à partir de sa définition. Toutefois, cette rampe n'est autre que l'intégrale depuis l'instant initial de la fonction créneau de niveau a, dont la transformée est a/p. Alors, puisque l'intégration dans le domaine temporel correspond à la division par p dans le domaine de Laplace, il est immédiat que la transformée de la rampe f(t) = at u(t) est :

$$F(p) = \frac{a}{p^2}$$

Cette logique peut se poursuivre par intégrations successives pour montrer que la transformée de $f(t) = at^n\,u(t)$ est $F(p) = a\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

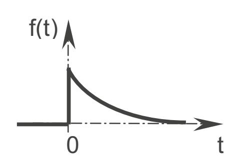
■ Exponentielle décroissante

Soit la fonction exponentielle causale <u>convergente</u> définie par :
$f(t) = u(t)e^{-at}$.
Sa transformée de Laplace est :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}dt = -\frac{1}{p+a}\left[e^{-(p+a)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{p+a}[0-1] = \frac{1}{p+a}$$

sous réserve de convergence.



■ Cosinus et cosinus

Soient les fonctions causales cosinus et sinus :
$f(t) = u(t)\cos\omega t$, de transformée de Laplace $F(p)$,
$g(t) = u(t)\sin\omega t$, de transformée de Laplace $G(p)$.
On sait que $f(t) - j\,g(t) = \cos\omega t - j\sin\omega t = e^{-j\omega t}$.

Par ailleurs, la transformée de cette exponentielle est : $\dfrac{1}{p + j\omega}$

Ceci se démontre comme précédemment.

La linéarité permet donc d'écrire que $F(p) - j\,G(p) = \dfrac{1}{p + j\omega}$

Or, on peut écrire classiquement que :

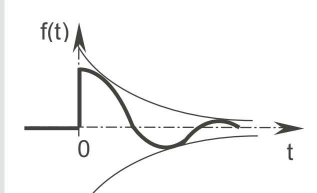
$$\frac{1}{p+j\omega} = \frac{p-j\omega}{(p+j\omega)(p-j\omega)} = \frac{p}{p^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Donc, par identification, on en déduit les transformées cherchées :

$$F(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \quad \text{et} \quad G(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

■ Cosinus et cosinus amortis

Soient les fonctions causales <u>convergentes</u> :
$f(t) = u(t)\;e^{-at}\cos\omega t$, de transformée de Laplace $F(p)$,
$g(t) = u(t)\;e^{-at}\sin\omega t$, de transformée de Laplace $G(p)$,
avec a réel positif.



On sait que $f(t) - j\,g(t) = e^{-at}[\cos\omega t - j\sin\omega t] = e^{-at}e^{-j\omega t} = e^{-(a+j\omega)t}$.

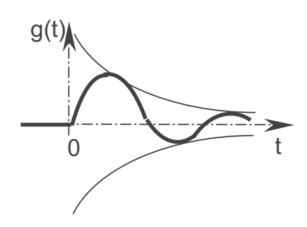
Par transformation de Laplace il vient donc : $F(p) - j\,G(p) = \dfrac{1}{p + (a + j\omega)}$

Sous réserve de convergence.

Or, on peut écrire classiquement que :



$$\frac{1}{(p+a)+j\omega} = \frac{p+a-j\omega}{(p+a+j\omega)(p+a-j\omega)} = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$$



Donc, par identification, on en déduit les transformées cherchées :

$$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2} \quad \text{et} \quad G(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$$

■ Table récapitulative

La table suivante rassemble les différentes transformées qui viennent d'être établies. Il est très utile de les connaître. Elles permettent de résoudre la grande majorité des problèmes rencontrés.

f(t) causale	F(p)	f(t) causale	F(p)
Impulsion de poids a	a	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
a	$\frac{a}{p}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
at	$\frac{a}{p^2}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$a\,t^n$	$a\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$		

Quelques transformées supplémentaires sont fournies en fin d'ouvrage dans une fiche ressource.

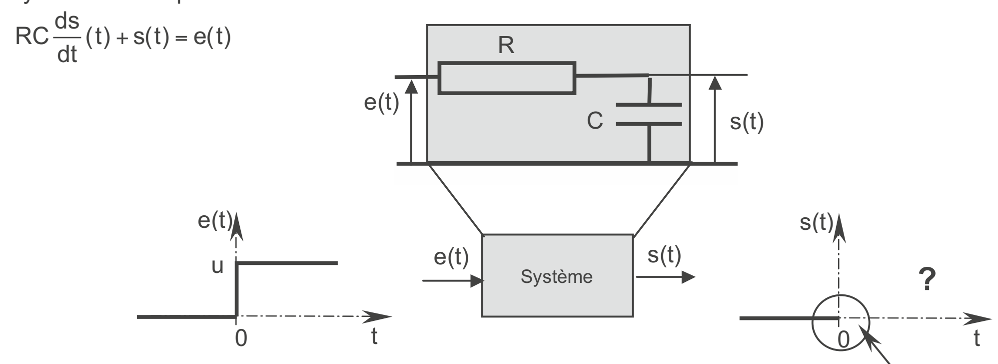

Fiche ressource "table des transformées de Laplace"

III-4 Résolution d'une équation différentielle à l'aide de la transformation de Laplace

III-4-1 Exemple

Soit le filtre RC ci-dessous, déjà modélisé. L'entrée est la tension aux bornes du circuit RC, notée e(t). La sortie est la tension aux bornes du condensateur, notée s(t). La loi de comportement du système est l'équation différentielle :

$$RC\frac{ds}{dt}(t)+s(t)=e(t)$$



On se place dans la situation où le condensateur est initialement non chargé. Soit s(0) = 0.
À cet instant, le système est soumis à un échelon de tension e(t) = u (Volts). On cherche alors l'évolution s(t) de la tension aux bornes du condensateur.

Pour cela l'équation différentielle va être transformée par la transformation de Laplace. On note E(p) la transformée de e(t) et S(p) la transformée de s(t).

Par ailleurs ***puisque s(0) = 0*** la transformée de $\frac{ds}{dt}(t)$ est pS(p) d'après le théorème de dérivation.

Alors, compte tenu de la linéarité de la transformation de Laplace, l'équation différentielle se transforme en :
RC pS(p) + S(p) = E(p)

L'équation différentielle est ***transformée en une équation algébrique*** dans le domaine symbolique de Laplace.

Elle peut encore s'écrire : $S(p)=\dfrac{1}{1+RCp}E(p)$

NB : cette écriture va permettre (cf. IV) de définir la fonction de transfert du système.

Puisque e(t) est un ***échelon*** de niveau u, on sait que $E(p)=\dfrac{u}{p}$. (Cf. table des transformées)

Donc $S(p)=\dfrac{1}{1+RCp}\dfrac{u}{p}=\dfrac{u}{p(1+RCp)}$

Reste alors à effectuer la transformation inverse afin de trouver l'original s(t) de S(p) cherché.

Pour cela la méthode la plus simple consiste à modifier l'écriture de S(p) pour faire apparaître des transformées connues. Ici on reconnaît deux formes de transformées figurant dans la table :

$\dfrac{1}{p}$ qui est la transformée de 1,

$\dfrac{1}{p+a}$ qui est la transformée de e^{-at}.

On décompose alors S(p) sous la forme $S(p)=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{1+RCp}$, où il reste à déterminer A et B.

Fiche ressource "décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples"

Ces coefficients A et B peuvent s'obtenir par mise au même dénominateur, puis identification :

$S(p)=\dfrac{A(1+RCp)+Bp}{p(1+RCp)}=\dfrac{A+(RCA+B)p}{p(1+RCp)}$ qui doit être identifié à : $S(p)=\dfrac{u}{p(1+RCp)}$

D'où :
A = u
B= – uRC

Et donc : $S(p)=\dfrac{u}{p}-\dfrac{uRC}{1+RCp}=\dfrac{u}{p}-\dfrac{u}{p+\dfrac{1}{RC}}$

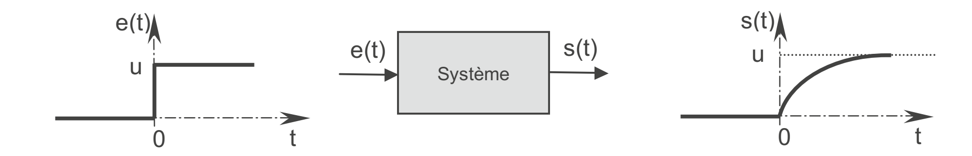
Où on reconnaît :

$\dfrac{1}{p}$ qui est la transformée de 1

$\dfrac{1}{p+\dfrac{1}{RC}}$ qui est la transformée de $e^{-\frac{1}{RC}t}$.

Alors, la linéarité permet d'écrire, par transformation inverse, que $\boxed{s(t)=u[1-e^{-\frac{1}{RC}t}]}$

qui est donc l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur lorsque le circuit est soumis à un échelon u de tension :



■ **Remarque :**

Bien évidemment, pour une équation différentielle aussi simple que l'équation ici rencontrée, les méthodes de résolution directe par résolution de l'équation sans second membre et recherche d'une solution particulière, sont plus performantes que la transformation de Laplace.

 Fiche ressource "équations différentielles linéaires à coefficients constants"

Toutefois l'objectif était ici d'introduire, sur un exemple simple, une méthodologie générale qui sera utile pour des équations plus complexes.

III-4-2 Méthodologie générale

La méthode générale de résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants à l'aide de la transformation de Laplace, introduite dans l'exemple précédent, peut alors être synthétisée schématiquement de la manière suivante :

Système décrit dans le domaine temporel

e(t)

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}}(t) + \ldots + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t)$$
$$= b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}}(t) + \ldots + b_1 \frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t)$$

s(t)

Transformation de la fonction d'entrée par la transformation de Laplace : il s'agit en général d'une fonction se trouvant dans la table : échelon, rampe, sinus, etc.

Transformation de l'équation différentielle par la transformation de Laplace, en particulier le théorème de la dérivation (attention aux éventuelles conditions initiales non nulles), en **une équation polynomiale.**

Transformation inverse pour obtenir la fonction de sortie par décomposition de sa transformée en fonctions élémentaires se trouvant dans la table.

E(p)

Système décrit dans le domaine de Laplace permettant d'exprimer la transformée de la sortie S(p) sous forme d'une fraction de polynômes.

S(p)

III-5 Usage du théorème de la valeur finale

Pour terminer l'exposé de la transformation de Laplace et de ses propriétés, il convient de revenir sur l'important théorème de la valeur finale, dont on rappelle ci-dessous l'énoncé :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p\, F(p) \quad \text{si cette limite est finie}$$

Cette propriété, en pratique plus couramment utile que le théorème de la valeur initiale, permet de déterminer la valeur limite de la réponse d'un système, par exemple pour déterminer sa précision

statique, sans avoir besoin d'en connaître l'expression temporelle, c'est-à-dire sans avoir besoin de résoudre l'équation différentielle qui régit le système. Il faudra toutefois s'assurer de l'existence de cette limite.

■ **Exemple 1**

Soit le système régit par l'équation différentielle : $\frac{ds}{dt}(t)+s(t)=e(t)$.

Avec pour condition initiale s(0) = 0 ce système est soumis à une entrée en échelon unitaire e(t) = 1 pour $t \geq 0$.

On cherche la valeur limite de sa réponse : $\lim_{t\to+\infty} s(t)$.

● Pour cela une première méthode consiste à résoudre l'équation différentielle dans le domaine temporel : $\frac{ds}{dt}(t)+s(t)=1$ pour t≥0.

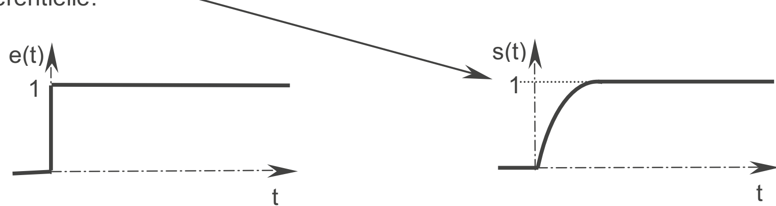
La solution générale de l'équation sans second membre est classiquement de la forme $s(t)=ke^{-t}$.

Une solution de l'équation avec second membre étant s(t)=1, la solution de l'équation différentielle s'avère donc de la forme $s(t)=1+ke^{-t}$.

La condition initiale s(0)=0 impose k = -1. Donc finalement le système réagit avec la sortie :

$s(t)=1-e^{-t}$

où il est clair que $\lim_{t\to+\infty} s(t)=1$, ce qui répond à la question mais en ayant nécessité la résolution de l'équation différentielle.



● La transformation de Laplace offre une méthode qui ne nécessite pas la résolution de l'équation différentielle.

Comme s(0)=0 (condition de Heaviside) la transformée de $\frac{ds}{dt}(t)$ est pS(p) et la transformation de l'équation différentielle s'écrit alors : pS(p) + S(p) = E(p).

Soit encore : $S(p)=\frac{1}{1+p}E(p)$.

Par ailleurs, l'entrée étant un échelon unitaire, sa transformée est $E(p)=\frac{1}{p}$, ce qui donne finalement pour transformée de la sortie : $S(p)=\frac{1}{p(1+p)}$.

Alors le théorème de la valeur finale permet d'écrire que $\lim_{t\to+\infty} s(t)=\lim_{p\to 0} pS(p)=\lim_{p\to 0}\frac{1}{1+p}=1$.

On retrouve le même résultat que par la méthode temporelle, mais ***sans avoir eu à résoudre l'équation différentielle***, ce qui est un avantage notable.

■ **Exemple 2**

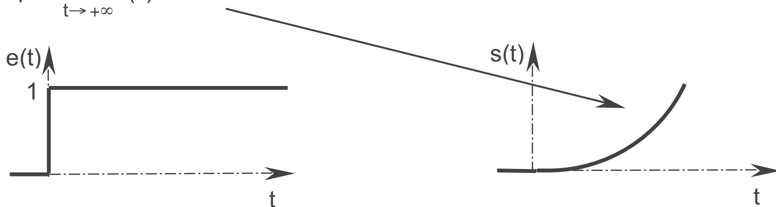
Soit maintenant le système régit par l'équation différentielle : $\frac{ds}{dt}(t)-s(t)=e(t)$.

Avec pour condition initiale s(0) = 0 ce système est soumis comme le précédent à une entrée en échelon unitaire e(t) =1 pour $t \geq 0$.

On cherche également la valeur limite de sa réponse : $\lim_{t \to +\infty} s(t)$.

● Dans le domaine temporel, on écrit l'équation différentielle : $\frac{ds}{dt}(t) - s(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

La solution générale de l'équation sans second membre est cette fois de la forme $s(t) = ke^{+t}$.
Une solution de l'équation avec second membre étant $s(t) = -1$, la solution de l'équation différentielle s'avère donc de la forme $s(t) = -1 + ke^{+t}$.
La condition initiale s(0)=0 impose k = 1. Donc finalement le système réagit avec la sortie :
$s(t) = -1 + e^{+t}$
où il est clair que $\lim_{t \to +\infty} s(t) = +\infty$.



● ***La limite n'étant pas finie*** (la sortie est divergente, le système est instable), ***le théorème de la valeur finale ne s'applique pas.***

On peut le vérifier par la transformation de l'équation différentielle qui s'écrit : pS(p) - S(p) = E(p).
Soit : $S(p) = \frac{1}{p-1} E(p)$.

L'entrée étant un échelon unitaire, sa transformée est $E(p) = \frac{1}{p}$, ce qui donne finalement pour transformée de la sortie : $S(p) = \frac{1}{p(p-1)}$.

Alors $\lim_{p \to 0} pS(p) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p-1} = -1$.

On observe alors bien que dans ce cas : $\lim_{t \to +\infty} s(t) \neq \lim_{p \to 0} pS(p)$.

■ Conclusion

On retiendra qu'il convient de bien s'assurer de la convergence de la fonction s avant de conclure que $\lim_{p \to 0} pS(p) = \lim_{t \to +\infty} s(t)$.
L'étude approfondie de la ***stabilité*** des systèmes linéaires (cf. IV-8) permettra de s'assurer de cette convergence sans avoir à déterminer s(t) ce qui enlèverait alors tout intérêt à la méthode.

Par ailleurs, il est clair que si $\lim_{p \to 0} pS(p)$ est infinie, alors nécessairement $\lim_{t \to +\infty} s(t)$ l'est également.
En effet, il suffit de raisonner par l'absurde : si cette limite était finie, le théorème de la valeur finale s'appliquerait et montrerait alors que $\lim_{p \to 0} pS(p)$ lui est égale, donc finie.

En résumé :

- Si $\lim_{p \to 0} pS(p)$ est infinie, alors $\lim_{t \to +\infty} s(t)$ l'est également : s est divergente.
- Si $\lim_{p \to 0} pS(p)$ est finie, alors $\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} pS(p)$, à condition d'avoir la certitude que s est bien convergente. Dans le cas contraire $\lim_{p \to 0} pS(p)$ n'a aucun sens.

IV - FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE INVARIANT

La transformation de Laplace permet de résoudre simplement les équations différentielles régissant le comportement des systèmes linéaires invariants ou de déterminer leur comportement limite. Elle permet aussi et surtout, de définir l'importante notion de fonction de transfert, appelée aussi transmittance. Celle-ci donne une image synthétique et intrinsèque d'un système et permet des écritures algébriques simples dans le cas de systèmes asservis représentés par des schémas blocs.

IV-1 Définition

Soit un système linéaire invariant monovariable décrit par l'équation différentielle suivante, liant sa sortie s(t) à son entrée e(t), comptabilisées à partir d'un point de fonctionnement :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}(t) + \dots + a_1\frac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t) = b_m\frac{d^m e}{dt^m}(t) + b_{m-1}\frac{d^{m-1}e}{dt^{m-1}}(t) + \dots + b_1\frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t)$$

où les a_i et b_i sont des constantes.

Sous les conditions de Heaviside (conditions initiales toutes nulles), il vient, par la transformation de Laplace et en particulier le théorème de la dérivation, l'équation polynomiale :

$$a_n p^n S(p) + a_{n-1}p^{n-1}S(p) + \dots + a_1 pS(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + b_{m-1}p^{m-1}E(p) + \dots + b_1 pE(p) + b_0 E(p)$$

Soit :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} = H(p)$$

Cette fraction rationnelle est appelée ***fonction de transfert*** du système.

Elle est usuellement notée H(p) et le système sera alors représenté schématiquement par :

E(p) ⟶ [H(p)] ⟶ S(p)

Représentation à laquelle il convient d'associer la loi de comportement : S(p) = H(p).E(p).
Ainsi, dans le domaine symbolique de Laplace, le système multiplie l'entrée à laquelle il est soumis par sa fonction de transfert.

IV-2 Vocabulaire

■ Le dénominateur de la fonction de transfert $a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n$ est appelé ***polynôme caractéristique*** de la fonction de transfert. Son degré n est appelé ***ordre*** de la fonction de transfert, ou plus simplement du système. On rappelle que pour un système causal $n \geq m$. Ce polynôme caractéristique n'est autre que le polynôme caractéristique de l'équation différentielle. Il sera très important pour l'étude de la stabilité du système.

■ Les racines du numérateur sont appelées ***zéros*** de la fonction de transfert, celles du dénominateur, ***pôles*** de la fonction de transfert. Ces pôles et zéros sont des nombres complexes, éventuellement nuls. Ils peuvent être explicités en écrivant la fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = k\frac{(p - z_1)(p - z_2)...(p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2)...(p - p_n)}$$

Si un même pôle p_i ou un même zéro z_i n'apparaît qu'une seule fois dans cette écriture décomposée, il est dit ***simple***. Sinon, il est dit ***multiple***.

■ Une autre écriture de la fonction de transfert est la suivante : $H(p) = \frac{K}{p^\alpha}\frac{n(p)}{d(p)}$ avec n(0)=d(0)=1,

soit donc plus visuellement sous l'allure : $H(p) = \frac{K}{p^\alpha}\frac{1+...}{1+...}$

Cette écriture, qui sera très utile, est appelée ***forme canonique*** de la fonction de transfert. Elle met en évidence :

- Sa ***classe*** α, qui est la différence entre le nombre de pôles et de zéros nuls. C'est un nombre nécessairement positif ou nul pour les systèmes causaux : $\alpha \geq 0$.
- Son ***gain* K**, qui est homogène au rapport des dimensions de la sortie et de l'entrée, divisé par le temps à la puissance α. En effet, il faut se rappeler que l'opérateur de Laplace p est homogène à l'inverse d'un temps.

IV-3 Réponse impulsionnelle - notion de signature

On rappelle que la réponse impulsionnelle d'un système est l'évolution de sa sortie suite à une entrée idéalement représentée par une impulsion de Dirac. Par ailleurs, cette réponse permet de caractériser la stabilité du système : un système est stable si, soumis à une impulsion de Dirac, il revient vers son état initial.

Exemple de comportement stable :



L'entrée du système étant une impulsion de poids unitaire, elle s'écrit, dans le domaine de Laplace E(p) = 1 .

Sa sortie s'écrit donc dans le domaine de Laplace : S(p) = H(p).E(p) = H(p).

Ainsi la fonction de transfert du système n'est autre que l'image par la transformation de Laplace de sa réponse impulsionnelle. Celle-ci porte donc en elle toute l'information sur le système. C'est pourquoi elle est aussi appelée ***signature*** du système.

IV-4 Analyse de la stabilité à partir des pôles de la fonction de transfert

Soit un système obéissant à l'équation différentielle :

$$a_n\frac{d^n s}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}(t) + ... + a_1\frac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t) = b_m\frac{d^m e}{dt^m}(t) + b_{m-1}\frac{d^{m-1}e}{dt^{m-1}}(t) + ... + b_1\frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t)$$

et donc ayant pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + ... + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n}$$

Sa réponse impulsionnelle n'est autre que la solution de l'équation sans second membre qui est la superposition des contributions de chacun des pôles à cette solution, de la manière suivante :

- Si p_i est un pôle réel, multiple d'ordre m, il apporte une contribution de la forme : $c_i(t) = q_i(t)\,e^{p_i t}$ où $q_i(t)$ est un polynôme en t d'ordre m-1 dont les différentes constantes sont déterminées par les conditions initiales.

- Si $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ est un pôle complexe, multiple d'ordre m, sa partie conjuguée $\overline{p_i} = \sigma_i - j\omega_i$ est également pôle multiple d'ordre m et tous deux apportent conjointement une contribution de la forme : $c_i(t) = q_i(t)\,e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \varphi_i)$ où $q_i(t)$ est un polynôme en t d'ordre m-1 dont les différentes constantes, ainsi que les φ_i, sont déterminées par les conditions initiales.

Fiche ressource "équations différentielles linéaires à coefficients constants"

Ainsi, le système étant stable si et seulement si la réponse impulsionnelle revient toujours vers zéro, il l'est donc si toutes les contributions tendent nécessairement vers zéro, quelles que soient les différentes valeurs des constantes. C'est donc le comportement de l'exponentielle qui est déterminant dans les différentes contributions, comme détaillé dans le tableau ci-dessous.

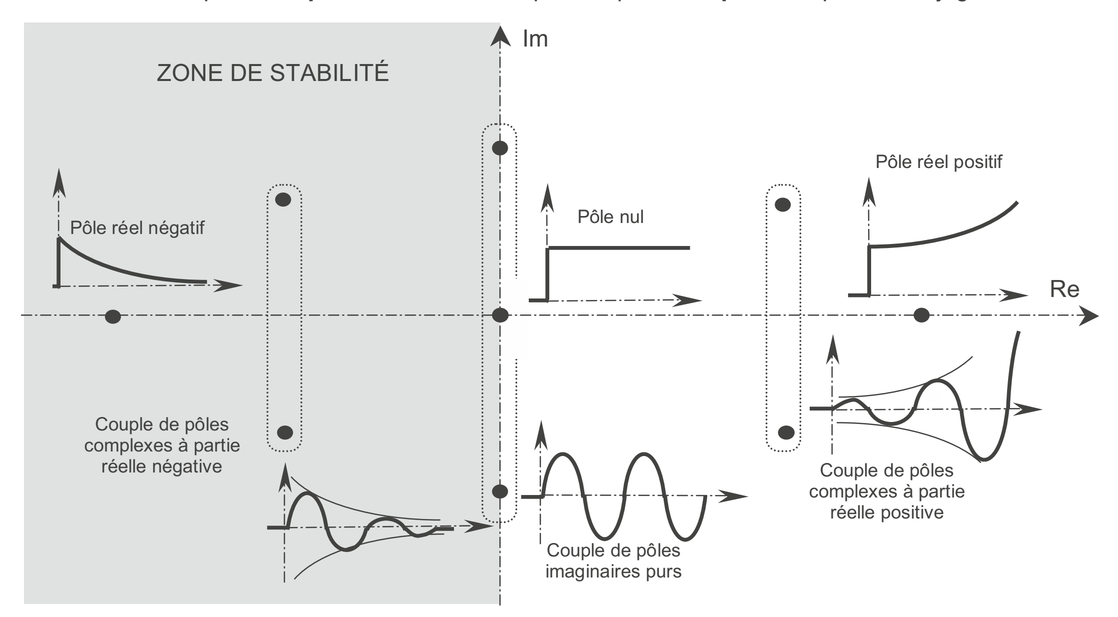
Type de pôle	Illustration de la contribution à la réponse dans le cas où le pôle est simple (le polynôme est alors une constante A_i)
La contribution d'un pôle réel positif, par le terme $e^{p_i t}$, est divergente et entraîne le caractère instable du système. *Si ce pôle est multiple, le polynôme accentue cet effet.*	$A_i\,e^{p_i t}$ avec $p_i > 0$
La contribution d'un pôle nul, par le terme $e^{p_i t}$ alors égal à 1, est une constante non nulle qui empêche la convergence vers zéro de la réponse. *Si ce pôle est multiple, le polynôme fait diverger la réponse.*	A_i
Les ***pôles réels négatifs*** apportent, par les termes $e^{p_i t}$, un comportement convergent vers zéro, quelle que soit leur multiplicité, compte tenu des propriétés de convergence de l'exponentielle face aux polynômes.	$A_i\,e^{p_i t}$ avec $p_i < 0$ ➡ ***STABLE***
La contribution d'un couple de pôles complexes à partie réelle positive, par le terme $e^{\sigma_i t}$, est divergente et entraîne le caractère instable du système. *Si ces pôles sont multiples, le polynôme accentue cet effet.*	$A_i\,e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \varphi_i)$ avec $\sigma_i > 0$
La contribution d'un couple de pôles imaginaires purs, par le terme $e^{\sigma_i t}$=1, est une réponse oscillatoire qui empêche la convergence de la réponse. *Si ces pôles sont multiples, le polynôme fait diverger la réponse.*	$A_i\cos(\omega_i t + \varphi_i)$
Les couples de ***pôles complexes à partie réelle négative*** apportent, par les termes $e^{\sigma_i t}$, un comportement convergent vers zéro, quelle que soit leur multiplicité, compte tenu des propriétés de convergence de l'exponentielle face aux polynômes.	$A_i\,e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \varphi_i)$ avec $\sigma_i < 0$ ➡ ***STABLE***

Pouvant considérer les pôles réels comme des pôles complexes particuliers, il vient alors l'important résultat suivant :

Un système est ***stable*** si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont ***à partie réelle strictement négative***.

■ Lieu des pôles

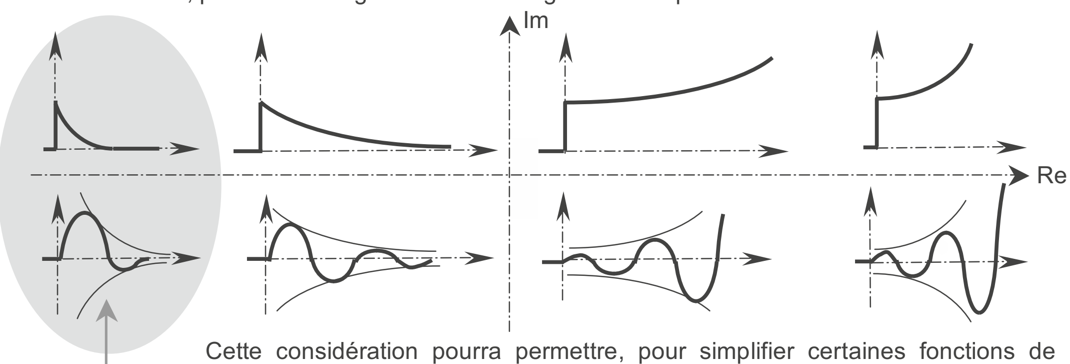
Le résultat précédent peut être rendu plus visuel, en représentant dans le plan complexe les contributions des pôles ***simples*** réels et des couples de pôles ***simples*** complexes conjugués :



Comme dans le tableau précédent, la contribution de pôles multiples, qui dépend du degré de multiplicité, n'est pas représentée afin de ne pas alourdir la représentation. Une éventuelle multiplicité d'ordre m, par la multiplication de ces réponses par un polynôme d'ordre m-1, accentue l'effet stabilisateur ou déstabilisateur, pour les pôles à partie réelle non nulle. De la même manière, un pôle nul multiple conduit à une divergence (par exemple linéaire pour un pôle nul d'ordre deux) et un pôle imaginaire pur multiple apporte une réponse oscillatoire divergente.

■ Influence de la partie réelle – notion de pôle dominant

Plus le pôle est éloigné de l'axe des imaginaires purs, c'est-à-dire plus sa partie réelle est grande en valeur absolue, plus sa convergence ou sa divergence est rapide :



Cette considération pourra permettre, pour simplifier certaines fonctions de transfert, de ***négliger*** des pôles à partie réelle très négative, dont la contribution à la réponse tend pratiquement instantanément vers zéro .

Par exemple, le système décrit par la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{5}{(p+1)(p+100)}$$

possède deux pôles simples qui sont réels et négatifs : -1 et –100.

La rapidité de convergence de e^{-100t} devant e^{-t} pourra permettre, si nécessaire, de négliger la contribution du pôle –100 et donc d'approximer la fonction de transfert par :

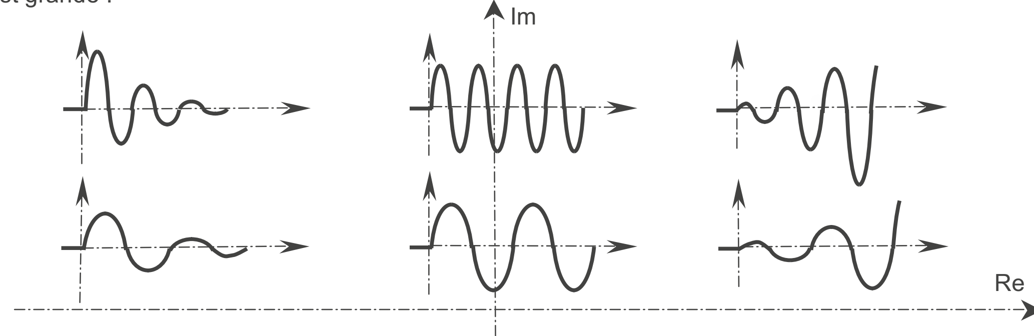
$$H(p) \approx \frac{5}{(p+1)}$$

Le pôle –1 est alors qualifié de ***pôle dominant.***

Les pôles dominants sont ainsi les pôles les plus proches de l'axe des imaginaires purs. Bien entendu cette considération n'a de sens que concernant les pôles de la zone de stabilité.

■ **Influence de la partie imaginaire**

Plus un couple de pôles complexes est éloigné de l'axe des réels, c'est-à-dire plus leur partie imaginaire est grande en valeur absolue, plus la pulsation des oscillations ou pseudo-oscillations est grande :



IV-5 Remarque concernant le gain

L'écriture sous forme canonique d'une fonction de transfert permet d'identifier son gain K, ainsi qu'immédiatement l'existence éventuelle d'un pôle nul et de son degré de multiplicité qui n'est autre que la classe α :

$$H(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{n(p)}{d(p)}$$ avec n(0)=d(0)=1.

Le système sera donc stable si et seulement si la classe est nulle et si le polynôme d(p) ne possède que des racines à partie réelle strictement négative.

Il doit donc être clair que c'est seulement à cette condition que le gain K possède l'interprétation physique courante ***de rapport de la limite asymptotique de la sortie sur l'entrée,*** lorsque celle-ci est constante (entrée en échelon). Et alors, toujours à cette condition, sa dimension est simplement le rapport des dimensions de la sortie et de l'entrée. Sinon, on rappelle que ce rapport est à diviser par le temps à la puissance α.

En effet, considérons un système ***stable*** de fonction de transfert $H(p) = K\frac{n(p)}{d(p)}$ avec n(0)=d(0)=1.

On la notera par commodité : $H(p) = K\frac{1+...}{1+...}$.

Ce système est soumis à une entrée en échelon e(t) = E_0 pour t≥0.

Par transformation dans le domaine de Laplace cette entrée devient : $E(p) = \frac{E_0}{p}$

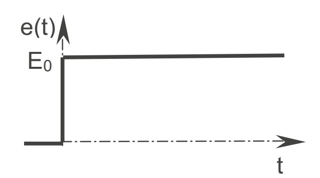
La sortie du système s'écrit alors, toujours dans le domaine de Laplace :

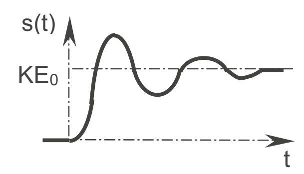
$$S(p) = H(p).E(p) = K\frac{1+...}{1+...}\frac{E_0}{p} = \frac{KE_0}{p}\frac{1+...}{1+...}.$$

On peut alors calculer la limite asymptotique de la sortie, d'après le théorème de la valeur finale et puisque la stabilité du système assure la convergence :

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{KE_0}{p}\frac{1+...}{1+...} = KE_0.$$

Ainsi $K = \frac{\lim_{t\to+\infty} s(t)}{E_0}$ est bien le rapport de la limite asymptotique de la sortie sur l'entrée.





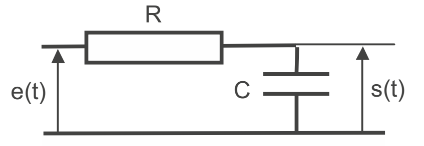
Si les systèmes franchement instables se rencontrent rarement dans les systèmes industriels, les systèmes limites ayant un ou plusieurs pôles nuls, c'est-à-dire une classe supérieure ou égale à 1, sont extrêmement courants. Dans ce cas, l'interprétation du gain est à manipuler avec vigilance, en particulier en termes dimensionnels. Cf. IV-6-3.

IV-6 Exemples

En reprenant certains systèmes rencontrés depuis le début de cet ouvrage, quelques premières fonctions de transfert peuvent venir illustrer le propos.

IV-6-1 Filtre RC

La tension de sortie s(t) est liée à la tension d'entrée e(t) par l'équation différentielle :



$$RC\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t)$$

Sous les conditions de Heaviside, celle-ci se transforme dans le domaine de Laplace en :

RC pS(p) + S(p) = E(p)

Ou encore (1+ RCp) S(p) = E(p).

La fonction de transfert du système est donc : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+RCp}$

Elle est donnée ici directement sous forme canonique. On y reconnaît une fonction de transfert :

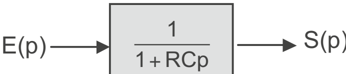
- d'ordre 1
- de gain K = 1 (sans dimension)
- de classe $\alpha = 0$ (pas de racine nulle au dénominateur).

L'unique pôle est $-\frac{1}{RC}$.

C'est un nombre réel négatif qui assure la stabilité du système.

Le gain de 1 prédit alors que, le système étant soumis à un certain échelon de tension u en entrée, la tension de sortie tend vers cette tension, comme cela a été montré par résolution de l'équation différentielle au paragraphe III-4-1.

Dans le domaine de Laplace, ce filtre RC est alors décrit par :



Ce qui permet, toujours dans le domaine de Laplace, d'écrire que $S(p)=\frac{1}{1+RCp}E(p)$.

Ensuite, si nécessaire, le retour au domaine temporel se fait exactement comme décrit au paragraphe III-4-1, selon le type d'entrée, puis par décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle et transformation inverse de ces éléments.

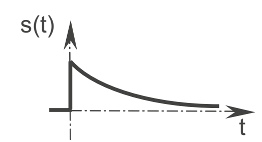
Par exemple, et pour illustrer ce qui vient de précéder concernant l'étude de la stabilité, la réponse impulsionnelle de ce système est obtenue comme suit :

Transformée de l'entrée impulsionnelle : E(p)=1

Transformée de la sortie : $S(p)=\frac{1}{1+RCp}E(p)=\frac{1}{1+RCp}=\frac{1/RC}{p+RC}$

Ici, aucune décomposition n'est nécessaire puisque l'on sait d'après la table des transformées que la transformée de 1/p+a est e^{-at}. Il vient donc directement la sortie dans le domaine temporel :

$s(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$

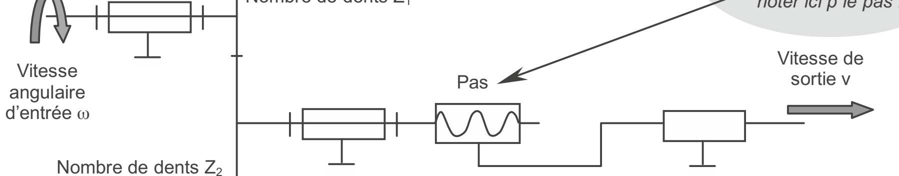


Soumis à une impulsion de tension en entrée, le système réagira en sortie par une tension qui reviendra exponentiellement vers zéro.

On reconnaît bien sûr le pôle réel négatif -1/RC dans l'exponentielle.

IV-6-2 Système mécanique {réducteur + transformation vis-écrou}

NB : attention aux notations, il aurait été très maladroit de noter ici p le pas !



La vitesse de sortie v(t) et la vitesse angulaire d'entrée ω(t) sont liées par l'équation de proportionnalité :

$v(t)=\frac{Z_1}{Z_2}pas.\omega(t)$

Cette équation différentielle d'ordre zéro se transforme dans le domaine de Laplace en :

$V(p)=\frac{Z_1}{Z_2}pas.\Omega(p)$ *(avec la notation usuelle des majuscules pour les transformées)*

En fait, il s'agit ici d'une simple traduction de la ***linéarité de la transformée de Laplace***.

La fonction de transfert du système est donc : $H(p)=\frac{V(p)}{\Omega(p)}=\frac{Z_1}{Z_2}pas$

Cette fonction de transfert est la plus élémentaire qui soit, c'est un simple gain K = $\frac{Z_1}{Z_2}pas$.

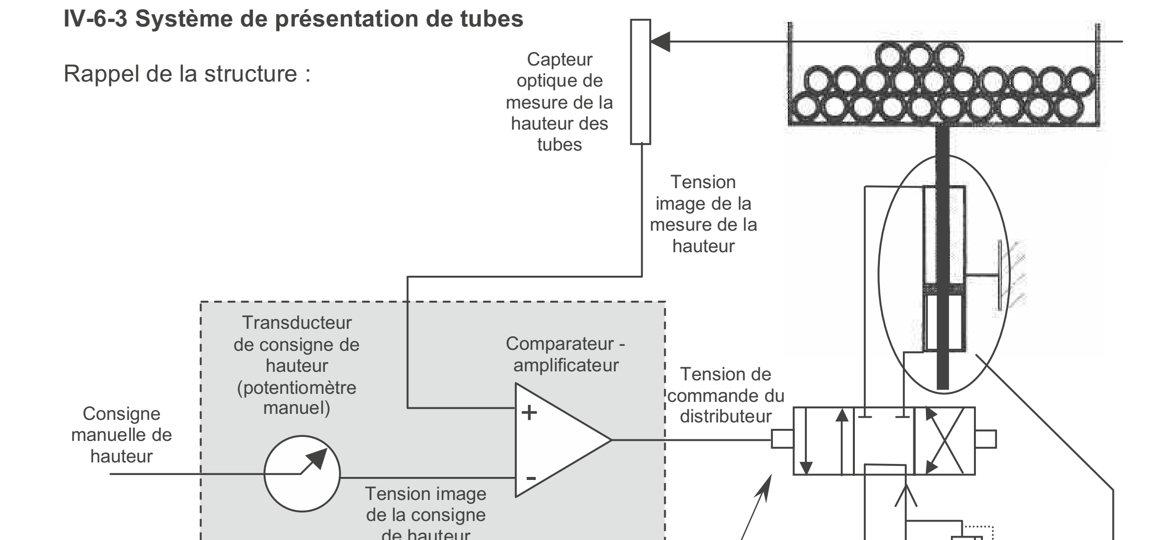
Le système est stable. Le gain s'exprime en unité de longueur par unité d'angle, comme le pas de la liaison hélicoïdale. C'est aussi le rapport des dimensions de l'entrée sur la sortie.

Dans le domaine de Laplace, ce système est alors décrit par : $\Omega(p) \rightarrow \boxed{\frac{Z_1}{Z_2}pas} \rightarrow V(p)$

Ce qui traduit une simple proportionnalité, aussi bien dans le domaine de Laplace que dans le domaine temporel.

IV-6-3 Système de présentation de tubes

Rappel de la structure :



■ Si on s'intéresse au sous-système vérin+bac, il a été montré (cf chapitre 2, paragraphe I) que son entrée étant le débit d'huile q(t) et sa sortie la hauteur des tubes y(t), celles-ci sont liées par l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{1}{S}q(t) \quad \text{où S est la section utile du piston.}$$

Sous les conditions de Heaviside, cette équation se transforme dans le domaine de Laplace en :

$$pY(p) = \frac{1}{S}Q(p)$$

La fonction de transfert de ce sous-système est donc : $H(p) = \frac{Y(p)}{Q(p)} = \frac{1}{Sp}$

On reconnaît une fonction de transfert particulière appelée ***intégrateur*** :

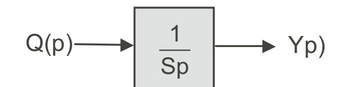
- d'ordre 1
- de gain K = 1/S dont la dimension est donc l'inverse d'une surface
- de classe α = 1 puisque zéro est racine simple du dénominateur.

Ce sous-système est donc le cas limite de l'instabilité. Cela se comprend assez bien, selon les deux points de vue de l'instabilité :

- Soumis à une impulsion brève de débit, le piston remonte légèrement et demeure à ce nouvel emplacement : la réponse impulsionnelle ne revient pas vers sa valeur initiale.
- Soumis à un débit constant, le piston se déplace à vitesse constante et ne s'arrête pas tant que le débit est maintenu : la position de sortie est donc une grandeur indéfiniment croissante, la réponse à un échelon ne tend pas vers une valeur finie.

Attention, K = 1/S n'est donc pas le rapport de la valeur asymptotique de la sortie sur l'entrée lorsque celle-ci est constante, ce qui n'aurait aucun sens puisque dans ce cas la sortie ne converge pas (cf. IV-5).
On peut par ailleurs vérifier que la dimension de K = 1/S est bien le rapport de celle de la sortie sur celle de l'entrée, divisé par le temps, puisque la classe est 1.

Dans le domaine de Laplace, ce sous-système est alors décrit par :



■ Le système complet, quant à lui, dont l'entrée est la consigne de hauteur $y_c(t)$ et la sortie la hauteur y(t), obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{1}{k}\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = y_c(t)$$

où k est une constante positive qui dépend des caractéristiques des différents composants (distributeur, capteur, amplificateur, section S du piston).

Sous les conditions de Heaviside, cette équation se transforme dans le domaine de Laplace en :

$$\frac{1}{k}pY(p) + Y(p) = Y_c(p)$$

ou encore $(\frac{1}{k}p + 1)Y(p) = Y_c(p)$

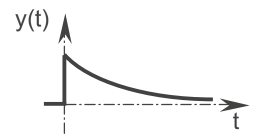
La fonction de transfert du système complet est donc : $H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{k}}$

On reconnaît une fonction de transfert :
- d'ordre 1
- de gain K = 1 (sans dimension)
- de classe $\alpha = 0$.

L'unique pôle est - k, nombre réel négatif qui assure la stabilité du système. Le gain de valeur 1 prédit alors que la hauteur des tubes tendra asymptotiquement vers la valeur de consigne donnée en échelon.

Par ailleurs la réponse du système à une consigne impulsionnelle peut se déterminer, comme précédemment pour le filtre RC, par transformation de Laplace inverse de la fonction de transfert. Soit directement :

$$y(t) = ke^{-kt}$$



Soumis à une impulsion de consigne, le système s'éloignera brièvement de sa position pour y revenir, d'autant plus rapidement que la constante k sera grande.

Dans le domaine de Laplace, le système est alors décrit par :

$$Y_c(p) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{1+\frac{p}{k}}} \longrightarrow Y(p)$$

■ S'agissant d'un système asservi, on peut s'intéresser à sa précision statique, par exemple en calculant son erreur statique de position et son erreur statique de traînage à l'aide du théorème de la valeur finale.

D'une manière générale, l'erreur statique est :

$$E_s = \lim_{t\to\infty}[y_c(t) - y(t)] = \lim_{p\to 0} p[Y_c(p) - Y(p)] = \lim_{p\to 0} p[Y_c(p) - H(p)Y_c(p)] = \lim_{p\to 0} pY_c(p)[1 - H(p)]$$

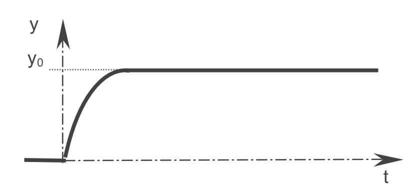
soit finalement : $E_s = \lim_{p\to 0} pY_c(p)[1 - \frac{1}{1+\frac{p}{k}}] = \lim_{p\to 0} pY_c(p)\frac{p}{k+p}$

● L'erreur statique est qualifiée ***d'erreur statique de position*** lorsque $y_c(t)$ est une entrée en échelon y_0. Alors, dans le domaine de Laplace cette entrée est :

$$Y_c(p) = \frac{y_0}{p}$$

D'où l'erreur : $E_s = \lim_{p \to 0} p \dfrac{y_0}{p} \dfrac{p}{k+p} = \lim_{p \to 0} y_0 \dfrac{p}{k+p} = 0$

L'erreur statique de position est ***nulle***, quelle que soit la valeur y_0 de l'échelon. Le système, soumis à un échelon, est ***précis***.



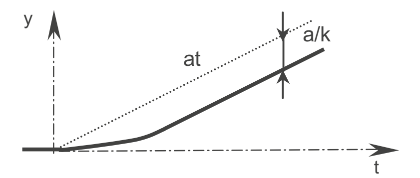
Cela signifie que la position des tubes tendra asymptotiquement vers la valeur de consigne. Ce résultat était prévisible puisque le gain du système est 1.

• L'erreur statique est qualifiée ***d'erreur statique de traînage*** lorsque $y_c(t)$ est une entrée en rampe $y_c(t) = at$. Alors dans le domaine de Laplace cette entrée est :

$Y_c(p) = \dfrac{a}{p^2}$

D'où l'erreur : $E_s = \lim_{p \to 0} p \dfrac{a}{p^2} \dfrac{p}{k+p} = \lim_{p \to 0} \dfrac{a}{k+p} = \dfrac{a}{k}$

L'erreur statique de traînage est ***non nulle***, quelle que soit la pente a de la rampe. Le système, soumis à une rampe, est ***imprécis***.



Cela signifie qu'en régime permanent, la position des tubes sera à une distance *a/k* sous la distance commandée, si celle-ci est commandée en rampe.

On appréciera l'intérêt de la notion de fonction de transfert et de la transformation de Laplace permettant, ici à l'aide du théorème de la valeur finale, d'avoir accès au comportement asymptotique du système, sans avoir à résoudre l'équation différentielle.

L'usage du théorème de la valeur finale dans les deux calculs de limites ci-dessus exige la vérification de l'existence des limites calculées. Ceci se fait en utilisant la dernière mise au point ci-dessous concernant ce théorème.

IV-7 Pôles d'une fonction et théorème de la valeur finale

On rappelle que si $\lim_{p \to 0} pF(p)$ est finie, alors $\lim_{p \to 0} pF(p) = \lim_{t \to \infty} f(t)$ si cette limite est convergente.

La vérification de la convergence de la limite, peut se faire en utilisant les propriétés de la stabilité établies précédemment :

$\lim_{t \to \infty} f(t)$ est convergente si pF(p) une fonction de transfert stable, c'est-à-dire ne possède que des pôles à partie réelle strictement négative.

C'est bien le cas dans l'exemple précédent pour les fonctions :

$\dfrac{p}{k+p}$

$\dfrac{a}{k+p}$

dont l'unique pôle commun est le réel - k, ce qui assure respectivement la convergence de l'erreur statique de position et de l'erreur statique de traînage.

Revoir le paragraphe III-5 si nécessaire.

IV-8 Critère de Routh simplifié

IV-8-1 Finalité

Soit un système ayant pour fonction de transfert $H(p)=\dfrac{b_0+b_1p+...+b_mp^m}{a_0+a_1p+...+a_np^n}=\dfrac{N(p)}{D(p)}$

Les considérations qui précèdent ont mis en évidence toute l'importance des pôles de cette fonction de transfert (les racines de D(p)) qui en caractérisent la stabilité. En effet, celle-ci est garantie si et seulement si les pôles sont ***tous*** à partie réelle strictement négative.

Le critère de Routh, qui ne sera pas démontré ici, mais seulement énoncé et ce, dans une version simplifiée, permet de conclure à l'existence ou non d'au moins une racine à partie réelle positive d'un polynôme à coefficients réels d'ordre quelconque, sans avoir à déterminer ses racines.

IV-8-2 Énoncé

Soit un polynôme $D(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+....+a_0$
(Attention pour l'écriture du critère de Routh, il est recommandé d'écrire le polynôme par puissances décroissantes, contrairement aux habitudes concernant les fonctions de transfert).

1°) ***Si certains a_i sont nuls ou de signes différents***, alors D(p) a au moins une racine à partie réelle positive. Donc le système dont D(p) est le polynôme caractéristique ***n'est pas stable***.

2°) ***Sinon*** (si tous les a_i sont non nuls et de même signe), on choisit tous les a_i positifs, éventuellement donc en inversant tous les signes, et on construit alors le tableau suivant :

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…	a_2	a_0
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…	a_1	
p^{n-2}	A_1	A_2	A_3	…		
p^{n-3}	B_1	B_2	…	…		
p^0						

Colonne dite « des pivots »

Lignes de coefficients ***complétées*** à partir du polynôme étudié.

Lignes de coefficients ***à calculer*** selon les déterminants :

$$A_1=-\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix}a_n & a_{n-2}\\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix}\qquad A_2=-\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix}a_n & a_{n-4}\\ a_{n-1} & a_{n-5}\end{vmatrix}\quad \text{etc.}$$

$$B_1=-\frac{1}{A_1}\begin{vmatrix}a_{n-1} & a_{n-3}\\ A_1 & A_2\end{vmatrix}\qquad B_2=-\frac{1}{A_1}\begin{vmatrix}a_{n-1} & a_{n-5}\\ A_1 & A_3\end{vmatrix}\quad \text{etc.}$$

etc.

Les cases vides sont remplies par des zéros.

La première colonne est inutile, elle est seulement là pour garder en mémoire que si le polynôme est de degré n, le tableau doit contenir n+1 lignes.

Alors, toutes les racines sont à partie réelle strictement négative, si et seulement si tous les termes de la colonne des pivots sont strictement positifs. Ce qui caractérise un système ***stable***.

Donc en pratique, ***dès que l'on rencontre un pivot nul ou négatif***, il est inutile de poursuivre le calcul : le système dont D(p) est le polynôme caractéristique ***n'est pas stable***. Ceci permet de supposer tous les pivots A_1, B_1, etc, non nuls dans les calculs des différentes formules ci-dessus, puisque, dès que l'un des pivots est nul, les calculs s'arrêtent et l'on conclut à l'instabilité.

■ **Remarque 1 :** Cet énoncé, suffisant compte tenu de la finalité fixée, n'est qu'un aspect simplifié du critère de Routh. Le critère de Routh complet fournit des méthodes qui permettent, par exemple, de connaître le nombre de racines déstabilisantes. Il suppose de remplir entièrement la colonne des pivots et donc un traitement particulier des éventuels pivots nuls, non exposé ici.

■ **Remarque 2 :** Le tableau précédent a été construit dans l'hypothèse où n est pair, dans le cas où il est impair, les deux premières lignes du tableau deviennent les suivantes et le reste de la démarche est inchangé :

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…	a_2	a_0

IV-8-3 Exemples

1 - Si $H(p)=\dfrac{K}{p^3+3p^2+1}$, il « manque » le terme en p : le système n'est pas stable.

2 - Si $H(p)=\dfrac{K}{p^2+5p-2}$, un des coefficients est négatif : le système n'est pas stable.

3 - Si $H(p)=\dfrac{K}{p^3+6p^2+11p+6}$,

le dénominateur est un polynôme complet et tous les coefficients sont positifs : on ne peut pas conclure immédiatement, il faut construire le tableau :

p^3	1	11
p^2	6	6
p	10	0
1	6	

$$A_1=-\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 11\\ 6 & 6\end{vmatrix}=-\frac{6-66}{6}=10$$

$$B_1=-\frac{1}{10}\begin{vmatrix}6 & 6\\ 10 & 0\end{vmatrix}=-\frac{0-60}{10}=6$$

Les termes de la colonne des pivots sont tous strictement positifs, le système est stable.

4 - Si $H(p)=\dfrac{K}{p^4+p^3+2p^2+3p+1}$,

le dénominateur est un polynôme complet et tous les coefficients sont positifs : on ne peut pas conclure immédiatement, il faut construire le tableau :

p^4	1	2	1
p^3	1	3	
p^2	-1		
p			
1			

$$A_1=-\frac{1}{1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-\frac{3-2}{1}=-1$$

Il n'est pas nécessaire de poursuivre la construction du tableau au delà de ce pivot négatif qui prouve que le système n'est pas stable.

IV-8-4 Ordres un, deux et trois

À partir du critère de Routh, il vient immédiatement que :

- Un système du 1er ordre ($D(p)=a_1p+a_0$) est stable si les deux coefficients sont de même signe.
- Un système du 2nd ordre ($D(p)=a_2p^2+a_1p+a_0$) est stable si les trois coefficients sont de même signe.
- Un système du 3ème ordre ($D(p)=a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0$) est stable si les trois coefficients sont de même signe et si $a_1a_2>a_0a_3$.

Donc en pratique si on retient ces trois lignes et en particulier le cas du 3ème ordre, ce n'est qu'à partir du 4ème ordre que la construction du tableau sera utile.

V - SCHÉMA BLOC ET FONCTION DE TRANSFERT

V-1 Blocs en série

La propriété fondamentale de la fonction de transfert est qu'elle permet de traduire, dans le domaine de Laplace, la fonction d'un système par une simple multiplication de l'entrée pour obtenir la sortie.

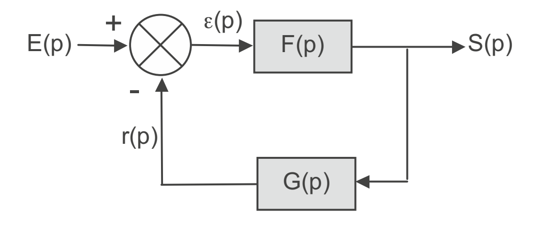
Ainsi, le schéma bloc : E(p) → [H(p)] → S(p) permet d'écrire que S(p) = H(p) E(p).

Alors deux blocs en série ont une fonction de transfert globale qui est le produit des deux fonctions de transfert :

E(p) → [F(p)] → [G(p)] → S(p) $\Rightarrow H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = F(p)\,G(p)$

V-2 Schéma bloc d'un système bouclé

Soit le système bouclé ci-contre.



- Au niveau du comparateur, la linéarité de la transformation de Laplace permet d'écrire que : $\varepsilon(p) = E(p) - r(p)$
- La définition de G(p) permet d'écrire que : $r(p) = G(p)\,S(p)$
- La définition de F(p) permet d'écrire que : $S(p) = F(p)\,\varepsilon(p)$

Donc : $S(p) = F(p)\,[E(p) - G(p)S(p)]$

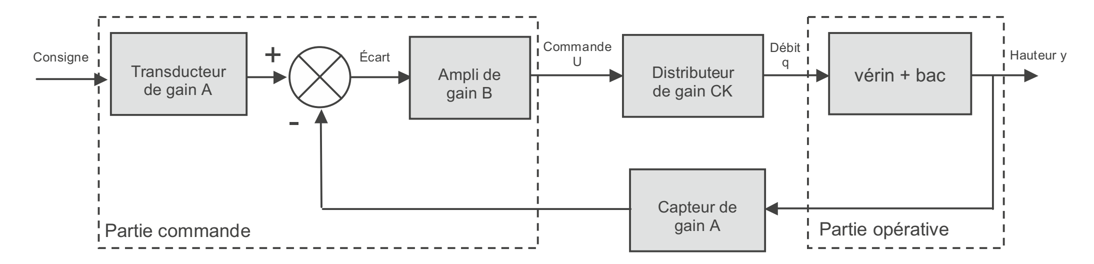
Soit : $S(p)[1 + F(p)G(p)] = F(p)E(p)$ ou encore : $S(p) = \dfrac{F(p)}{1 + F(p)\,G(p)} E(p)$

Cette relation fondamentale permet de calculer la fonction de transfert d'un système bouclé à partir de la connaissance des fonctions de transfert de la chaîne directe F(p) et de la chaîne de retour G(p). Elle est appelée ***formule de Black*** :

$$H(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)\,G(p)}$$

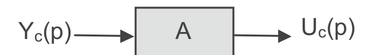
- **Système de présentation de tubes**

Celui-ci peut être décrit par le schéma bloc :



Chacune des fonctions de transfert est connue :

- Le transducteur d'entrée est un simple gain A :



C'est un potentiomètre qui « transforme » une consigne manuelle de hauteur y_c en une tension de consigne proportionnelle u_c.

- Le capteur de mesure est aussi un simple gain A : $Y(p) \rightarrow$ [A] $\rightarrow U_m(p)$

C'est un capteur optique qui « transforme » la hauteur des tubes y en une tension de mesure proportionnelle u_m.

Afin de comparer des tensions comparables au niveau du comparateur, ces deux gains A (unité de tension / unité de longueur) sont égaux.

- L'amplificateur est aussi un simple gain B (sans dimension) : $U_c(p) - U_m(p) \rightarrow$ [B] $\rightarrow U(p)$

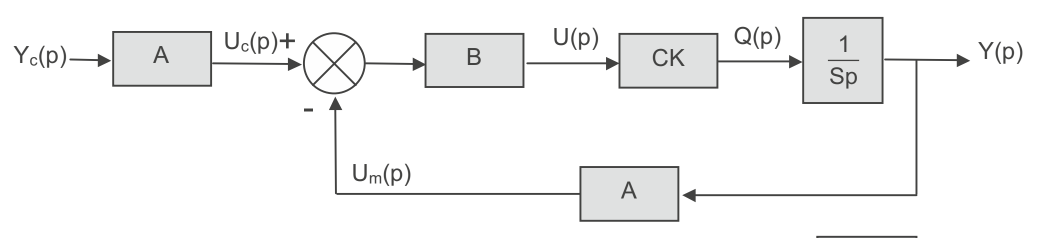
- Le distributeur également est un simple gain CK : $U(p) \rightarrow$ [CK] $\rightarrow Q(p)$

Soumis à une tension de commande u, il laisse passer un débit q proportionnel à cette tension dans un rapport CK (unité de débit / unité de tension).

- Seul le sous-système vérin+bac possède une fonction de transfert qui n'est pas un simple gain et qui a été précédemment élaborée (IV-6-3) :

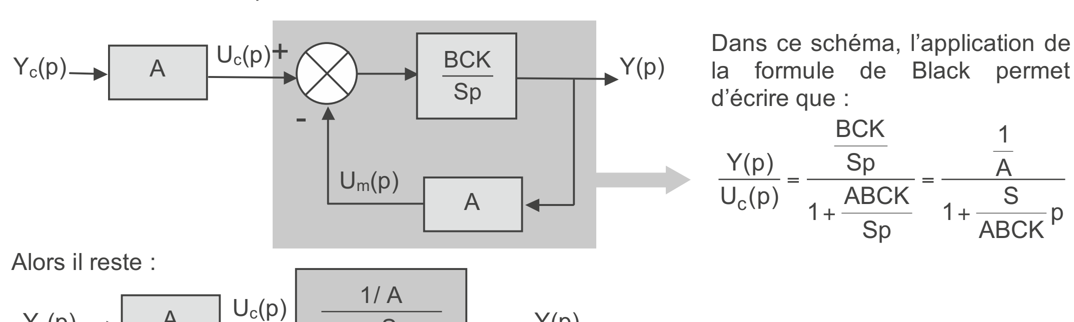
$Q(p) \rightarrow$ [$\frac{1}{Sp}$] $\rightarrow Y(p)$

D'où le schéma bloc dans le domaine de Laplace :



Les trois blocs en série de la chaîne directe se réduisent à : $U_c(p) - U_m(p) \rightarrow$ [$\frac{BCK}{Sp}$] $\rightarrow Y(p)$

D'où le schéma bloc équivalent :



Dans ce schéma, l'application de la formule de Black permet d'écrire que :

$$\frac{Y(p)}{U_c(p)} = \frac{\frac{BCK}{Sp}}{1 + \frac{ABCK}{Sp}} = \frac{\frac{1}{A}}{1 + \frac{S}{ABCK}p}$$

Alors il reste :

$Y_c(p) \rightarrow$ [A] $\rightarrow U_c(p) \rightarrow$ [$\frac{1/A}{1 + \frac{S}{ABCK}p}$] $\rightarrow Y(p)$

Soit pour finir :

$$Y_c(p) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{1+\dfrac{S}{ABCK}p}} \longrightarrow Y(p)$$

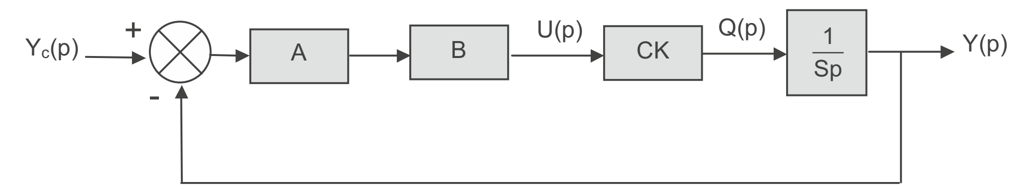
La fonction de transfert du système de présentation de tubes est donc :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{1}{1+\dfrac{S}{ABCK}p} = \frac{1}{1+\dfrac{p}{k}} \quad \text{si on pose } k = \frac{ABCK}{S}$$

On retrouve la fonction de transfert établie précédemment à partir de l'équation différentielle. Mais la manipulation des fonctions de transfert à partir du schéma bloc a dispensé cette fois de la recherche de cette équation différentielle.

Il est par ailleurs intéressant de noter que le gain 1 de cette fonction de transfert, qui assure la précision en réponse à un échelon de consigne, provient de l'égalité des gains A du capteur et du transducteur d'entrée, comme l'a montré la dernière manipulation effectuée. Si ce n'était pas le cas, le comparateur ne comparerait pas des grandeurs comparables et le système se stabiliserait dans un état où les deux tensions comparées seraient identiques (écart en sortie du comparateur nul) mais sans que la sortie et l'entrée du système le soient.

En fait la distributivité au niveau du comparateur permet de tracer le schéma bloc équivalent :



Ce schéma à retour unitaire est éloigné de la réalité, mais correspond en fait au ***besoin satisfait*** de comparer des longueurs. Chose difficile directement en pratique, d'où l'introduction d'un capteur et d'un transducteur.

Dans ce schéma à retour unitaire, l'application de la formule de Black peut se faire de manière immédiate :

$$H(p) = \frac{\dfrac{ABCK}{Sp}}{1+\dfrac{ABCK}{Sp}} = \frac{1}{1+\dfrac{S}{ABCK}p}$$ et on retrouve fort heureusement le même résultat.

V-3 Manipulations usuelles de blocs

L'exemple ci-dessus a montré l'intérêt de manipuler des blocs afin de :

- traduire les blocs en série,
- appliquer la formule de Black,
- distribuer des blocs autour d'un comparateur.

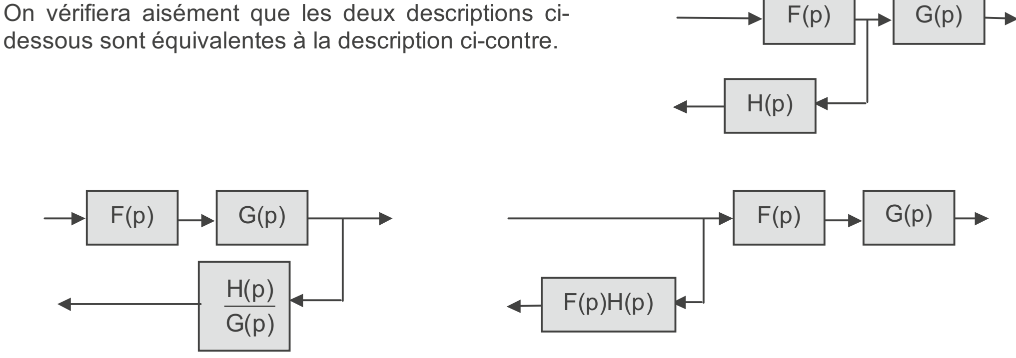
Ces manipulations permettent de tracer différents schémas blocs équivalents, permettant de calculer le plus simplement possible la fonction de transfert d'un système. Il existe quelques autres manipulations classiques. Toutes les manipulations usuelles sont rassemblées ci-après.

Bien entendu on pourra rencontrer des schémas suffisamment compliqués pour qu'aucune de ces manipulations ne permette une écriture aisée de la fonction de transfert. Il faudra alors procéder par des calculs, conduits dans le même esprit que ceux utilisés précédemment pour démontrer la formule de Black.

V-3-1 Déplacements de base

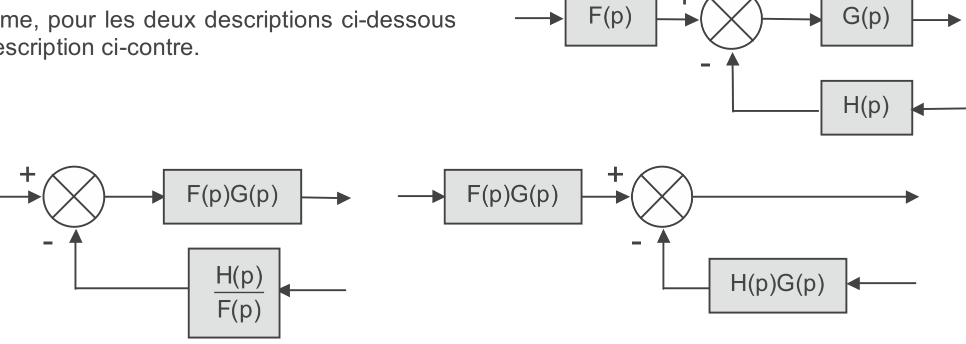
■ Déplacement d'un point de prélèvement (ou jonction)

On vérifiera aisément que les deux descriptions ci-dessous sont équivalentes à la description ci-contre.



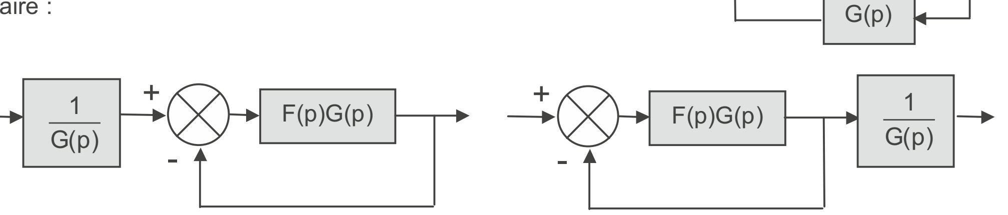
■ Déplacement d'un comparateur

De même, pour les deux descriptions ci-dessous et la description ci-contre.



■ Introduction d'un retour unitaire

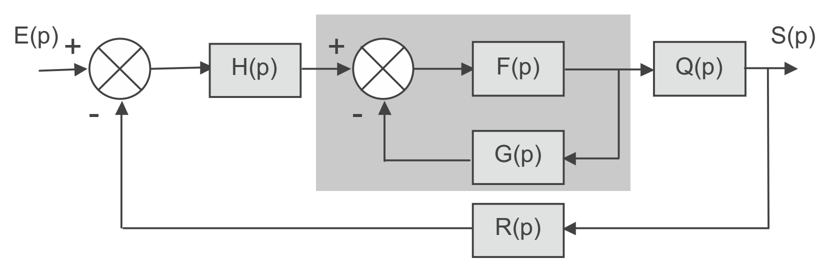
Les déplacements précédents montrent, qu'à partir du schéma ci-contre, peuvent être construits deux schémas équivalents dans lesquels le retour est unitaire :

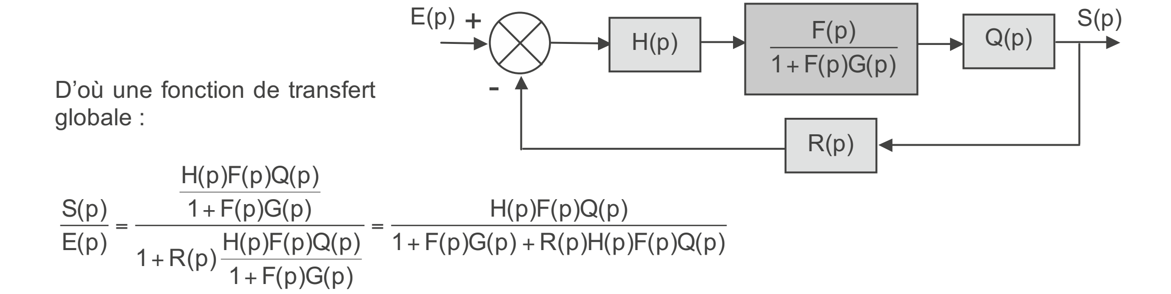


V-3-2 Schémas à boucles multiples

■ Boucle interne

Une telle structure ne pose pas de difficulté pour établir la fonction de transfert globale, puisqu'il suffit d'appliquer la formule de Black à la boucle interne.



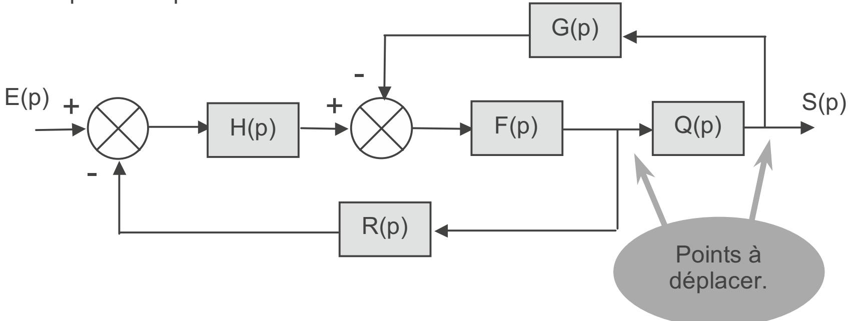


D'où une fonction de transfert globale :

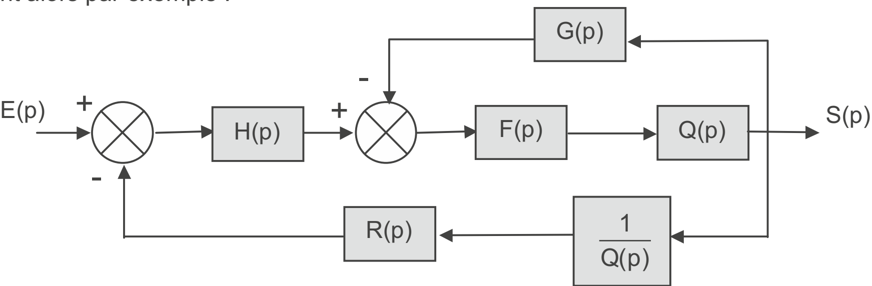
$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\dfrac{H(p)F(p)Q(p)}{1+F(p)G(p)}}{1+R(p)\dfrac{H(p)F(p)Q(p)}{1+F(p)G(p)}} = \frac{H(p)F(p)Q(p)}{1+F(p)G(p)+R(p)H(p)F(p)Q(p)}$$

■ **Boucles imbriquées**

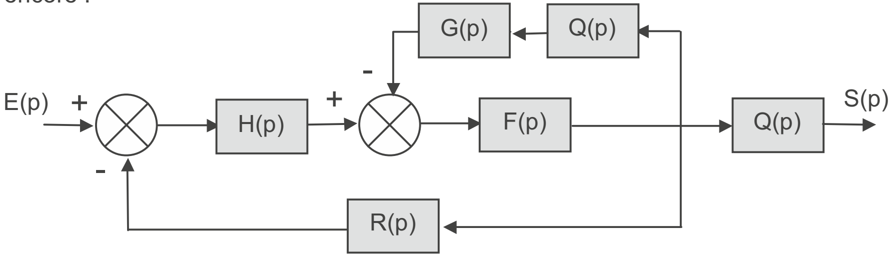
Une méthode consiste à chercher un schéma équivalent à boucle interne. Il faut donc déplacer l'un ou au l'autre des points de prélèvement.



On obtient alors par exemple :



Ou bien encore :



Ces deux schémas sont équivalents au premier et permettent de calculer la fonction de transfert globale par calcul préalable de la fonction de transfert de la boucle interne.

À partir de la première solution :

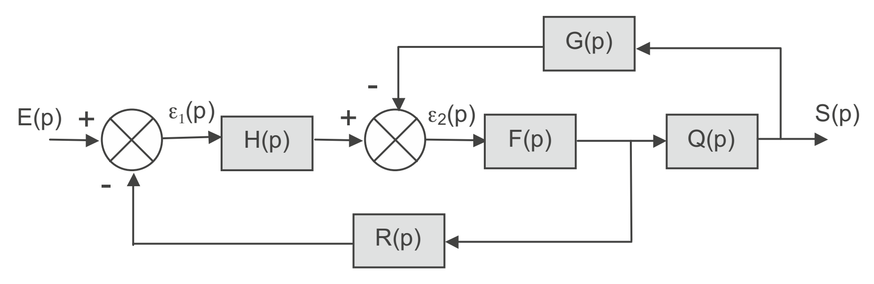
$$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{H(p)\dfrac{F(p)Q(p)}{1+F(p)Q(p)G(p)}}{1+\dfrac{R(p)}{Q(p)}H(p)\dfrac{F(p)Q(p)}{1+F(p)Q(p)G(p)}}=\frac{\dfrac{H(p)F(p)Q(p)}{1+F(p)Q(p)G(p)}}{1+\dfrac{R(p)H(p)F(p)}{1+F(p)Q(p)G(p)}}=\frac{H(p)F(p)Q(p)}{1+F(p)Q(p)G(p)+R(p)H(p)F(p)}$$

À partir de la seconde solution :

$$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{H(p)\dfrac{F(p)}{1+F(p)G(p)Q(p)}}{1+R(p)H(p)\dfrac{F(p)}{1+F(p)G(p)Q(p)}}Q(p)=\frac{\dfrac{H(p)F(p)Q(p)}{1+F(p)G(p)Q(p)}}{1+\dfrac{R(p)H(p)F(p)}{1+F(p)G(p)Q(p)}}=\frac{H(p)F(p)Q(p)}{1+F(p)G(p)Q(p)+R(p)H(p)F(p)}$$

Ces résultats sont identiques, bien entendu.

Une autre méthode, toujours possible, consiste en un calcul direct à partir du schéma de départ :



Les écarts s'écrivent :

$$\varepsilon_1(p)=E(p)-\frac{R(p)}{Q(p)}S(p)$$

$$\varepsilon_2(p)=H(p)\varepsilon_1(p)-G(p)S(p)$$

Alors $S(p)=F(p)Q(p)\varepsilon_2(p)=F(p)Q(p)\left[H(p)[E(p)-\dfrac{R(p)}{Q(p)}S(p)]-G(p)S(p)\right]$

$$S(p)=F(p)Q(p)H(p)E(p)-F(p)Q(p)H(p)\frac{R(p)}{Q(p)}S(p)-F(p)Q(p)G(p)S(p)$$

$$S(p)[1+F(p)H(p)R(p)+F(p)Q(p)G(p)]=F(p)Q(p)H(p)E(p)$$

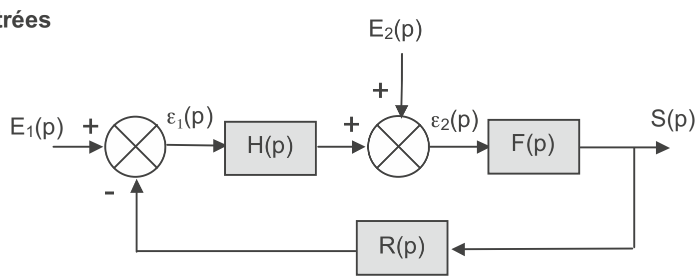
D'où la fonction de transfert : $\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{F(p)Q(p)H(p)}{1+F(p)H(p)R(p)+F(p)Q(p)G(p)}$

Dans les structures compliquées aux boucles multiples et très imbriquées, rendant la manipulation des blocs très hasardeuse, un calcul direct de ce type sera le seul recours.

V-3-3 Schémas à plusieurs entrées

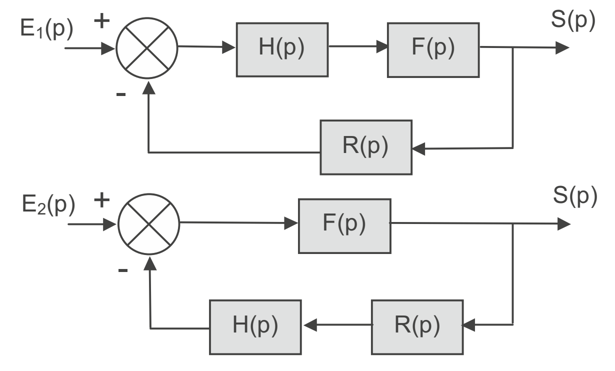
Ce cas se rencontrera en particulier pour les systèmes asservis avec une perturbation.

Ci-contre un exemple avec deux entrées.



Ce système à deux entrées ne possède, bien entendu, pas de fonction de transfert équivalente. En effet, une fonction de transfert ne se définit que pour des systèmes ***monovariables***. L'objectif n'est donc pas ici, à l'instar des cas précédents, de rechercher une telle fonction de transfert qui n'existe pas, mais de rechercher l'écriture, dans le domaine de Laplace, de la sortie en fonction de chacune des entrées.

Une solution de type « manipulation de blocs » consiste à utiliser la ***superposition*** des entrées issue de la linéarité des équations.



Si l'entrée E_2 est nulle alors le schéma devient le schéma ci-contre et la sortie est :

$$S(p) = \frac{H(p)F(p)}{1 + R(p)H(p)F(p)} E_1(p)$$

Si l'entrée E_1 est nulle alors le schéma devient le schéma ci-contre et la sortie est :

$$S(p) = \frac{F(p)}{1 + R(p)H(p)F(p)} E_2(p)$$

Alors, par superposition, en présence des deux entrées, la sortie s'écrit :

$$S(p) = \frac{H(p)F(p)}{1 + R(p)H(p)F(p)} E_1(p) + \frac{F(p)}{1 + R(p)H(p)F(p)} E_2(p)$$

Bien entendu un calcul direct est toujours possible :

$$\varepsilon_1(p) = E_1(p) - R(p)S(p)$$

$$\varepsilon_2(p) = H(p)\varepsilon_1(p) + E_2(p)$$

Alors $S(p) = F(p)\varepsilon_2(p) = F(p)[H(p)\varepsilon_1(p) + E_2(p)] = F(p)H(p)[E_1(p) - R(p)S(p)] + F(p)E_2(p)$

$$S(p) = F(p)H(p)E_1(p) - F(p)H(p)R(p)S(p) + F(p)E_2(p)$$

$$S(p)[1 + F(p)H(p)R(p)] = F(p)H(p)E_1(p) + F(p)E_2(p)$$

D'où : $S(p) = \dfrac{F(p)H(p)}{1 + F(p)H(p)R(p)} E_1(p) + \dfrac{F(p)}{1 + F(p)H(p)R(p)} E_2(p)$

■ **Remarque concernant la stabilité**

Il est intéressant de vérifier que, en réponse à chacune des entrées, le système possède une fonction de transfert ayant le ***même dénominateur***. Ces deux fonctions de transfert auront donc les ***mêmes pôles***, donc les mêmes caractéristiques en termes de stabilité. Ce résultat n'est pas surprenant : la stabilité est une propriété intrinsèque du système.

V-4 Causalité et validité des descriptions

Certaines manipulations précédentes ont conduit des blocs de fonction de transfert H(p) sur un schéma introduire un bloc de fonction de transfert 1/H(p) dans un schéma équivalent.

Or la causalité implique que dans une fonction de transfert de la forme $H(p) = \dfrac{b_0 + b_1 p + ... + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n}$

on ait nécessairement $n \geq m$.

Donc, hormis dans le cas particulier où les degrés du dénominateur et du numérateur sont égaux, par exemple dans le cas des gains, si H(p) est causale, 1/H(p) ne l'est pas.

Il faut bien comprendre que cela ne nuit aucunement à la validité des développements qui viennent d'être conduits et à la manipulation des blocs. La causalité caractérise un système ***réel***, et en particulier un système de commande, dans lequel la sortie est l'effet de l'entrée qui en est donc la cause, jamais l'inverse.

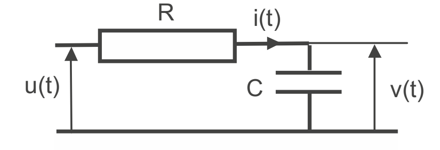
Or, les manipulations proposées éloignent le schéma de la réalité. Les différents schémas équivalents qui peuvent être établis à partir d'un schéma de départ construit sur la structure du système réel, sont des schémas fictifs, n'ayant que ***globalement*** la même fonction de transfert. N'étant pas images de la structure réelle, ils sont valides, même s'ils contiennent des blocs non causaux.

V-5 Représentation d'un système d'équations par un schéma bloc

La transformée de Laplace, associée à la notion de fonction de transfert, permet également de représenter par un schéma bloc, non pas des structures de systèmes matériels, mais des systèmes d'équations différentielles.

■ **Filtre RC**

Reprenons ce système déjà modélisé. L'entrée du système est la tension u(t) aux bornes du circuit RC. La sortie est la tension v(t) aux bornes du condensateur.



Le courant i(t) parcourant le circuit s'écrit :

– en considérant la résistance : $i(t) = \dfrac{u(t) - v(t)}{R}$

– en considérant le condensateur : $i(t) = C\dfrac{dv}{dt}(t)$

● Par égalisation, il vient la loi de comportement du système sous forme de l'équation différentielle : $RC\dfrac{dv}{dt}(t) + v(t) = u(t)$.

Cette équation différentielle se transforme, dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, en :

$RCpV(p) + V(p) = U(p)$

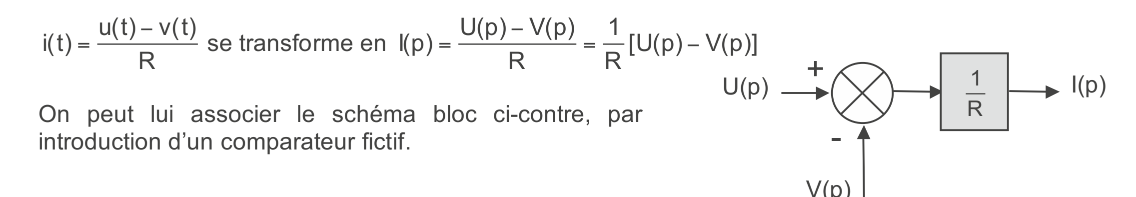
D'où la fonction de transfert : $\dfrac{V(p)}{U(p)} = \dfrac{1}{1+RCp}$ et donc le schéma bloc pour représenter le système :

$$U(p) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{1+RCp}} \longrightarrow V(p)$$

Cette démarche est celle qui a déjà été conduite.

● Une autre démarche consiste à transformer chaque équation dans le domaine de Laplace sous les conditions de Heaviside et à lui associer un schéma bloc élémentaire :

$i(t) = \dfrac{u(t) - v(t)}{R}$ se transforme en $I(p) = \dfrac{U(p) - V(p)}{R} = \dfrac{1}{R}[U(p) - V(p)]$



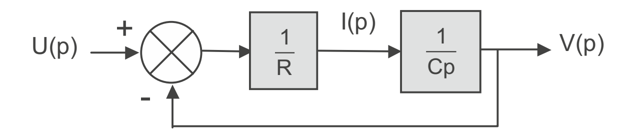
On peut lui associer le schéma bloc ci-contre, par introduction d'un comparateur fictif.

$i(t) = C\dfrac{dv}{dt}(t)$ se transforme en $I(p) = CpV(p)$ ou encore :

$V(p) = \dfrac{1}{Cp}I(p)$. On peut lui associer le schéma bloc ci-contre.

I(p) → $\dfrac{1}{Cp}$ → V(p)

L'assemblage de ces deux schémas blocs élémentaires permet de construire le schéma suivant qui représente, dans le domaine de Laplace, le comportement du circuit RC.



Il doit être bien clair que ce schéma ***ne représente pas la structure matérielle*** du système qu'est le circuit RC. Ce système ne comporte ni boucle de retour ni comparateur ! Ce schéma est seulement une représentation graphique, qui traduit le ***système d'équations*** régissant le comportement du système.

On peut vérifier, par la formule de Black, que ce schéma prévoit bien le comportement global :

$$\frac{V(p)}{U(p)} = \frac{\dfrac{1}{RCp}}{1+\dfrac{1}{RCp}} = \frac{1}{1+Rcp}$$

■ **Fonctions de dérivation et d'intégration**

De la même manière, et assez classiquement, des opérateurs de dérivation (nécessairement fictive car non causale) et d'intégration temporelle pourront être, si nécessaire, introduits dans des schémas blocs.

$s(t) = \dfrac{de}{dt}(t)$, se transforme sous les conditions de Heaviside en $S(p) = pE(p)$ et donc se représente par le schéma (non causal) :

E(p) → p → S(p)

$s(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau$, se représente selon la même logique par :

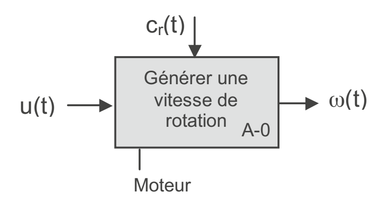
E(p) → $\dfrac{1}{p}$ → S(p)

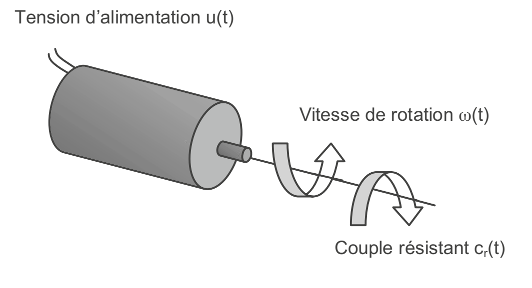
V-6 Exemple : asservissement de position par moteur à courant continu

V-6-1 Représentation du moteur par un schéma bloc

Voir chapitre 1, paragraphe III-4.

Un moteur à courant continu est commandé par une tension d'alimentation u(t). Il s'en suit, sous un couple résistant $c_r(t)$, une rotation à la vitesse $\omega(t)$ du rotor. Soit d'un point de vue fonctionnel, par exemple :

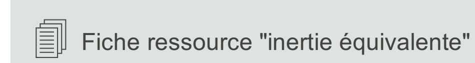




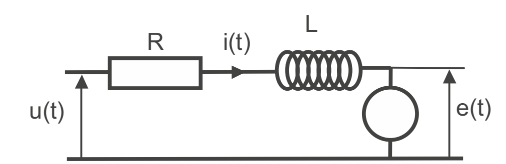
Quatre équations régissent son fonctionnement (sous réserve d'hypothèses simplificatrices usuelles) :







- L'équation électrique (loi d'Ohm dans le circuit d'induit), liant la tension d'alimentation u(t) à l'intensité du courant de commande i(t), s'obtient classiquement sachant que l'induit peut être modélisé comme une résistance R en série avec une inductance L et une force électromotrice e(t) :



$$u(t) - e(t) = R\, i(t) + L \frac{di}{dt}(t)$$

- L'équation mécanique s'obtient en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mécanique entraîné par le rotor tournant à la vitesse (pulsation) $\omega(t)$, soumis à un couple électromagnétique $c_m(t)$ et un couple résistant $c_r(t)$:

$$c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega}{dt}(t)$$

où J est l'inertie de l'ensemble des parties mobiles, ramenée sur le rotor.

- Les équations de couplage électromécanique s'écrivent :

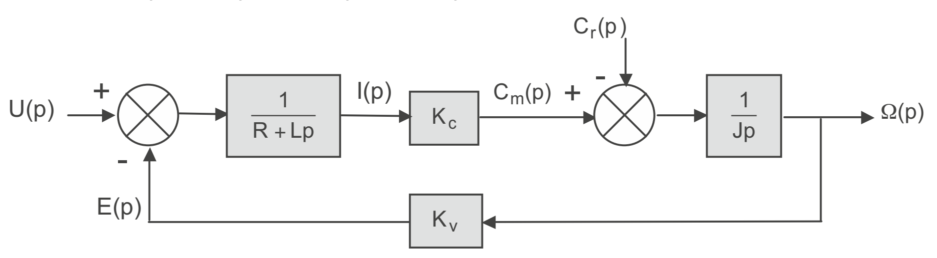
$$c_m(t) = K_c\, i(t)$$
$$e(t) = K_v\, \omega(t)$$

où K_C et K_V sont des constantes, appelées respectivement constante de couple et constante de vitesse.

Sous les conditions de Heaviside, ces quatre équations se transforment dans le domaine de Laplace en :

$$\begin{cases} U(p) - E(p) = R\,I(p) + Lp\,I(p) = (R + Lp)\,I(p) \text{ ou encore } I(p) = \dfrac{1}{R + Lp}[U(p) - E(p)] \\ C_m(p) - C_r(p) = Jp\,\Omega(p) \text{ ou encore } \Omega(p) = \dfrac{1}{Jp}[C_m(p) - C_r(p)] \\ C_m(p) = K_c\, I(p) \\ E(p) = K_v\, \Omega(p) \end{cases}$$

et cet ensemble d'équations peut se représenter par le schéma bloc :



Attention : Tout comme plus haut pour le filtre RC, ce schéma ne correspond absolument pas à la structure matérielle du moteur à courant continu. Le moteur ne contient ni boucle de retour ni comparateur ! Par exemple qualifier d'écart la grandeur [u(t) - e(t)] n'aurait aucun sens. C'est seulement une représentation graphique des équations.

Mais ce schéma fictif permet d'obtenir facilement, dans le domaine de Laplace, l'expression de la vitesse du rotor en fonction de la tension d'alimentation et du couple résistant :

$$\Omega(p) = \frac{\dfrac{K_c}{(R+Lp)Jp}}{1+\dfrac{K_vK_c}{(R+Lp)Jp}}U(p) - \frac{\dfrac{1}{Jp}}{1+\dfrac{K_vK_c}{(R+Lp)Jp}}C_r(p)$$

ou encore : $$\Omega(p) = \frac{\dfrac{1}{K_v}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2}U(p) - \frac{\dfrac{R+Lp}{K_vK_c}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2}C_r(p)$$

Cette expression permettrait, par transformation de Laplace inverse, d'avoir l'évolution temporelle de la vitesse $\omega(t)$ en fonction de la tension d'alimentation u(t) et du couple résistant $c_r(t)$.

Mais ce retour dans le domaine temporel ne sera pas toujours nécessaire. Comme le polynôme caractéristique commun aux deux fractions est du second ordre et à coefficients positifs, ce qui assure la stabilité (voir IV-8-4), on peut, par exemple, par utilisation du théorème de la valeur finale, déterminer la vitesse en régime permanent lorsque le moteur est commandé par une tension constante u_0 et subit un couple résistant constant c_{r0}.

La tension constante se traduit par un échelon, soit dans le domaine de Laplace : $U(p) = \dfrac{u_0}{p}$

De même pour le couple résistant : $C_r(p) = \dfrac{c_{r0}}{p}$

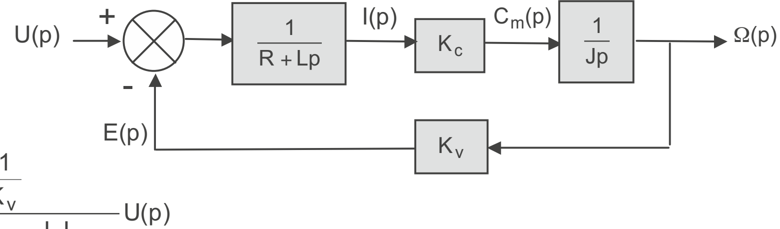
Alors : $$\Omega(p) = \frac{\dfrac{1}{K_v}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2}\frac{u_0}{p} - \frac{\dfrac{R+Lp}{K_vK_c}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2}\frac{c_{r0}}{p}$$

Et donc : $$\lim_{t\to\infty}\omega(t) = \lim_{p\to 0} p\Omega(p) = \frac{1}{K_v}u_0 - \frac{R}{K_vK_c}c_{r0}$$

La vitesse en régime permanent a donc une valeur proportionnelle à la tension d'alimentation diminuée d'une grandeur proportionnelle au couple résistant.

■ **En l'absence de couple résistant**

Si le couple résistant est nul, le schéma bloc se simplifie en :



Et donc : $$\Omega(p) = \frac{\dfrac{1}{K_v}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2}U(p)$$

N'ayant qu'une seule entrée, le moteur peut cette fois être représenté par une fonction de transfert et donc par un bloc unique :

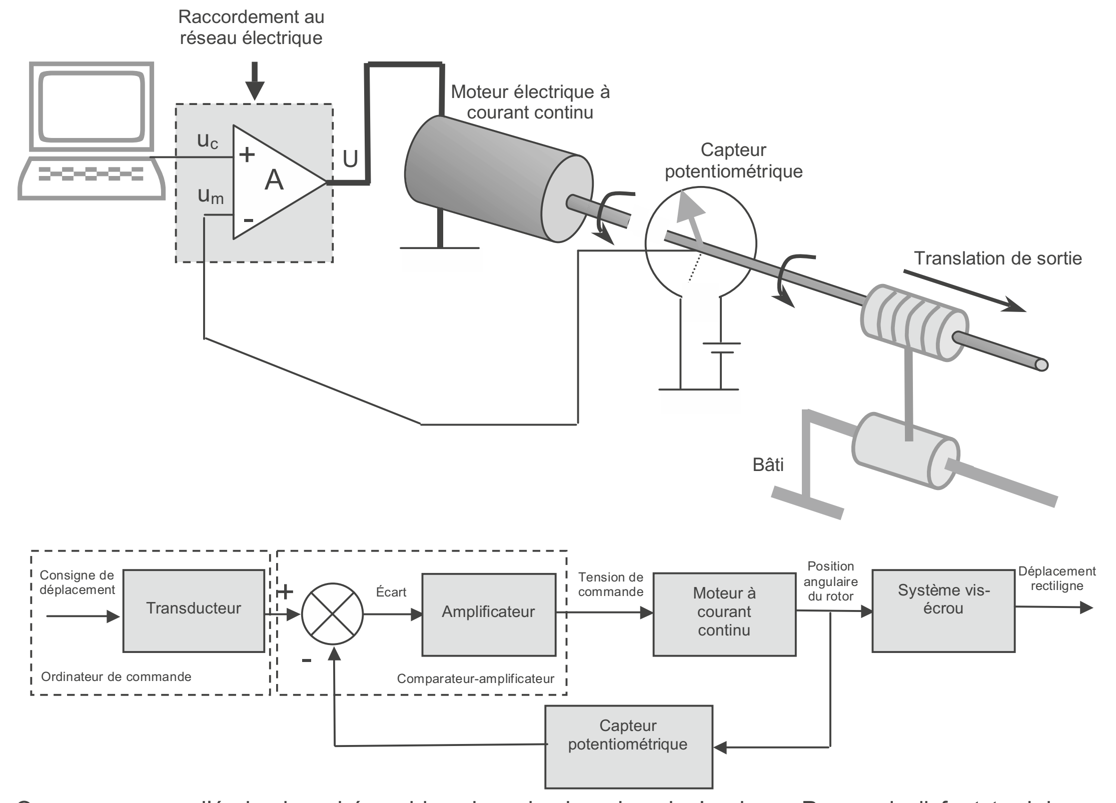
$$M(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\dfrac{1}{K_v}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2}$$

U(p) → M(p) → Ω(p)

Soumis à un échelon de tension u_0 , sa vitesse tendra asymptotiquement vers $\lim_{t\to\infty}\omega(t) = \dfrac{1}{K_v}u_0$

V-6-2 Asservissement de position sans couple résistant *Voir chapitre 2, paragraphe III-2.*

Un asservissement de position angulaire est obtenu à l'aide du moteur précédent, au rotor duquel est directement accouplé un système vis-écrou de transformation de mouvement. La consigne de position est fournie par un ordinateur de pilotage sous la forme d'une tension u_c. La position angulaire du rotor est mesurée par un capteur potentiométrique de gain C. Un comparateur-amplificateur de gain A compare la différence des tensions u_c de consigne et u_m issue du capteur potentiomètrique et amplifie l'écart afin de commander le moteur par une tension $u = A(u_c - u_m)$.



On se propose d'écrire le schéma bloc dans le domaine de Laplace. Pour cela il faut traduire chacun des blocs ci-dessus.

L'ordinateur élabore une tension de commande u_c proportionnelle à la position à atteindre x_c :
$u_c(t) = K\,x_c(t)$ *K étant une constante à choisir par le concepteur.*
Soit, dans le domaine de Laplace : $U_c(p) = K\,X_c(p)$.

Le potentiomètre fournit une tension u_m proportionnelle à la position angulaire du rotor θ : $u_m(t) = C\,\theta(t)$. Soit, dans le domaine de Laplace : $U_m(p) = C\,\Theta(p)$.

L'amplificateur a clairement un comportement traduit par $U(p) = A[U_c(p) - U_m(p)]$.

Le système vis-écrou transforme l'angle de rotation θ du rotor en le déplacement x de sortie par multiplication par le pas de la liaison hélicoïdale : $x(t) = \text{pas}\,\theta(t)$ si à l'instant initial θ et x ont des valeurs nulles (choix de l'origine). Soit, dans le domaine de Laplace :
$X(p) = \text{pas}\,\Theta(p)$

Reste le moteur qui a été modélisé précédemment (avec ou sans couple résistant). Commandé selon la tension u issue de l'amplificateur, et compte tenu de la valeur de l'éventuel couple résistant, il génère une rotation de son rotor à une vitesse ω connue.

Cette vitesse et l'angle θ mesuré par le capteur potentiométrique sont liés par une loi d'intégration, en effet :

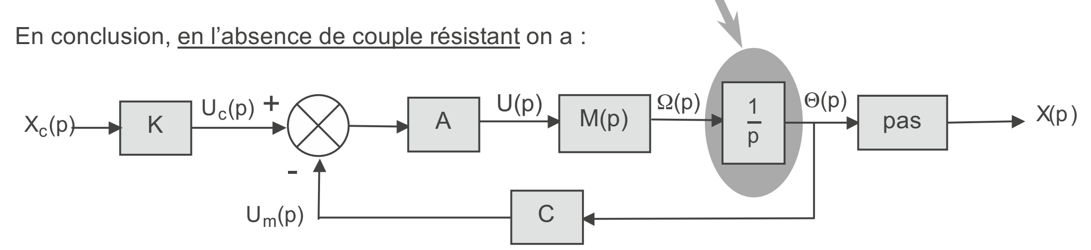
$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}(t)$ ou encore $\theta = \int_0^t \omega(\tau)d\tau$ compte tenu de la condition initiale retenue.

Ce qui se traduit dans le domaine de Laplace par :

$$\Theta(p) = \frac{1}{p}\Omega(p)$$

et donc par l'introduction d'un ***bloc fictif*** représentant cette intégration dans le schéma.

En conclusion, <u>en l'absence de couple résistant</u> on a :



Ce qui permet de calculer la fonction de transfert globale de l'asservissement de position :

$$H(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = K\frac{AM(p)\frac{1}{p}}{1 + CAM(p)\frac{1}{p}}pas = \frac{KpasAM(p)}{p + CAM(p)} = \frac{\frac{Kpas}{C}}{1 + \frac{p}{CAM(p)}}$$

avec $M(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{K_v}}{1 + \frac{RJ}{K_vK_c}p + \frac{LJ}{K_vK_c}p^2}$ (absence de couple résistant)

Donc $H(p) = \frac{\frac{Kpas}{C}}{1 + \frac{pK_v}{CA}[1 + \frac{RJ}{K_vK_c}p + \frac{LJ}{K_vK_c}p^2]} = \frac{\frac{Kpas}{C}}{1 + \frac{K_v}{CA}p + \frac{RJ}{CAK_c}p^2 + \frac{LJ}{CAK_c}p^3}$

Soit un système :

- d'ordre 3
- de gain $\frac{Kpas}{C}$
- de classe 0.

Alors, sous réserve de stabilité (pour un polynôme de degré 3, même à coefficients positifs, ce n'est pas garanti, voir page suivante, remarque 1), la position de sortie convergera vers la position de consigne si le gain vaut 1. Ceci permet de régler la valeur du transducteur, au niveau du programme dans l'ordinateur, tel que :

$\frac{Kpas}{C} = 1$ soit $K = \frac{C}{pas}$

Ceci fournit une autre façon de raisonner par rapport à ce qui a déjà été fait plusieurs reprises au chapitre 2, en particulier au paragraphe III-2. Le raisonnement reposait alors sur la nécessité de comparer des grandeurs comparables au niveau du comparateur.

Cela revient ici à dire que la tension de commande u_c doit représenter la consigne de commande x_c avec la même proportionnalité que celle avec laquelle la tension de mesure u_m représente la position x. Ceci impose bien que C=Kpas, c'est-à-dire que ***le produit des gains à l'extérieur de la boucle doit être égal au gain de la boucle de retour***.

Soit, une fois ce réglage assuré :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{K_v}{CA}p + \frac{RJ}{CAK_c}p^2 + \frac{LJ}{CAK_c}p^3}$$

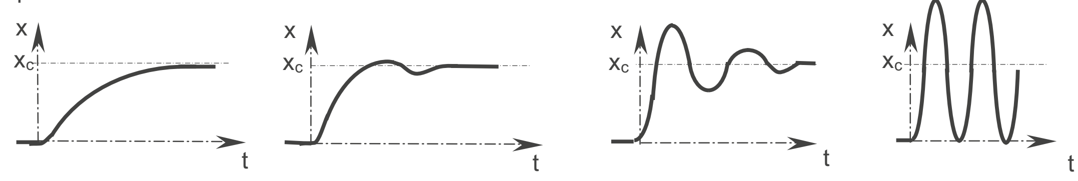
■ **Remarque 1 : stabilité**

Le critère de Routh (voir IV-8-4) établit qu'un polynôme du troisième ordre à coefficients réels positifs $a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3$ possède des racines à parties réelles strictement négatives si et seulement si :

- aucun des coefficients n'est nul,
- $a_1a_2 > a_0a_3$.

Cela impose ici que : $\frac{K_v}{CA} x \frac{RJ}{CAK_c} > \frac{LJ}{CAK_c}$ soit $\frac{K_vR}{CA} > L$ ou encore $\boxed{A < \frac{K_vR}{CL}}$.

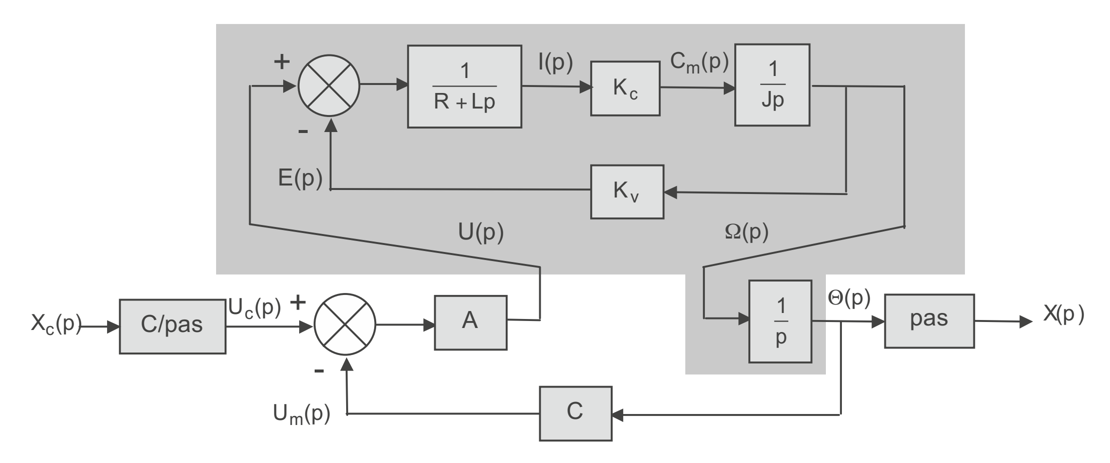
Cette relation fournit, toutes les autres constantes étant en général fixées par ailleurs, la ***valeur limite du gain de l'amplificateur*** afin de ne pas déstabiliser le système. En pratique, il faudra choisir une valeur bien inférieure à cette valeur limite pour éviter de trop grandes oscillations de la réponse :



Allures de réponses à un échelon pour diverses valeurs de A, croissantes jusqu'à la valeur limite générant l'instabilité. Voir V-7 et surtout chapitre 6.

■ **Remarque 2 : détail du moteur en l'absence de couple résistant**

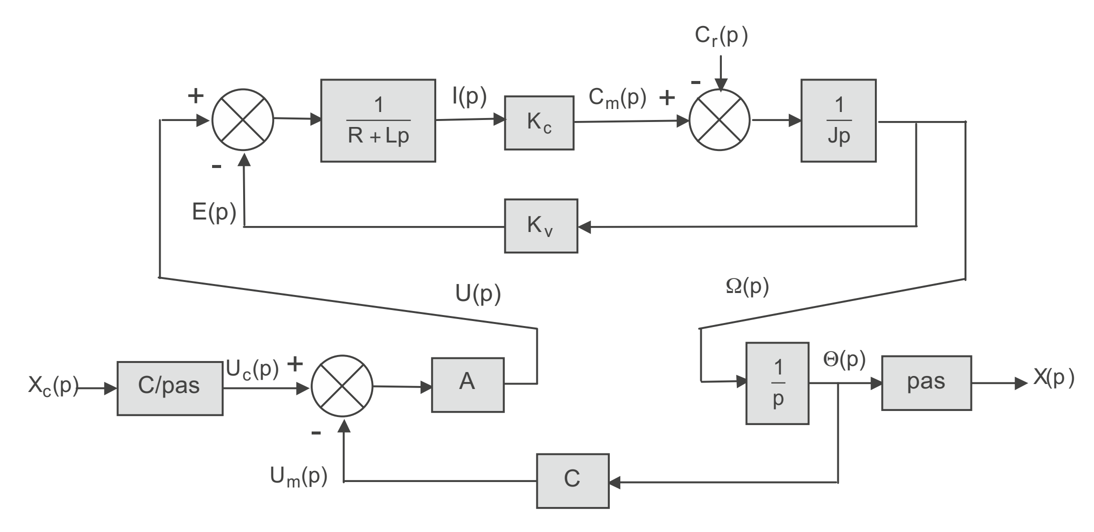
Dans le schéma précédent, on peut détailler le fonctionnement du moteur au sein de l'asservissement selon :



Une des difficultés de ce type de schéma est de distinguer les représentations structurelles réelles des représentations purement fictives. Ces dernières traduisent uniquement des équations, sans représenter des objets matériels, comme ici ce qui est interne au moteur ou encore le bloc en 1/p (en grisé ci-dessus).

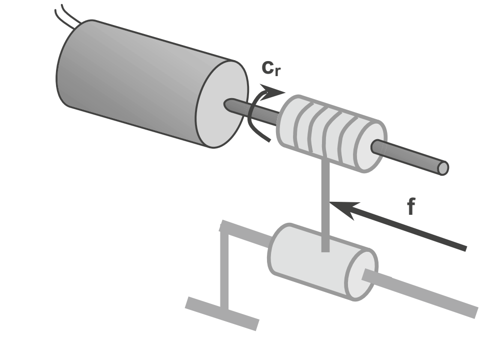
V-6-3 Asservissement de position avec couple résistant

Si maintenant on tient compte du couple résistant, le schéma devient :



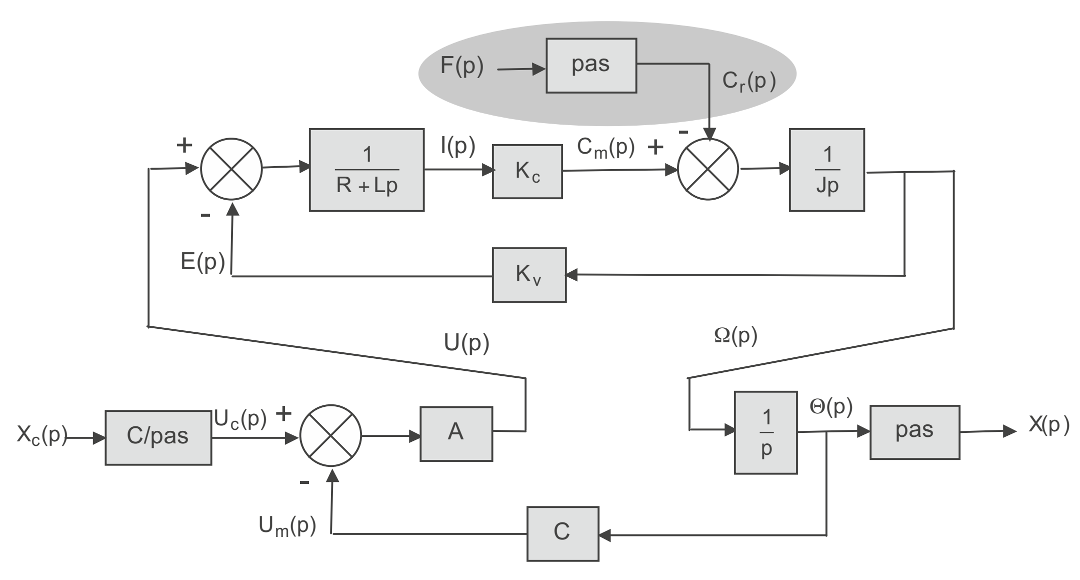
Cette fois le système présente deux entrées et il est donc impossible de représenter l'ensemble des blocs traduisant le moteur par un seul. Le schéma bloc ci-dessus est donc le schéma de travail nécessaire.

Il peut être intéressant, pour plus de clarté et compte tenu de la transformation de mouvement par système vis-écrou, d'exprimer le couple résistant c_r en fonction de l'effort résistant f sur la sortie. Si les liaisons sont parfaites, ces deux grandeurs mécaniques sont liées par : $c_r(t) = \text{pas}\, f(t)$.

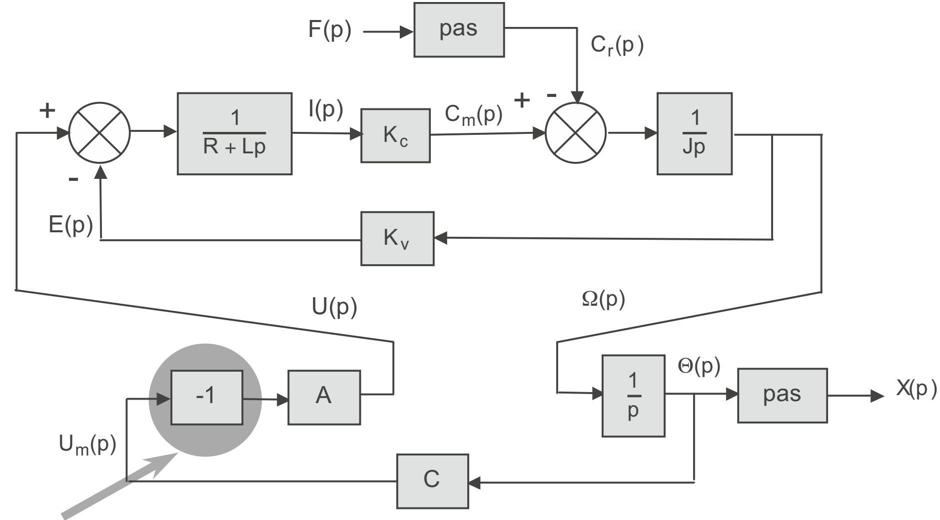




Soit, dans le domaine de Laplace $C_r(p) = \text{pas}\, F(p)$,
Et donc la modification suivante du schéma :



À partir de ce schéma, on peut déterminer quel est le recul du mobile soumis à une certaine force f_0. Pour cela, il faut considérer le système avec une ***consigne de position nulle***, donc seulement soumis à l'effort extérieur. Le schéma devient alors :



Attention au signe dans la boucle de retour.

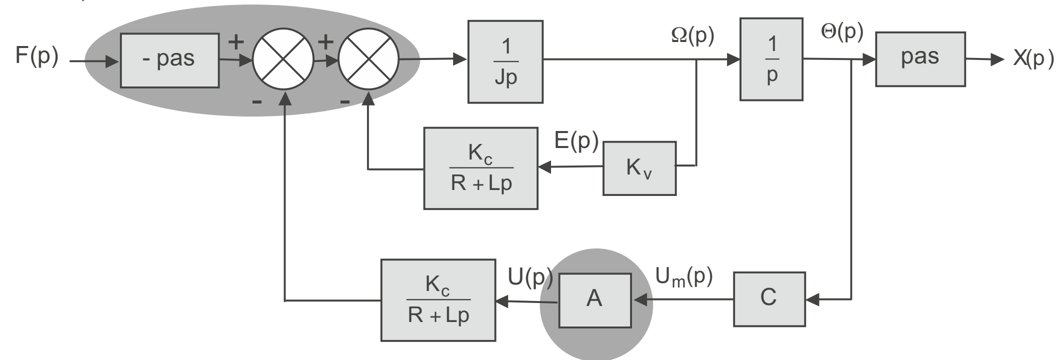
Ce schéma n'a plus qu'une seule entrée. La position ne dépend que de la force. On peut le modifier ainsi :

Puis :

Et encore :

NB : $C_m(p)$ n'apparaît plus explicitement sur ce nouveau schéma.

Ce dernier schéma a l'avantage de présenter une structure avec une boucle interne, ce qui va permettre l'utilisation aisée de la formule de Black. Préalablement, on peut procéder à un dernier aménagement qui consiste à écrire les deux comparateurs avec les signes d'utilisation de cette formule, soit :



La fonction de transfert de la boucle interne s'écrit :

$$\frac{\dfrac{1}{Jp}}{1+\dfrac{K_vK_c}{(R+Lp)Jp}}=\frac{\dfrac{R+Lp}{K_vK_c}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2}$$

NB : on retrouve la fonction de transfert qui transforme le couple résistant en la vitesse de rotation, établie en V-6-1 pour le moteur seul.

D'où le schéma réduit :

F(p) → - pas → + / - → $\dfrac{\dfrac{R+Lp}{K_vK_c}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2}$ → Ω(p) → $\dfrac{1}{p}$ → Θ(p) → pas → X(p)

Boucle de retour : C → $U_m(p)$ → A → U(p) → $\dfrac{K_c}{R+Lp}$

Où on lit aisément :

$$\frac{X(p)}{F(p)}=-pas^2\,\frac{\dfrac{\dfrac{R+Lp}{K_vK_c}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2}\;\dfrac{1}{p}}{1+\dfrac{CAK_c}{R+Lp}\;\dfrac{\dfrac{R+Lp}{K_vK_c}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2}\;\dfrac{1}{p}}=-pas^2\,\frac{\dfrac{R+Lp}{K_vK_c}}{[1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2]p+\dfrac{CA}{K_v}}$$

$$\boxed{\frac{X(p)}{F(p)}=-\frac{R\,pas^2}{ACK_c}\,\frac{1+\dfrac{L}{R}p}{1+\dfrac{K_v}{CA}p+\dfrac{RJ}{CAK_c}p^2+\dfrac{LJ}{CAK_c}p^3}}$$

Soit un système :

- d'ordre 3
- de gain $-\dfrac{R\,pas^2}{ACK_c}$
- de classe 0.

Le dénominateur de cette fonction de transfert est le même que celui de la fonction H(p) déterminée en V-6-2, liant le déplacement à la consigne en l'absence de couple résistant. La condition de stabilité est donc la même :

$A < \frac{K_v R}{CL}$ Voir remarque 1 plus haut.

Alors, soumis à un effort résistant constant f_0, le système va se déplacer (reculer puisque le signe est négatif) de :

$$\boxed{x_\infty = -\frac{R\,pas^2}{ACK_c} f_0}$$

Ceci s'obtient directement par définition du gain $-\frac{R\,pas^2}{ACK_c}$.

Une autre méthode consiste à utiliser le théorème de la valeur finale.

Dans le domaine de Laplace, le système subissant $F(p) = \frac{f_0}{p}$, la sortie se déplace de :

$$X(p) = -\frac{R\,pas^2}{ACK_c} \frac{1 + \frac{L}{R}p}{1 + \frac{K_v}{CA}p + \frac{RJ}{CAK_c}p^2 + \frac{LJ}{CAK_c}p^3{}_c} \frac{f_0}{p}$$

qui tend asymptotiquement vers : $x_\infty = \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{p \to 0} pX(p) = -\frac{R\,pas^2}{ACK_c} f_0$

Il est intéressant de noter que ce recul sera d'autant plus faible que :

- le pas de la liaison hélicoïdale sera faible (moindre amplification mécanique),
- la résistance de l'induit du moteur électrique sera faible (pertes par effet Joule minimales),
- les différents gains A, C et K_c seront grands.

En particulier, on peut noter que A devra être le plus grand possible pour que le système supporte au mieux les efforts, mais que sa valeur maxi se trouve limitée par des considérations liées à la stabilité et à la limitation des oscillations.

■ **Remarque : validité du modèle**

Le modèle liant la force à vaincre au couple résistant a supposé les liaisons parfaites. En particulier pour la liaison hélicoïdale, cette hypothèse est peut-être forte. On peut même imaginer une liaison hélicoïdale irréversible entraînant, malgré l'effort à vaincre, une absence de couple résistant et donc une capacité du système à supporter un effort important sans reculer. Mais à l'inverse, une telle liaison, fortement imparfaite, est grande consommatrice d'énergie lorsque l'on commande un déplacement. En général, donc, dans les réalisations industrielles modernes de ce type de transformation de mouvement, on utilise des liaisons hélicoïdales à billes, possédant un bon rendement énergétique, mais dont le caractère alors réversible entraîne l'inconvénient qui vient d'être mis en évidence.

V-6-4 Bilan

Dans le domaine de Laplace, il a été établi :

- au paragraphe V-6-2, qu'en l'absence d'effort résistant à vaincre (couple résistant nul), soumis à une consigne $X_c(p)$, le système génère un déplacement :

  $$X(p) = \frac{1}{1 + \frac{K_v}{CA}p + \frac{RJ}{CAK_c}p^2 + \frac{LJ}{CAK_c}p^3} X_c(p)$$

  (ceci nécessitant le réglage correct du transducteur de consigne)

- au paragraphe V-6-3, qu'avec une consigne de déplacement nulle, soumis à un effort résistant F(p), le système génère un déplacement :

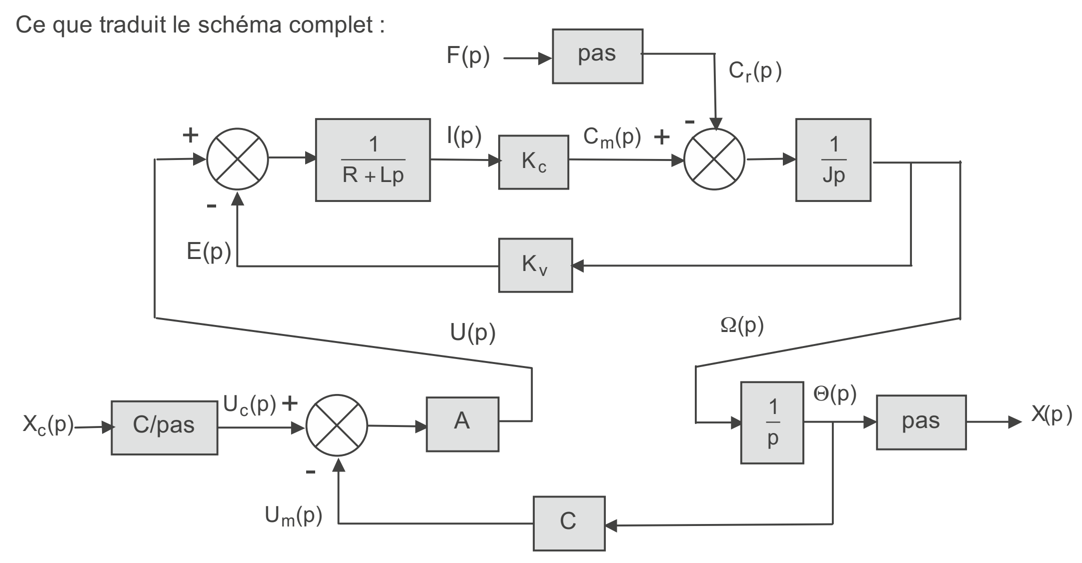
$$X(p) = -\frac{R\,pas^2}{ACK_c}\,\frac{1+\frac{L}{R}p}{1+\frac{K_v}{CA}p+\frac{RJ}{CAK_c}p^2+\frac{LJ}{CAK_c}p^3}\,F(p)$$

Finalement, par superposition, dans le cas général du système devant obéir à une consigne de déplacement $X_c(p)$ tout en vainquant un effort F, le déplacement sera donné par :

$$X(p) = \frac{1}{1+\frac{K_v}{CA}p+\frac{RJ}{CAK_c}p^2+\frac{LJ}{CAK_c}p^3}X_c(p) - \frac{R\,pas^2}{ACK_c}\,\frac{1+\frac{L}{R}p}{1+\frac{K_v}{CA}p+\frac{RJ}{CAK_c}p^2+\frac{LJ}{CAK_c}p^3}\,F(p)$$

Avec une condition de stabilité issue du dénominateur commun des deux fractions : $A < \frac{K_v R}{CL}$

Ce que traduit le schéma complet :



Et alors, si la consigne est par exemple un échelon x_c et si la force à vaincre est constante f_0, le déplacement évoluera vers une valeur asymptotique qui est :

$$x_\infty = x_c - \frac{R\,pas^2}{ACK_c}f_0$$

Donc le système n'atteindra pas exactement la position attendue.

Face à cet inconvénient, l'automatique possède des réponses. Nous verrons en particulier que si, à la place de l'amplificateur de gain A, on choisit un correcteur plus élaboré, par exemple un correcteur proportionnel intégral, il est possible d'annuler l'effet de l'effort résistant constant.

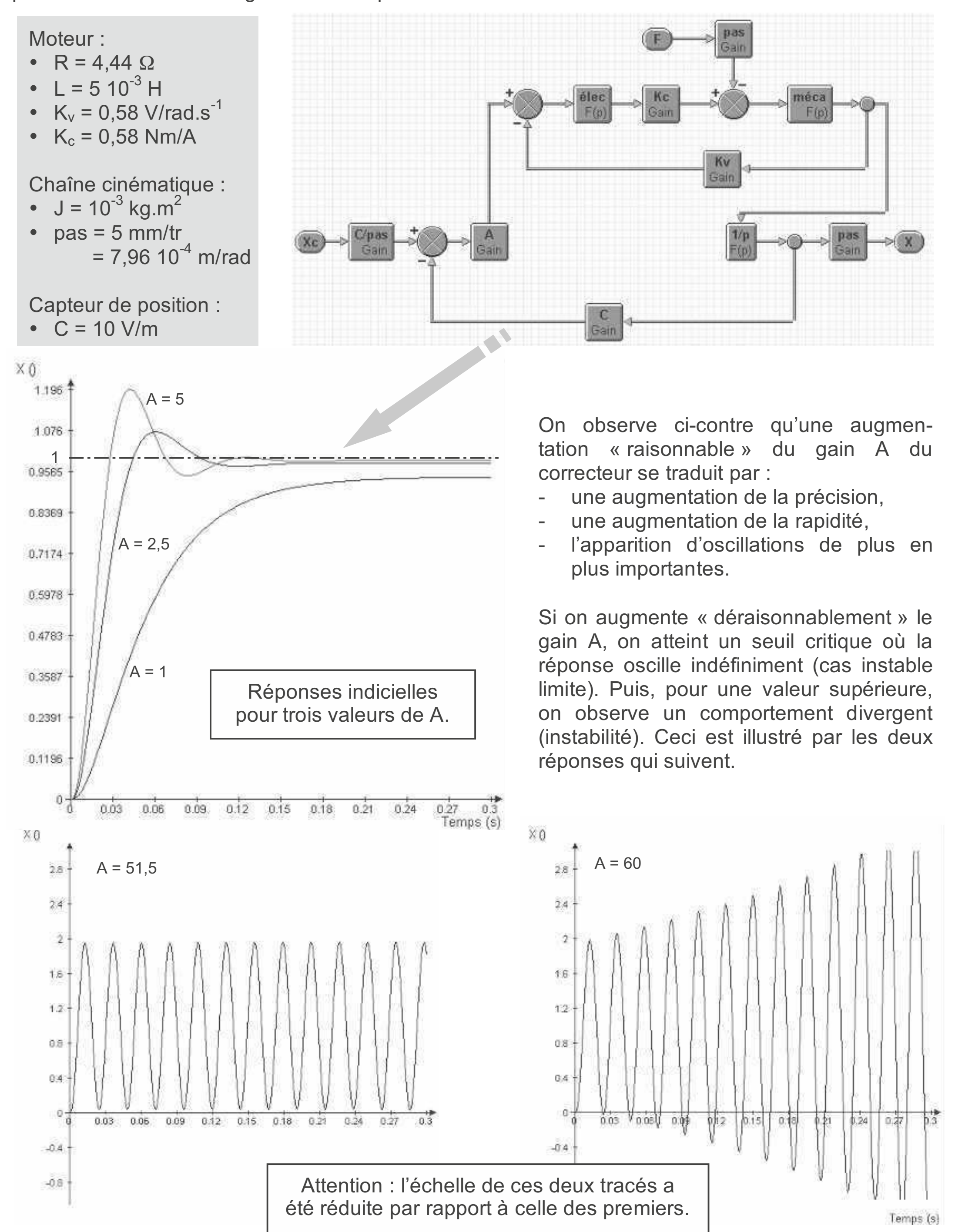
V-7 Logiciels de calcul

Les calculs qui viennent d'être conduits peuvent être vite assez lourds. De plus, ci-dessus, ils ont été limités au domaine de Laplace, le retour dans le domaine temporel n'ayant été abordé qu'en ce qui concerne le comportement aux temps longs, par le théorème de la valeur finale.

La connaissance explicite des lois temporelles nécessite la transformation inverse, par décomposition en éléments simples des fractions rationnelles et identification dans la table, ce qui peut-être très fastidieux !

En pratique, l'ingénieur dispose de logiciels qui travaillent directement à partir de schémas blocs établis dans le domaine de Laplace, à l'aide d'une interface graphique. Ces logiciels donnent alors accès au comportement temporel des sorties pour des sollicitations des entrées variées. On mesure alors l'importance de l'outil schéma bloc qui possède un caractère universel.

Pour illustrer le propos, voici un schéma bloc et quelques réponses obtenues à l'aide d'un tel logiciel pour l'asservissement de position précédent soumis à un effort résistant de 100 N, et ceci pour diverses valeurs du gain A de l'amplificateur :



Réponses indicielles pour trois valeurs de A.

On observe ci-contre qu'une augmentation « raisonnable » du gain A du correcteur se traduit par :

- une augmentation de la précision,
- une augmentation de la rapidité,
- l'apparition d'oscillations de plus en plus importantes.

Si on augmente « déraisonnablement » le gain A, on atteint un seuil critique où la réponse oscille indéfiniment (cas instable limite). Puis, pour une valeur supérieure, on observe un comportement divergent (instabilité). Ceci est illustré par les deux réponses qui suivent.

Attention : l'échelle de ces deux tracés a été réduite par rapport à celle des premiers.

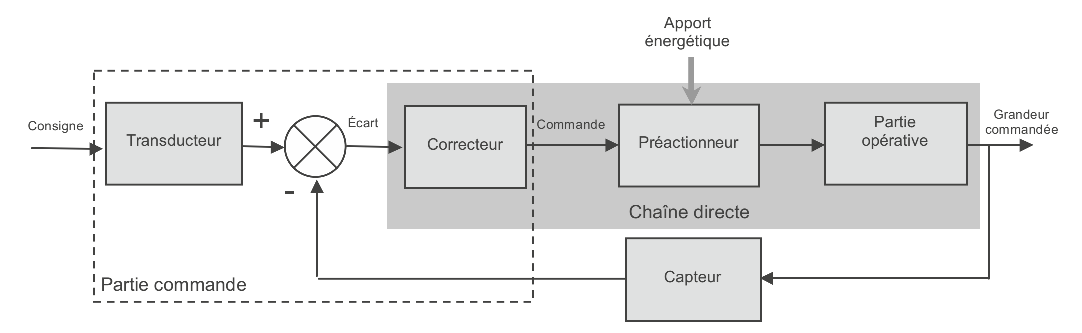
VI - CAS D'UN SYSTÈME ASSERVI : FONCTIONS DE TRANSFERT EN BOUCLE OUVERTE ET EN BOUCLE FERMÉE

VI-1 Rappel de la définition d'un système asservi

Voir chapitre 2.

Un système asservi est un système bouclé possédant un apport énergétique dans la boucle. Sa fonction est de commander une grandeur de sortie à partir d'une consigne, qui n'apporte pas l'énergie. Il contient un comparateur qui élabore la différence entre une grandeur image de la sortie (ou plus rarement la sortie elle-même) et une grandeur image de l'entrée (idem). Cette différence est appelée écart et constitue l'entrée de la chaîne directe.

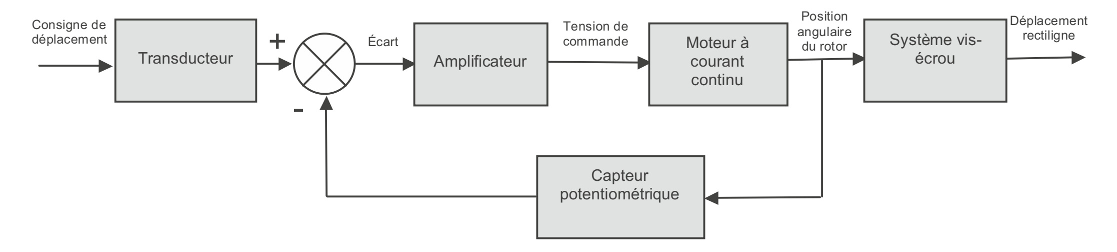
La structure usuelle d'un système asservi est donc la suivante :



Le correcteur élabore la commande à partir de l'écart. Le correcteur le plus élémentaire est un simple gain. Cette commande permet au préactionneur de fournir l'énergie à la partie opérative. En général cet apport énergétique n'est pas représenté sur un schéma bloc, mais implicite. La partie opérative élabore la grandeur commandée.

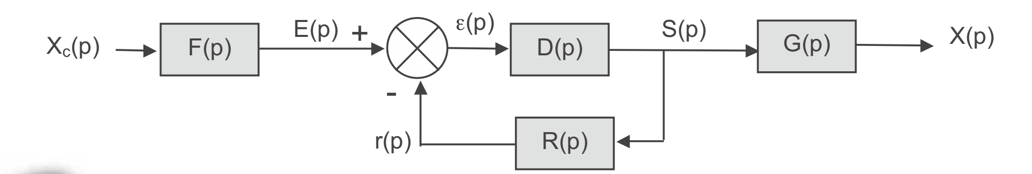
Bien entendu il s'agit là de la structure type, différenciant les entités fonctionnelles. Matériellement le préactionneur et le correcteur peuvent ne former qu'un seul objet, la partie opérative peut comporter des boucles internes, il peut y avoir des blocs fonctionnels supplémentaires en dehors de la boucle, etc.

Par exemple, l'asservissement de position précédemment étudié est un système asservi :



L'amplificateur joue à la fois le rôle de correcteur et de préactionneur, la partie opérative est constituée du moteur à courant continu (l'actionneur) et du système vis-écrou (ensemble transmetteur et effecteur). La chaîne de retour n'est pas prise sur la grandeur commandée (déplacement) mais sur une grandeur intermédiaire (position angulaire du rotor).

Formellement, et après réduction d'éventuelles boucles internes, un système asservi pourra donc être décrit par un schéma du type :



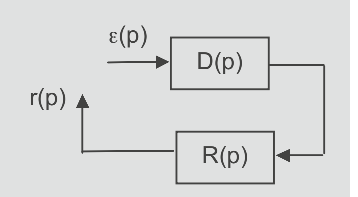
VI-2 FTBO et FTBF

Dans le cas des systèmes asservis, ***et uniquement dans ce cas***, on définit deux fonctions de transfert particulières qui sont :

- la ***fonction de transfert en boucle ouverte*** ou FTBO(p), appelée aussi fonction de boucle,
- la ***fonction de transfert en boucle fermée*** ou FTBF(p).

Avec les notations de la figure ci-dessus :

■ La fonction de transfert en ***boucle ouverte*** est, par définition :
$\mathrm{FTBO}(p) = D(p)R(p)$
On l'appelle ainsi car c'est la fonction de transfert obtenue quand on parcourt toute la boucle, celle-ci étant ouverte juste avant le comparateur :



$\mathrm{FTBO}(p) = \dfrac{r(p)}{\varepsilon(p)}$, la boucle étant ouverte.

■ La fonction de transfert en ***boucle fermée*** est la fonction de transfert globale du système :

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)}$$

Remarque :

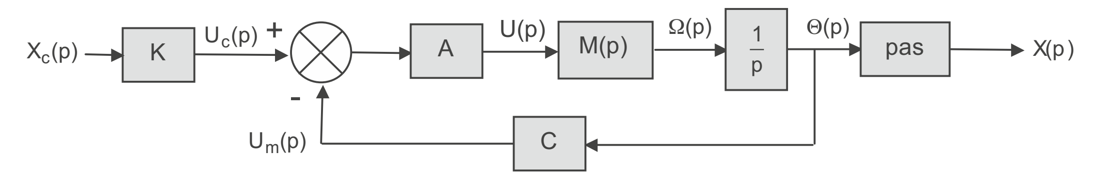
Peut-être paradoxalement à premier abord, nous verrons (cf. plus loin le paragraphe VII et surtout chapitre 6) que l'essentiel des caractéristiques d'un système asservi découle de sa FTBO. Finalement on peut alors souvent se dispenser de l'étude complète de la FTBF. Ceci explique peut-être que contrairement à la FTBO, unanimement définie comme il vient d'être fait, la FTBF a une définition moins arrêtée et se trouvera également parfois définie par :

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

L'essentiel est de bien comprendre ce qui est utile compte tenu de la manière dont se présente l'étude.

Exemple :

Le système d'asservissement de position cité ci-dessus a pour schéma bloc (voir V-6-2) :

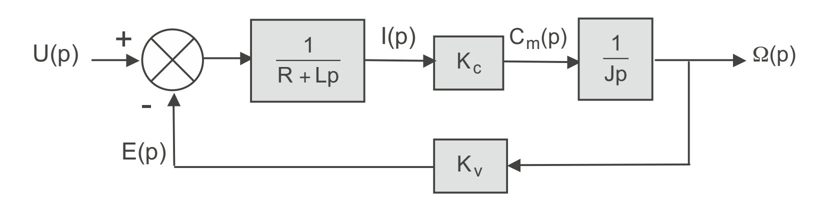


Donc :

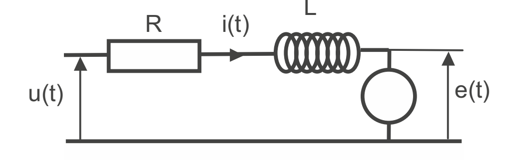
$$\mathrm{FTBO}(p) = AM(p)\frac{1}{p}C$$

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = K\,\frac{AM(p)\frac{1}{p}}{1+\mathrm{FTBO}(p)}\,\mathrm{pas}$$

■ **Attention :** Si un système représenté par un schéma bloc bouclé n'est pas un système asservi, ces deux définitions n'ont ***aucun sens***. Par exemple, si on détaille le bloc M(p) représentant le moteur de l'exemple précédent, on a vu que l'on pouvait le représenter par :



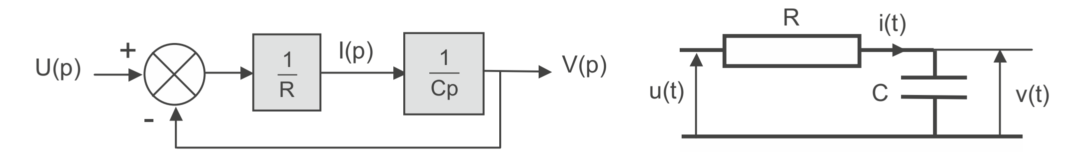
Mais ce n'est pas pour autant un système asservi ! La structure électrique rappelée ci-contre en atteste : aucun comparateur ne vient comparer u(t) et e(t). Cela a déjà été souligné : le schéma bloc bouclé est uniquement une représentation graphique des équations qui régissent le fonctionnement du moteur.



De plus, on peut remarquer que l'apport énergétique se fait par l'entrée (la tension u) et non pas dans la boucle, comme cela se fait dans les systèmes asservis.

Donc on ne définira pas de FTBO ni de FTBF sur ce schéma, de même que l'on ne parlera pas d'écart.

On peut faire la même mise en garde pour le circuit RC dont on a vu qu'il pouvait formellement se représenter par un schéma bouclé sans être pour autant un système asservi :



VI-3 Retour unitaire

Un système asservi est dit à retour unitaire si son schéma bloc est du type ci-contre, c'est-à-dire que la grandeur commandée est directement comparée à la grandeur de commande.

Alors la boucle ouverte est confondue avec la chaîne directe :

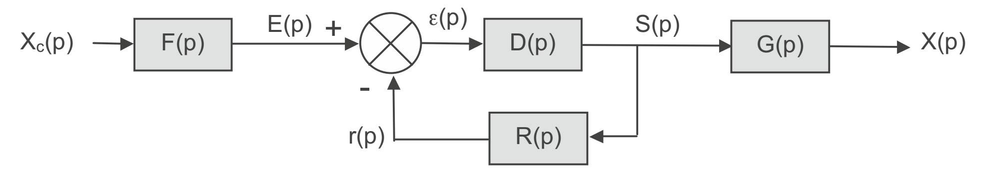
$$\mathrm{FTBO}(p) = D(p)$$

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{\mathrm{FTBO}(p)}{1 + \mathrm{FTBO}(p)}$$

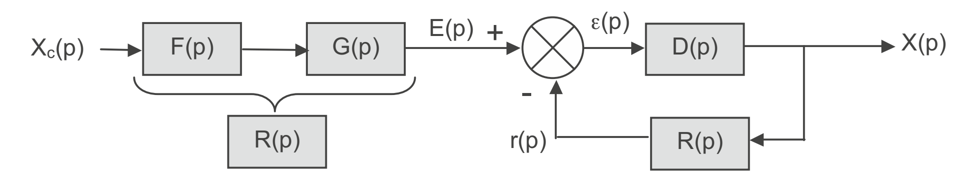
Par ailleurs ***l'écart et l'erreur sont alors la même grandeur*** puisque $\varepsilon(p) = X_c(p) - X(p)$

Les systèmes asservis réellement à retour unitaire sont très rares, car en général il n'est pas aisé de comparer des grandeurs autres qu'électriques. Ainsi, la boucle de retour contient-elle généralement un capteur.

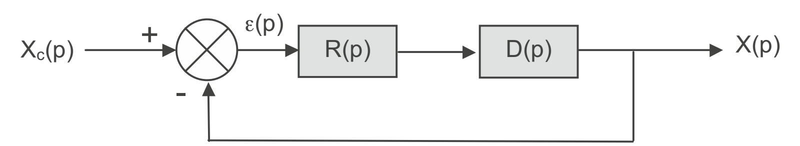
Mais alors, très généralement, afin de comparer des grandeurs comparables au niveau du comparateur, il y a des adaptations de fonctions de transfert qui permettent de décrire le système asservi comme avec un retour unitaire. Usuellement on dit qu'on l'a ***ramené*** à un retour unitaire. Reprenons par exemple le schéma général :



Afin que E(p) et r(p) soient ***comparables*** et puisque X(p) et X_c(p) le sont, on a nécessairement l'adaptation : F(p)G(p) = R(p). Ceci permet d'écrire le schéma sous la forme :



Ou donc encore, sous la forme ***ramenée à retour unitaire*** :



VII - FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE OUVERTE ET PRÉCISION D'UN SYSTÈME ASSERVI

VII-1 Précision d'un système asservi : erreur et écart

Voir chapitre 2, V-4.

La précision d'un système asservi se caractérise par l'erreur obtenue pour une consigne donnée. Il s'agit de la différence entre la consigne et la sortie. Elle est qualifiée de statique lorsqu'il s'agit de l'erreur en régime permanent, ce qui suppose son existence et donc la stabilité du système.

Définir une erreur suppose que celle-ci ait un sens et impose deux conditions. La première, bien entendu, est que l'entrée et la sortie soient de même nature, pour que leur comparaison soit possible. Mais de plus, la notion d'erreur revêt un caractère subjectif qui attend, a priori, que celle-ci soit nulle. Aussi n'a-t-elle de sens que si l'entrée est effectivement une ***consigne***, au sens de valeur attendue pour la sortie, ce qui constitue une seconde condition. À titre de contre-exemple, un amplificateur possède bien une entrée et une sortie de même nature, mais il n'est pas attendu que la sortie atteigne le même niveau que la sortie, au contraire : parler d'erreur en les comparant n'aurait alors aucun sens.

Ainsi, si on exclut les cas où le système inclut une amplification ou une réduction, il existe toujours des adaptations à la boucle de retour, telles que dans les schémas ci-dessus, afin que la comparaison ait un sens. Ceci permet de systématiquement pouvoir décrire les systèmes par des schémas à ***retour unitaire***, ce qui donne toute sa généralité à une telle description et ***permet de confondre erreur et écart***.

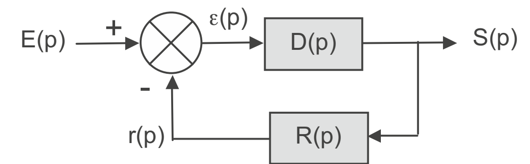
En d'autres termes, ***si l'erreur a un sens*** le système peut être ramené à un retour unitaire et ***l'erreur se confond alors avec l'écart*** calculé sur ce schéma.

Si l'erreur n'a pas de sens, un écart peut toujours être calculé mais il ne correspond pas à une erreur. Cela se rencontre dans les systèmes avec amplification ou réduction, mais aussi, par exemple, dans les éventuelles boucles internes à un asservissement.

Les développements qui suivent vont montrer que cet écart se détermine aisément à partir de la simple connaissance de la FTBO.

VII-2 Calcul de l'écart à partir de la FTBO

D'une manière générale, que le système soit à retour unitaire ou pas, si on s'intéresse à la boucle ci-contre, l'écart se calcule par :



$\varepsilon(p) = E(p) - r(p) = E(p) - R(p)S(p)$

or $S(p) = \dfrac{D(p)}{1+FTBO(p)}E(p)$,

d'où $\varepsilon(p) = E(p) - R(p)\dfrac{D(p)}{1+FTBO(p)}E(p) = [1 - \dfrac{FTBO(p)}{1+FTBP(p)}]E(p)$

ou encore $\varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1+FTBO(p)}$

Ce résultat est très important. Il permet par exemple de calculer aisément l'écart statique relatif de position : il suffit pour cela de considérer une entrée en échelon unitaire et d'utiliser le théorème de la valeur finale, la définition de l'écart statique de position imposant que le système soit stable, soit :

$E(p) = 1/p$ et $\varepsilon_{s\%} = \lim\limits_{p \to 0} p\dfrac{1/p}{1+FTBO(p)} = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{1}{1+FTBO(p)}$

de même pour l'écart statique de traînage pour une pente unitaire :

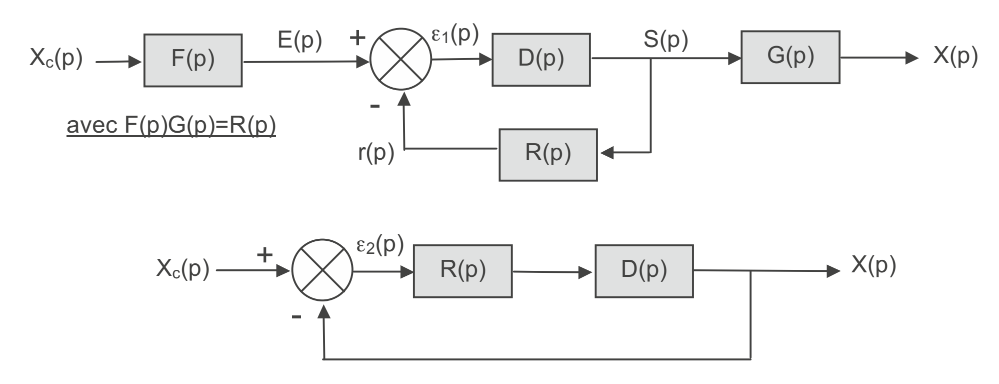
$E(p) = 1/p^2$ et $\varepsilon_{v\%} = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{1/p}{1+FTBO(p)}$

Etc.

■ **Remarque :** Il faut bien comprendre que dans la relation précédente, le numérateur E(p) est l'entrée effective de la boucle :

$\varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1+FTBO(p)}$ ←

Ainsi, sur les schémas suivants, bien qu'ils soient ***globalement*** équivalents, les écarts ne sont pas les mêmes :



Le premier est : $\varepsilon_1(p) = \dfrac{E(p)}{1+D(p)R(p)} = \dfrac{F(p)X_c(p)}{1+D(p)R(p)}$

Le second est : $\varepsilon_2(p) = \dfrac{X_c(p)}{1+D(p)R(p)}$

Donc ces deux écarts sont liés par : $\varepsilon_1(p) = F(p)\varepsilon_2(p)$.

■ **et l'erreur ?**

Par contre les erreurs sont bien entendu les mêmes. Ce qui se vérifie aisément ci-après :

- avec le second schéma, à retour unitaire, ***l'erreur est égale à l'écart***, donc directement $Er(p) = \dfrac{X_c(p)}{1+D(p)R(p)}$
- avec le premier schéma, on écrit que $Er(p) = X_c(p) - X(p) = \dfrac{E(p)}{F(p)} - G(p)S(p)$

  soit : $Er(p) = \dfrac{1}{F(p)}[E(p) - F(p)G(p)S(p)] = \dfrac{1}{F(p)}[E(p) - R(p)S(p)] = \dfrac{\varepsilon_1(p)}{F(p)}$

  sachant que $\varepsilon_1(p) = \dfrac{F(p)X_c(p)}{1+D(p)R(p)}$, on retrouve bien $Er(p) = \dfrac{X_c(p)}{1+D(p)R(p)}$

On retiendra donc bien ce qui a déjà été énoncé plus haut que l'erreur, si elle a un sens, est égale à l'écart uniquement si celui-ci est ***calculé sur le schéma à retour unitaire*** (ici le second schéma).

VII-3 Influence de la classe de la FTBO sur l'écart

VII-3-1 Écriture de l'écart en fonction du gain et de la classe en boucle ouverte

La FTBO étant écrite sous forme canonique $FTBO(p) = \dfrac{K_{BO}}{p^{\alpha_{BO}}} \dfrac{n(p)}{d(p)}$, avec n(0) = d(0) = 1,

l'écart s'écrit : $\varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1+FTBO(p)} = \dfrac{E(p)}{1+\dfrac{K_{BO}}{p^{\alpha_{BO}}}\dfrac{n(p)}{d(p)}} = \dfrac{p^{\alpha_{BO}} E(p)}{p^{\alpha_{BO}} + K_{BO}\dfrac{n(p)}{d(p)}}$

où on rappelle que :
K_{BO} est le gain de la boucle ouverte
α_{BO} est la classe de la boucle ouverte.

VII-3-2 Écart statique (relatif) de position

L'écart statique *relatif* de position (entrée en échelon *unitaire* E(p) = 1/p) s'écrit alors :

$$\varepsilon_{s\%} = \lim_{p\to 0} p \frac{1/p}{1+FTBO(p)} = \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha_{BO}}}{p^{\alpha_{BO}} + K_{BO}}$$

- Si $\alpha_{BO} = 0$, $\varepsilon_{s\%} = \dfrac{1}{1+K_{BO}}$
- Si $\alpha_{BO} > 0$, $\varepsilon_{s\%} = \dfrac{0}{0+K_{BO}} = 0$

Ainsi, un système asservi, sans perturbation, ayant au moins une intégration dans sa boucle (classe α_{BO} de la FTBO > 0) possède un écart statique de position nul. Dans le cas contraire, cet écart ne peut pas être nul, mais est d'autant plus faible que le gain de la boucle (K_{BO}) est grand.

La situation avec perturbation sera envisagée plus loin (VII-3-4).

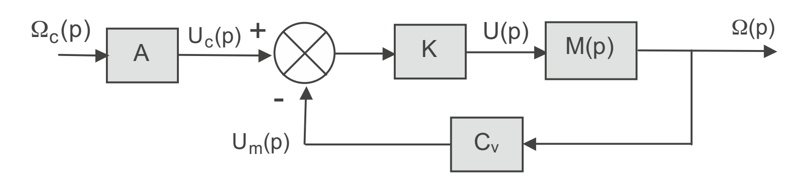
■ Conclusion en termes de précision

Si on s'intéresse maintenant non plus à l'écart mais à l'erreur, on a vu que nécessairement dans ce cas le système est ou peut être ramené à un retour unitaire et que l'erreur est alors égale à l'écart calculé avec cette description. Aussi les conclusions tirées ci-dessus sont-elles valables en termes de précision. Ceci conduit à l'énoncé suivant :

> Un système asservi, sans perturbation, ayant au moins une intégration dans sa boucle est nécessairement précis. Dans le cas contraire, sa précision sera d'autant meilleure que le gain de la boucle sera grand.

■ Exemple 1 : asservissement de vitesse par moteur à CC

L'asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu est réalisé de la manière suivante :

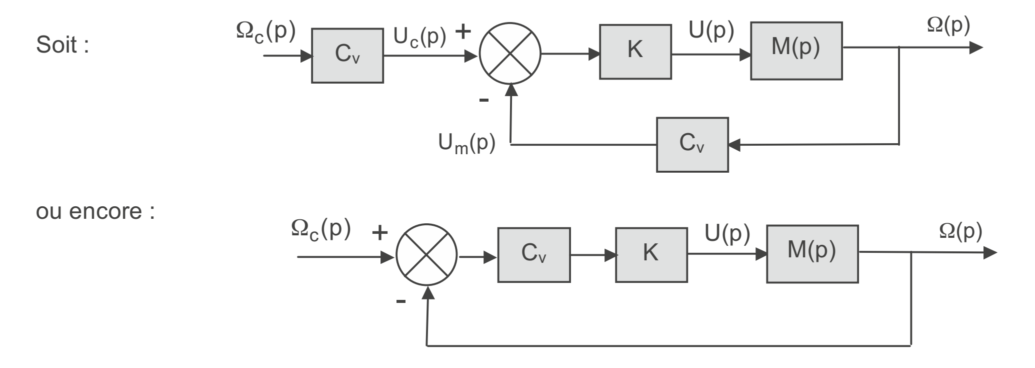


La consigne de vitesse permet d'élaborer une tension de consigne qui est comparée à la tension image de la vitesse mesurée par le capteur. La différence de ces tensions est amplifiée par un correcteur proportionnel de gain K pour élaborer la tension d'alimentation du moteur dont la fonction de transfert est M(p).

Afin que la comparaison ait un sens, il faut que l'adaptateur de consigne soit adapté au capteur de vitesse, soit $A = C_v$. Aussi, le schéma peut-il être ramené à un schéma à retour unitaire :

Soit :

ou encore :



La précision de l'asservissement de vitesse est donc caractérisée par l'écart statique établi sur ce schéma, qui obéit aux résultats précédents.

● La fonction de transfert en boucle ouverte est $FTBO(p) = C_V.K.M(p)$.

Or (cf. V-6), $M(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)} = \dfrac{\dfrac{1}{K_V}}{1 + \dfrac{RJ}{K_V K_C} p + \dfrac{LJ}{K_V K_C} p^2}$ d'où $FTBO(p) = \dfrac{\dfrac{C_V K}{K_V}}{1 + \dfrac{RJ}{K_V K_C} p + \dfrac{LJ}{K_V K_C} p^2}$

(avec les notations usuelles rappelées au paragraphe V-6 concernant le moteur).

Cette fonction de transfert étant de classe $\alpha_{BO} = 0$, on en conclut immédiatement que l'asservissement de vitesse proposé sera imprécis.

L'erreur statique relative de position de l'asservissement de vitesse sera alors :

$$\varepsilon_{s\%} = \frac{1}{1+K_{BO}}, \text{ avec } K_{BO} = \frac{C_v K}{K_v}.$$

Soit pour une consigne de vitesse en échelon ω_c, une erreur statique $\varepsilon_s = \frac{\omega_c}{1+C_v K/K_v}$.

Cette erreur sera d'autant plus faible que le gain K du correcteur proportionnel sera important.

NB : le terme d'erreur statique de « position » peut gêner s'agissant d'une vitesse. Il s'agit néanmoins du terme usuel pour une consigne en échelon, quelle que soit la nature de cette consigne.

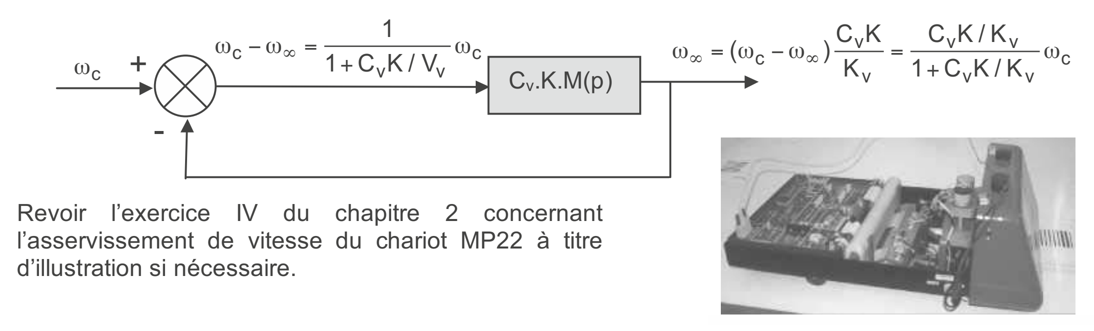
● Ce résultat peut se retrouver par calcul de la FTBF, puis de l'erreur par différence asymptotique entre la vitesse obtenue et la consigne :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{C_v.K.M(p)}{1+C_v.K.M(p)} = \frac{\dfrac{K_{BO}}{1+K_{BO}}}{1+\dfrac{1}{1+K_{BO}}\left[\dfrac{RJ}{K_v K_c}p+\dfrac{LJ}{K_v K_c}p^2\right]} \text{ de gain } \frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}.$$

La valeur finale de la vitesse est alors $\omega_\infty = \frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}\omega_c = \frac{C_v K/K_v}{1+C_v K/K_v}\omega_c$ et on vérifie bien que :

$$\omega_c - \omega_\infty = \left[1-\frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}\right]\omega_c = \frac{1}{1+K_{BO}}\omega_c$$

La situation d'équilibre en régime permanent, peut donc être visualisée sur le schéma :

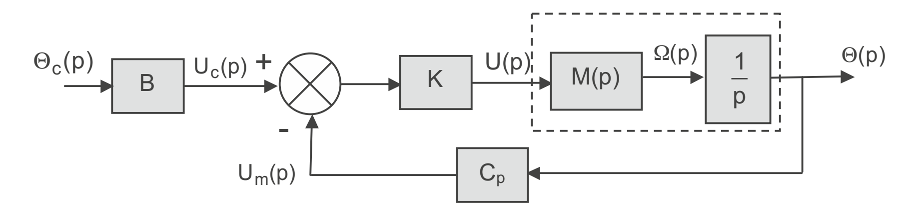


Revoir l'exercice IV du chapitre 2 concernant l'asservissement de vitesse du chariot MP22 à titre d'illustration si nécessaire.

● L'existence d'une erreur statique peut se comprendre par l'absurde, car si celle-ci devenait nulle, la tension d'alimentation du moteur qui lui est proportionnelle (multipliée par CK) le serait également, ce qui conduirait à l'arrêt de celui-ci, incompatible avec une vitesse non nulle attendue. On retrouve ce type de comportement dans bien d'autres asservissements qui nécessitent un écart nul : asservissement d'intensité en génie électrique, asservissement de température en génie thermique, etc.

■ **Exemple 2 : asservissement de <u>position</u> par moteur à CC**

L'asservissement de position, quant à lui, est réalisé de la manière suivante :



La consigne angulaire permet d'élaborer une tension de consigne qui est comparée à la tension image de l'angle mesuré par le capteur. La différence de ces tensions est amplifiée par un correcteur proportionnel de gain K pour élaborer la tension d'alimentation du moteur dont la fonction de transfert est M(p)/p afin d'obtenir une sortie angulaire par intégration de la vitesse.

Comme précédemment, afin que la comparaison ait un sens, il faut que l'adaptateur de consigne soit adapté au capteur de position, soit B = C_p, ce qui permettrait une description à l'aide d'un retour unitaire et montre donc que l'erreur et l'écart, encore une fois, se confondent. On raisonnera donc encore en utilisant les résultats établis sur l'écart.

● La fonction de transfert en boucle ouverte est $\text{FTBO}(p) = C_p.K.\dfrac{M(p)}{p}$.

Cette fonction de transfert étant de classe α_{BO} = 1, on en conclut immédiatement que l'asservissement de position proposé sera précis, quelle que soit en particulier la valeur du gain de correction K.

● Ce résultat peut se retrouver par calcul de la FTBF :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{C_p.K.\dfrac{M(p)}{p}}{1 + C_p.K.\dfrac{M(p)}{p}} = \frac{1}{1 + \dfrac{K_v}{C_pK}[p + \dfrac{RJ}{K_vK_c}p^2 + \dfrac{LJ}{K_vK_c}p^3]}$$, dont le gain est égal à 1.

Ce gain 1 montre bien que la position de consigne sera atteinte, sous réserve de stabilité.

● En régime permanent la position angulaire est égale à la position de consigne, l'écart est donc nul et donc la tension d'alimentation du moteur également. Celui-ci est donc arrêté dans la position commandée.

En d'autres termes, le bloc moteur M(p)/p possédant une intégration ***permet d'avoir une sortie non nulle et constante, avec une entrée nulle***. C'est donc bien, comme annoncé, la présence d'une intégration dans la boucle qui assure la précision.

On retrouve ce même type de comportement précis dans tous les asservissements qui peuvent fonctionner avec un écart nul, comme par exemple un asservissement de tension en génie électrique.

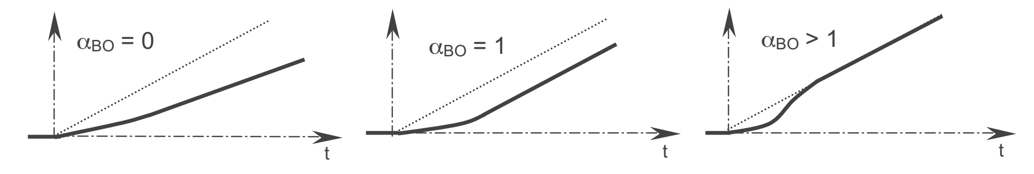
VII-3-3 Écart statique (relatif) de traînage

Cette fois $E(p) = \dfrac{1}{p^2}$: entrée en rampe de pente *unitaire*. L'écart statique s'écrit donc :

$$\varepsilon_{v\%} = \lim_{p\to 0} p\frac{1/p^2}{1 + \text{FTBO}(p)} = \lim_{p\to 0}\frac{p^{\alpha_{BO}-1}}{p^{\alpha_{BO}} + K_{BO}}$$

- Si α_{BO} = 0, $\varepsilon_{v\%} = \lim_{p\to 0}\dfrac{1}{p(1+K_{BO})} = \infty$
- Si α_{BO} = 1, $\varepsilon_{v\%} = \dfrac{1}{0+K_{BO}} = \dfrac{1}{K_{BO}}$
- Si α_{BO} > 1, $\varepsilon_{v\%} = \dfrac{0}{0+K_{BO}} = 0$

Ainsi, un système asservi, sans perturbation, nécessite au moins deux intégrations dans sa boucle (classe α_{BO} de la FTBO > 1) pour posséder un écart statique de traînage nul. Dans le cas contraire, cet écart peut être fini si la classe α_{BO} est égale à un, et alors d'autant plus faible que le gain de la boucle (K_{BO}) est grand. Il diverge dans le cas d'une classe α_{BO} nulle.



■ **Tableau récapitulatif :**

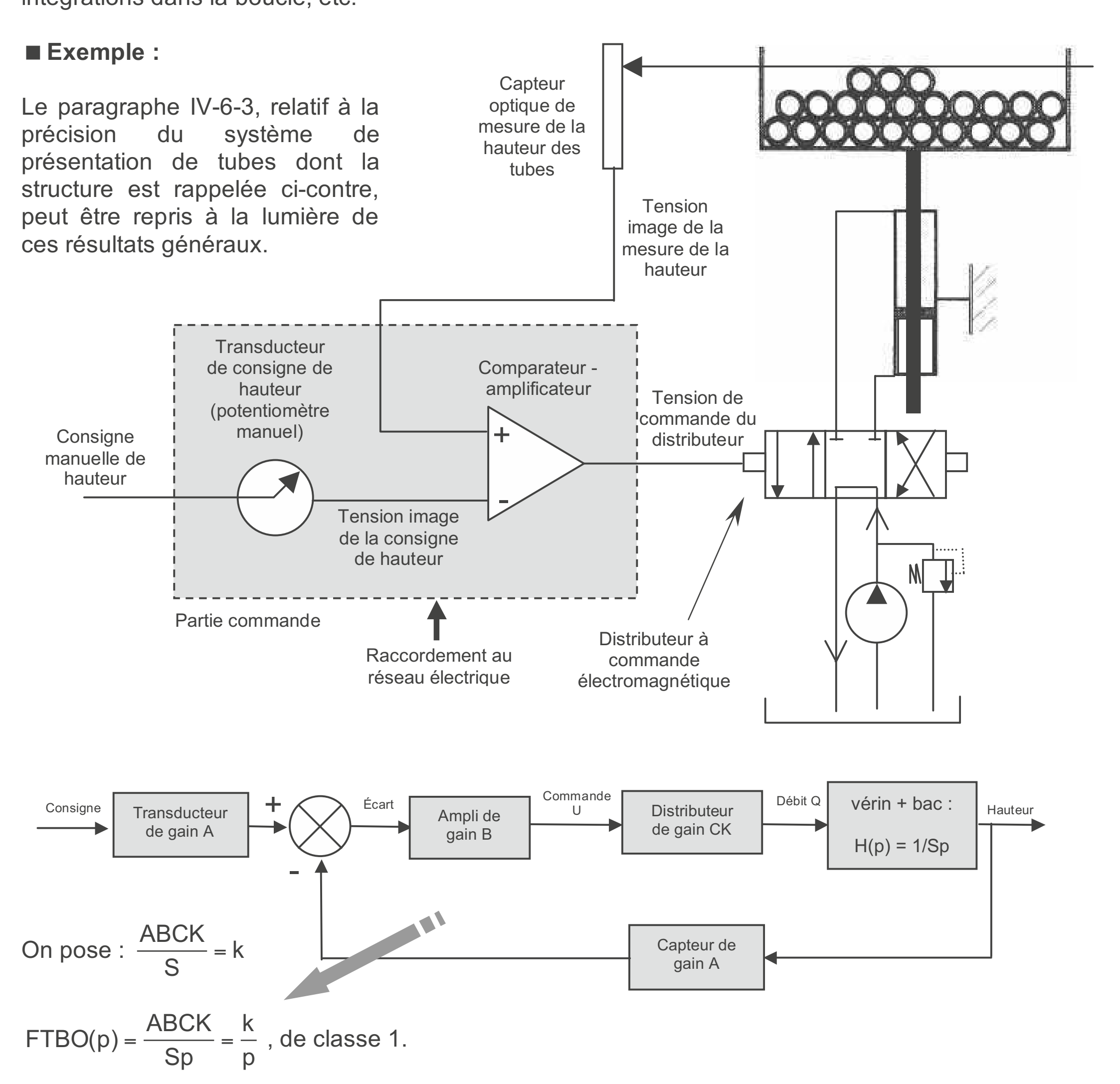
Consigne	Écart(*) statique relatif de	$\alpha_{BO} = 0$	$\alpha_{BO} = 1$	$\alpha_{BO} = 2$
Échelon unitaire	position	$\varepsilon_{s\%} = \dfrac{1}{1+K_{BO}}$	$\varepsilon_{s\%} = 0$	$\varepsilon_{s\%} = 0$
Rampe unitaire	traînage	$\varepsilon_{v\%} = \infty$	$\varepsilon_{v\%} = \dfrac{1}{K_{BO}}$	$\varepsilon_{v\%} = 0$

(*) Ces écarts s'interprétant comme des erreurs relatives si le système peut être ramené à un retour unitaire.

L'étude pourrait être poursuivie pour une entrée parabolique pour laquelle la précision impose trois intégrations dans la boucle, etc.

■ **Exemple :**

Le paragraphe IV-6-3, relatif à la précision du système de présentation de tubes dont la structure est rappelée ci-contre, peut être repris à la lumière de ces résultats généraux.



On pose : $\dfrac{ABCK}{S} = k$

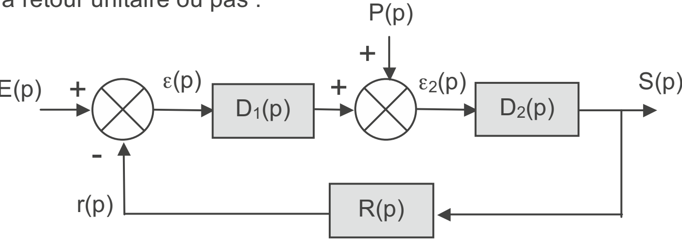
$$FTBO(p) = \frac{ABCK}{Sp} = \frac{k}{p}$$, de classe 1.

Cette FTBO possédant une intégration (due au vérin hydraulique), le système est précis en réponse à un échelon, mais possède une erreur statique de traînage 1/k en réponse à une rampe unitaire, soit a/k en réponse à une rampe de pente a.

Ces résultats avaient été établis au paragraphe IV-6-3 à partir de la FTBF, par calcul de l'erreur et utilisation du théorème de la valeur finale.

VII-3-4 Précision en réaction à une perturbation

Si une seconde entrée intervient en perturbation au cœur de la boucle, le schéma devient, que le système soit à retour unitaire ou pas :

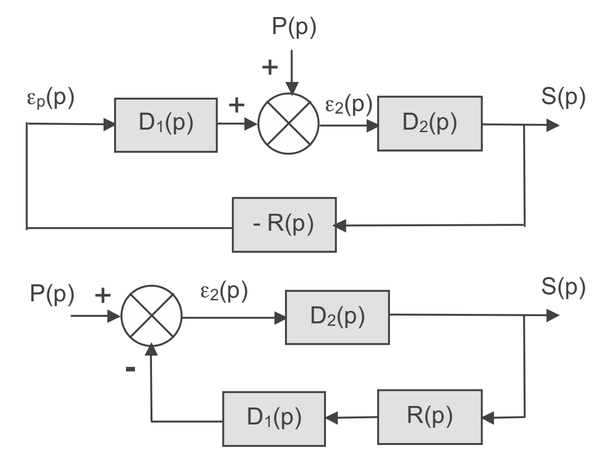


L'écart $\varepsilon(p)$ se détermine alors par superposition, en posant $\varepsilon(p) = \varepsilon_e(p) + \varepsilon_p(p)$, où :

- la contribution $\varepsilon_e(p)$ de l'entrée E(p) s'obtient en posant P(p)=0, soit classiquement :

$$\varepsilon_e(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$$

- la contribution $\varepsilon_p(p)$ de la perturbation P(p) à l'écart s'obtient en posant E(p) = 0, ce qui peut être rendu plus clair en modifiant le schéma comme ci-contre (en prenant garde aux signes).



Soit $\varepsilon_p(p) = -R(p)D_2(p)\varepsilon_2(p)$.

Or $\varepsilon_2(p) = \dfrac{P(p)}{1 + FTBO(p)}$ classiquement.

Ainsi : $\varepsilon_p(p) = -\dfrac{R(p)D_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p)$.

La contribution $\varepsilon_e(p)$ de l'entrée à l'écart est celle sans perturbation. Elle obéit donc aux résultats établis aux paragraphes précédents. On s'intéressera donc ici uniquement au terme dû à la perturbation, soit l'écart :

$$\varepsilon_p(p) = -\frac{R(p)D_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p)$$

On pose, sous forme canonique, avec $n_1(0) = d_1(0) = n_2(0) = d_2(0) = 1$:

$$D_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \frac{n_1(p)}{d_1(p)} \quad \text{et} \quad R(p)D_2(p) = \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{n_2(p)}{d_2(p)}, \quad \text{soit encore} \quad FTBO(p) = \frac{K_1K_2}{p^{\alpha_1+\alpha_2}} \frac{n_1n_2(p)}{d_1d_2(p)}$$

Ce qui permet d'écrire l'écart dû à la perturbation sous la forme :

$$\varepsilon_p(p) = -\frac{\dfrac{K_2}{p^{\alpha_2}} \dfrac{n_2(p)}{d_2(p)}}{1 + \dfrac{K_1K_2}{p^{\alpha_1+\alpha_2}} \dfrac{n_1n_2(p)}{d_1d_2(p)}} P(p) = -\frac{p^{\alpha_1}}{K_1 \dfrac{n_1(p)}{d_1(p)} [1 + \dfrac{p^{\alpha_1+\alpha_2}}{K_1K_2} \dfrac{d_1d_2(p)}{n_1n_2(p)}]} P(p)$$

Si la perturbation agit, par exemple, en échelon, l'écart statique relatif introduit est :

$$\varepsilon_{ps\%} = -\lim_{p \to 0} p \frac{p^{\alpha_1}}{K_1 \dfrac{n_1(p)}{d_1(p)} [1 + \dfrac{p^{\alpha_1+\alpha_2}}{K_1K_2} \dfrac{d_1d_2(p)}{n_1n_2(p)}]} \frac{1}{p} = -\lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha_1}}{K_1[1 + \dfrac{p^{\alpha_1+\alpha_2}}{K_1K_2}]}$$

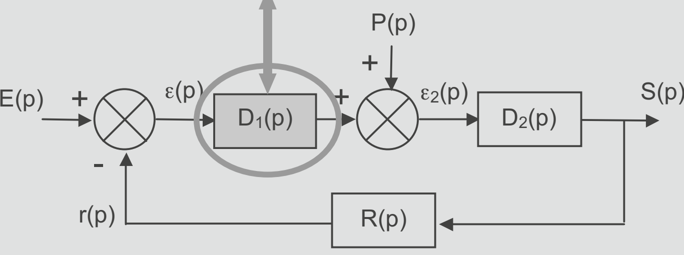
D'où les conclusions :

- Si $\alpha_1 = 0$, $\varepsilon_{ps\%} = -\lim\limits_{p\to 0} \dfrac{1}{K_1[1+\dfrac{p^{\alpha_2}}{K_1K_2}]}$, constante non nulle quelle que soit la valeur de α_2.

  Plus précisément : $\varepsilon_{ps\%} = -\dfrac{1}{K_1[1+\dfrac{1}{K_1K_2}]} = -\dfrac{1}{K_1+K_2}$, si $\alpha_2 = 0$ et $\varepsilon_{ps\%} = -\dfrac{1}{K_1}$, si $\alpha_2 > 0$.

- Si $\alpha_1 > 0$, $\varepsilon_{ps\%} = 0$

Un échelon de perturbation ne provoque pas d'écart statique de position dans un système asservi s'il existe au moins une intégration ($\alpha_1 > 0$) dans la partie de la boucle située ***avant*** son lieu d'action.

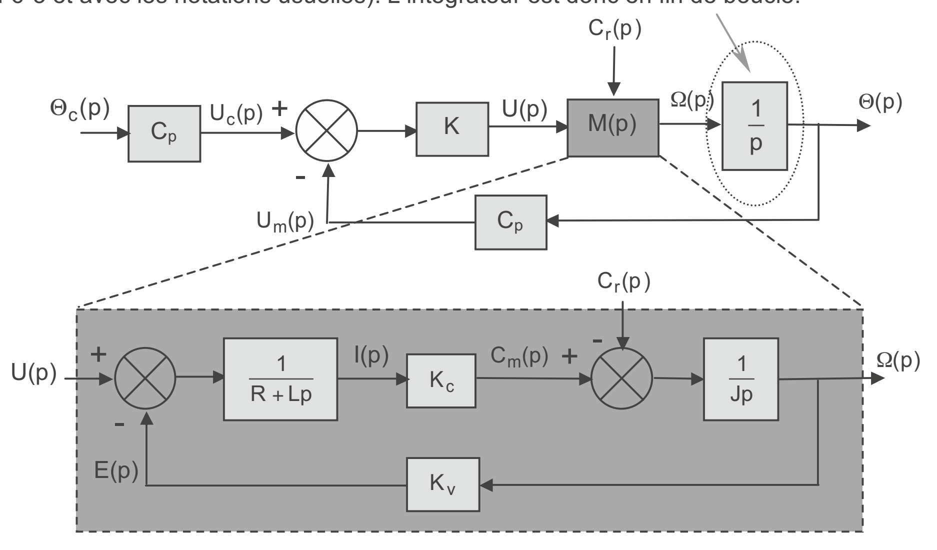


Ces résultats s'interprètent également en termes d'erreur (et donc de précision) si le système peut être ramené à un retour unitaire, comme précédemment.

De plus, un raisonnement analogue permettrait de montrer qu'une perturbation en rampe voit son effet annulé s'il existe au moins deux intégrations dans la partie de la boucle amont, etc.

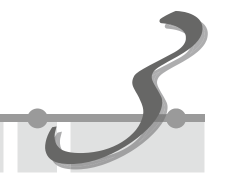
■ **Exemple : asservissement de position par moteur à CC**

Sans perturbation, il a été établi que l'asservissement de position par moteur à courant continu et correcteur proportionnel est précis en réponse à un échelon. Ceci provient de la présence de l'intégrateur dans la boucle. Mais, en présence d'une perturbation provenant d'un couple résistant, cet intégrateur intervient ***après*** le lieu d'action de la perturbation. En effet, si le moteur est soumis à un couple résistant, l'écriture de ses équations permet de détailler le bloc M(p) comme ci-dessous (cf. VI-6-3 et avec les notations usuelles). L'intégrateur est donc en fin de boucle.



Ainsi, l'asservissement de position, soumis à un couple résistant, sera imprécis : l'angle de consigne ne sera pas exactement atteint, le moteur reculant sous la charge. Revoir le paragraphe V-6-3 pour un développement complet.

EXERCICES



I - RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I-1 Présentation

Ces quelques exercices rapides ont pour but de se familiariser, aussi bien avec la méthode de résolution « classique » des équations différentielles linéaires à coefficients constants, qu'avec la méthode utilisant la transformation de Laplace.

 Fiche ressource "équations différentielles linéaires à coefficients constants"

 Fiche ressource "décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples"

Pour chaque système, on donne :
- l'équation donnant le comportement de la sortie y(t) en fonction de l'entrée x(t) : il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants ;
- l'évolution de l'entrée ;
- les conditions initiales imposées à la sortie.

I-2 Travail demandé

On demande pour chaque système :
- sa fonction de transfert ;
- l'évolution de la sortie dans les conditions données :
  1° - par la méthode classique ;
  2° - par la transformation de Laplace.

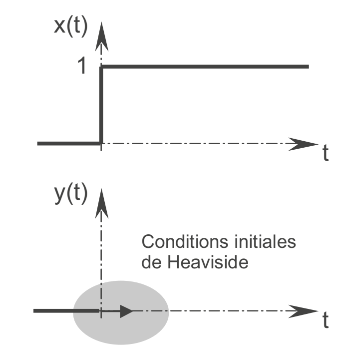
Exercice 1 :

Soit le système : x(t) ⟶ Système ⟶ y(t)

obéissant à l'équation différentielle : $\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 5\frac{dy}{dt}(t) + 6y(t) = 6x(t)$

1) Quelle est sa fonction de transfert ?

2) L'entrée x(t) est un échelon unitaire :
   $t < 0 \Rightarrow x(t) = 0$
   $t \geq 0 \Rightarrow x(t) = 1$
   La sortie y(t) obéit aux conditions initiales de type Heaviside :
   $\begin{cases} t \leq 0 \Rightarrow y(t) = 0 \\ \frac{dy}{dt}(0) = 0 \end{cases}$
   NB : l'équation étant d'ordre deux il faut deux conditions initiales, l'une sur la sortie, l'autre sur sa dérivée première.

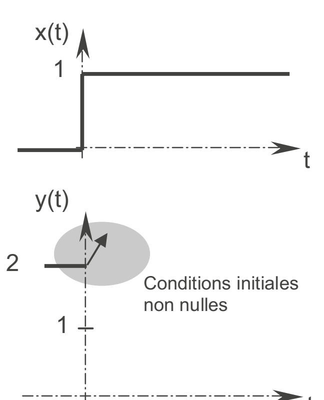


   Quelle est l'évolution de la sortie y(t) à partir de t = 0 ?

Exercice 2 :

Soit le système : x(t) → Système → y(t)

obéissant à l'équation différentielle : $\frac{d^2y}{dt^2}(t)+5\frac{dy}{dt}(t)+6y(t)=6x(t)$



Ce système est donc le même que le précédent.

1) Quelle est sa fonction de transfert ?

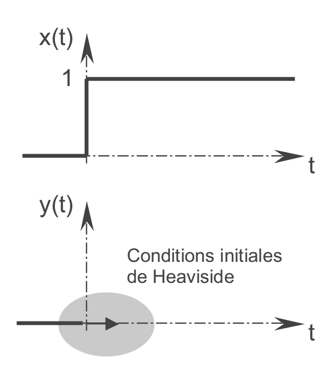
2) L'entrée x(t) est un échelon unitaire :
   $t<0 \Rightarrow x(t)=0$
   $t\geq 0 \Rightarrow x(t)=1$
   La sortie y(t) obéit cette fois aux conditions initiales :
   $$\begin{cases} t\leq 0 \Rightarrow y(t)=2 \\ \frac{dy}{dt}(0)=2 \end{cases}$$

   Quelle est l'évolution de la sortie y(t) à partir de t = 0 ?

Exercice 3 :

Soit le système : x(t) → Système → y(t)

obéissant à l'équation différentielle : $\frac{d^2y}{dt^2}(t)+6y(t)=6x(t)$



1) Quelle est sa fonction de transfert ?

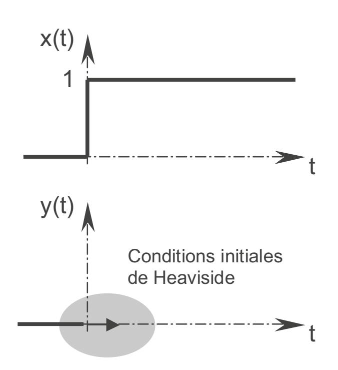
2) L'entrée x(t) est un échelon unitaire :
   $t<0 \Rightarrow x(t)=0$
   $t\geq 0 \Rightarrow x(t)=1$
   La sortie y(t) obéit aux conditions initiales de Heaviside.

   Quelle est l'évolution de la sortie y(t) à partir de t = 0 ?

Exercice 4 :

Soit le système : x(t) → Système → y(t)

obéissant à l'équation différentielle : $\frac{d^2y}{dt^2}(t)+3\frac{dy}{dt}(t)=x(t)$



1) Quelle est sa fonction de transfert ?

2) L'entrée x(t) est un échelon unitaire :
   $t<0 \Rightarrow x(t)=0$
   $t\geq 0 \Rightarrow x(t)=1$
   La sortie y(t) obéit aux conditions initiales de Heaviside.

   Quelle est l'évolution de la sortie y(t) à partir de t = 0 ?



I-3 Correction

Exercice 1 :

1) Détermination de la fonction de transfert

L'équation différentielle : $\frac{d^2y}{dt^2}(t)+5\frac{dy}{dt}(t)+6y(t)=6x(t)$

se transforme dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside en :

$p^2Y(p)+5pY(p)+6Y(p)=6X(p)$ ou encore : $[p^2+5p+6]Y(p)=6X(p)$

D'où la fonction de transfert du système : $H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{6}{6+5p+p^2}$

Ou encore, sous forme canonique : $\boxed{H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{1}{1+\frac{5}{6}p+\frac{1}{6}p^2}}$ (gain 1, ordre 2, classe 0)

Important : on rappelle qu'une fonction de transfert se détermine ***toujours*** par transformation sous les ***conditions de Heaviside***, c'est-à-dire toutes les conditions initiales étant nulles.

Alors, d'après le théorème de la dérivation :

la transformée de $\frac{dy}{dt}(t)$ est $pY(p)$

la transformée de $\frac{d^2y}{dt^2}(t)$ est $p^2Y(p)$,

etc.

Sinon, hors conditions de Heaviside, on rappelle que les relations générales sont :

$pY(p)-y(0)$ pour la transformée de la dérivée première $\frac{dy}{dt}(t)$,

$p^2Y(p)-py(0)-\frac{dy}{dt}(0)$ pour la transformée de la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dt^2}(t)$,

etc.

21) Recherche de y(t) par la méthode classique

Compte tenu de la sollicitation x(t) = 1, l'équation à résoudre est $\frac{d^2y}{dt^2}(t)+5\frac{dy}{dt}(t)+6y(t)=6$

Son polynôme caractéristique est : $P(r)=r^2+5r+6$, dont le discriminant est : $\Delta=25-24=1$.

Ses deux racines sont donc : $r=\frac{-5\pm1}{2}$ soit –2 et –3.

(ces deux racines sont réelles négatives, ce qui garantit la stabilité du système)

La solution générale de l'équation sans second membre est donc de la forme :

$y_1(t)=Ae^{-2t}+Be^{-3t}$

Par ailleurs, une solution particulière de l'équation avec second membre est clairement :

$y_2(t)=1$

La solution générale de l'équation est donc de la forme : $y(t)=1+Ae^{-2t}+Be^{-3t}$

Ce qui permet de calculer $\frac{dy}{dt}(t) = -2Ae^{-2t} - 3Be^{-3t}$

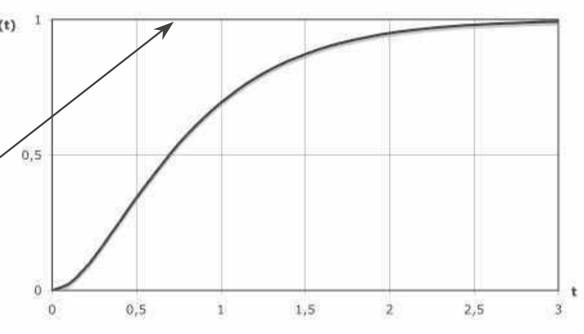
Les conditions initiales permettent donc d'écrire :

$\begin{cases} 1 + A + B = 0 \\ -2A - 3B = 0 \end{cases}$ d'où on détermine les constantes : $\begin{cases} A = -3 \\ B = 2 \end{cases}$

Donc, finalement, l'évolution de la sortie à partir de l'instant initial est :

$$\boxed{y(t) = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}}$$

NB : le ***gain 1*** de la fonction de transfert stable assure que la sortie tend vers l'entrée.



22) <u>Recherche de y(t) par la transformation de Laplace</u>

Puisque les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), et comme cela a été rappelé plus haut :

- la transformée de $\frac{dy}{dt}(t)$ est $pY(p)$,
- la transformée de $\frac{d^2y}{dt^2}(t)$ est $p^2Y(p)$.

Alors l'équation se transforme en : $p^2Y(p) + 5pY(p) + 6Y(p) = 6X(p)$

ou encore : $Y(p) = \frac{6}{6 + 5p + p^2}X(p)$

On retrouve la définition de la ***fonction de transfert*** puisque l'on est effectivement sous les conditions de Heaviside.

L'entrée étant un échelon unitaire, sa transformée est $X(p) = \frac{1}{p}$

La sortie est donc, dans le domaine de Laplace : $Y(p) = \frac{6}{p(6 + 5p + p^2)}$

Il faut alors rechercher la transformée inverse de cette fonction. Pour cela la méthode consiste à la décomposer en éléments simples se trouvant dans la table des transformées inverses.

Le polynôme $6 + 5p + p^2$, qui n'est autre que le polynôme caractéristique de l'équation différentielle, possède les racines déjà déterminées –2 et –3. On écrira alors :

$$Y(p) = \frac{6}{p(p+2)(p+3)}$$

dont la décomposition en éléments simples est de la forme : $Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$

La recherche des nombres A, B et C peut se faire en ramenant cette écriture au même dénominateur et en identifiant le numérateur à 6 :

$$Y(p) = \frac{A(p+2)(p+3) + Bp(p+3) + Cp(p+2)}{p(p+2)(p+3)} = \frac{(A+B+C)p^2 + (5A+3B+2C)p + 6A}{p(p+2)(p+3)}$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} 6A = 6 \\ 5A + 3B + 2C = 0 \\ A + B + C = 0 \end{cases} \quad \text{qui a pour solution} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \\ C = 2 \end{cases}$$

Ainsi, la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit : $Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{3}{p+2} + \frac{2}{p+3}$

Or, on sait que :

- la transformée inverse de $\frac{1}{p}$ est 1,
- la transformée inverse de $\frac{1}{p+a}$ est e^{-at}. Revoir la table des transformées si nécessaire.

La transformée inverse de Y(p) est donc $\boxed{y(t) = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}}$ comme attendu.

<u>Exercice 2 :</u>

1) <u>Détermination de la fonction de transfert</u>

Le système est le même que précédemment, il en est donc de même pour la fonction de transfert qui est une caractéristique intrinsèque du système, indépendamment de sa sollicitation ou des conditions initiales.

21) <u>Recherche de y(t) par la méthode classique</u>

De même, la solution générale de l'équation est inchangée : $y(t) = 1 + Ae^{-2t} + Be^{-3t}$

et $\frac{dy}{dt}(t) = -2Ae^{-2t} - 3Be^{-3t}$

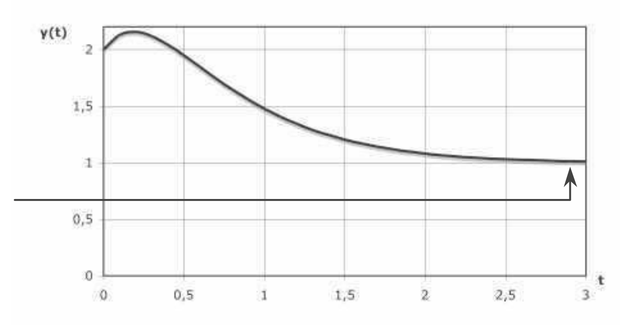
En revanche, les conditions initiales étant différentes, on aura cette fois :

$$\begin{cases} 1 + A + B = 2 \\ -2A - 3B = 2 \end{cases} \quad \text{d'où on détermine les constantes :} \quad \begin{cases} A = 5 \\ B = -4 \end{cases}$$

Donc, finalement, l'évolution de la sortie à partir de l'instant initial est :

$\boxed{y(t) = 1 + 5e^{-2t} - 4e^{-3t}}$

NB : le gain 1 de la fonction de transfert stable assure toujours que la sortie tend vers l'entrée.



22) <u>Recherche de y(t) par la transformation de Laplace</u>

Cette fois les conditions initiales ne sont pas nulles, il faut donc introduire ces conditions initiales dans les transformées des dérivées :

- la transformée de $\frac{dy}{dt}(t)$ est $pY(p) - y(0) = pY(p) - 2$,
- la transformée de $\frac{d^2y}{dt^2}(t)$ est $p^2Y(p) - py(0) - \frac{dy}{dt}(0) = p^2Y(p) - 2p - 2$.

Alors l'équation se transforme en : $p^2Y(p) - 2p - 2 + 5pY(p) - 10 + 6Y(p) = 6X(p)$

soit : $[6 + 5p + p^2]Y(p) - 2p - 12 = 6X(p)$

ou encore : $Y(p) = \dfrac{6}{6 + 5p + p^2}X(p) + \dfrac{12 + 2p}{6 + 5p + p^2}$

Soit un terme qui dépend de l'entrée, défini à partir de la fonction de transfert, auquel s'ajoute, puisque l'on n'est pas sous les conditions de Heaviside, un terme supplémentaire qui traduit justement ces conditions initiales non nulles.

L'entrée étant un échelon unitaire, sa transformée est $X(p) = \dfrac{1}{p}$

La sortie est donc, dans le domaine de Laplace : $Y(p) = \dfrac{6}{p(6 + 5p + p^2)} + \dfrac{12 + 2p}{6 + 5p + p^2}$

Soit : $Y(p) = \dfrac{6 + 12p + 2p^2}{p(6 + 5p + p^2)} = \dfrac{6 + 12p + 2p^2}{p(p + 2)(p + 3)}$

qui se décompose en éléments simples sous la forme (calcul déjà effectué) :

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 2} + \frac{C}{p + 3} = \frac{(A + B + C)p^2 + (5A + 3B + 2C)p + 6A}{p(p + 2)(p + 3)}$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} 6A = 6 \\ 5A + 3B + 2C = 12 \\ A + B + C = 2 \end{cases} \quad \text{qui a pour solution} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 5 \\ C = -4 \end{cases}$$

Ainsi la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit : $Y(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{5}{p + 2} - \dfrac{4}{p + 3}$

Dont la transformée inverse est : $\boxed{y(t) = 1 + 5e^{-2t} - 4e^{-3t}}$ comme attendu.

Exercice 3 :

1) Détermination de la fonction de transfert

L'équation différentielle : $\dfrac{d^2y}{dt^2}(t) + 6y(t) = 6x(t)$

se transforme dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside en :

$p^2Y(p) + 6Y(p) = 6X(p)$

ou encore : $[p^2 + 6]Y(p) = 6X(p)$

D'où la fonction de transfert du système : $H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = \dfrac{6}{6 + p^2}$

Ou encore, sous forme canonique : $\boxed{H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{6}p^2}}$ (gain 1, ordre 2, classe 0)

21) Recherche de y(t) par la méthode classique

Compte tenu de la sollicitation x(t) = 1, l'équation à résoudre est $\dfrac{d^2y}{dt^2}(t) + 6y(t) = 6$

Son polynôme caractéristique est : $P(r) = r^2 + 6$, dont les deux racines sont donc $r = \pm j\sqrt{6}$.

(ces deux racines sont imaginaires pures conjuguées, le système est donc un cas limite de système instable)

La solution générale de l'équation sans second membre est donc de la forme :
$y_1(t) = A\cos(\sqrt{6}t + \varphi)$

Par ailleurs, une solution particulière de l'équation avec second membre est clairement :
$y_2(t) = 1$

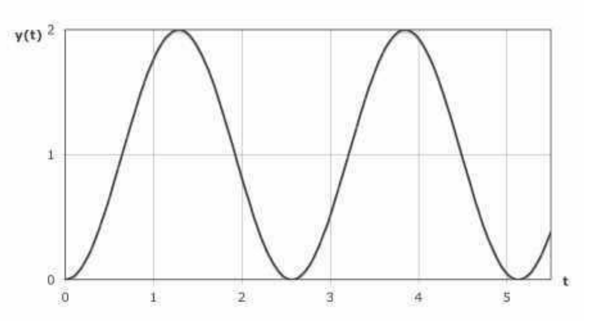
La solution générale de l'équation est donc de la forme : $y(t) = 1 + A\cos(\sqrt{6}t + \varphi)$
Ce qui permet de calculer $\dfrac{dy}{dt}(t) = -A\sqrt{6}\sin(\sqrt{6}t + \varphi)$

Les conditions initiales permettent donc d'écrire :

$\begin{cases} 1 + A\cos\varphi = 0 \\ -A\sqrt{6}\sin\varphi = 0 \end{cases}$ d'où on détermine les constantes : $\begin{cases} \varphi = 0 \\ A = -1 \end{cases}$

Donc, finalement, l'évolution de la sortie à partir de l'instant initial est :
$\boxed{y(t) = 1 - \cos\sqrt{6}t}$

La sortie oscille indéfiniment autour de la valeur déterminée par le gain de la fonction de transfert. Ce comportement est bien caractéristique d'un système à la limite de l'instabilité.



22) Recherche de y(t) par la transformation de Laplace

Puisque les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), l'équation se transforme en :
$p^2Y(p) + 6Y(p) = 6X(p)$

ou encore : $Y(p) = \dfrac{6}{6 + p^2}X(p)$
On retrouve la définition de la ***fonction de transfert*** puisque l'on est effectivement sous les conditions de Heaviside.
L'entrée étant un échelon unitaire, sa transformée est $X(p) = \dfrac{1}{p}$
La sortie est donc, dans le domaine de Laplace : $Y(p) = \dfrac{6}{p(6 + p^2)}$
et se décompose en éléments simples sous la forme :
$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 6} = \frac{A(p^2 + 6) + Bp^2 + Cp}{p(p^2 + 6)} = \frac{(A + B)p^2 + Cp + 6A}{p(p^2 + 6)}$$
D'où le système d'équations :

$\begin{cases} 6A = 6 \\ C = 0 \\ A + B = 0 \end{cases}$ qui a pour solution $\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases}$

Ainsi la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit : $Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+6}$

Or, on sait que :

- la transformée inverse de $\frac{1}{p}$ est 1,
- la transformée inverse de $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ est $\cos\omega t$. Revoir la table des transformées si nécessaire.

La transformée inverse de Y(p) est donc $\boxed{y(t)=1-\cos\sqrt{6}t}$ comme attendu.

NB : on peut se dispenser de la décomposition en éléments simples en remarquant que

- la transformée inverse de $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ est $\sin\omega t$,
- une division par p dans le domaine de Laplace correspond à une intégration dans le domaine temporel.

Alors $Y(p)=\frac{6}{p(6+p^2)}$ a pour transformée inverse $y(t)=\int_0^t\sqrt{6}\sin\sqrt{6}\tau d\tau=\sqrt{6}\left[-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\sqrt{6}\tau\right]_0^t$

ce qui confirme $y(t)=1-\cos\sqrt{6}t$.

Exercice 4 :

1) Détermination de la fonction de transfert

L'équation différentielle : $\frac{d^2y}{dt^2}(t)+3\frac{dy}{dt}(t)=x(t)$

se transforme dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside en :

$p^2Y(p)+3pY(p)=X(p)$

ou encore : $p(p+3)Y(p)=X(p)$

D'où la fonction de transfert du système : $H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{1}{p(p+3)}$

Ou encore, sous forme canonique : $\boxed{H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{\frac{1}{3}}{p(1+\frac{p}{3})}}$ (gain 1/3, ordre 2, classe 1)

21) Recherche de y(t) par la méthode classique

Compte tenu de la sollicitation x(t) = 1, l'équation à résoudre est $\frac{d^2y}{dt^2}(t)+3\frac{dy}{dt}(t)=1$

Son polynôme caractéristique est : $P(r)=r(r+3)$, dont les deux racines sont 0 et –3.

(possédant une racine nulle, le système est un cas limite de système instable)

La solution générale de l'équation sans second membre est donc de la forme :

$y_1(t)=A+Be^{-3t}$

Par ailleurs, une solution particulière de l'équation avec second membre est clairement :

$y_2(t)=\frac{t}{3}$

La solution générale de l'équation est donc de la forme : $y(t) = \frac{t}{3} + A + Be^{-3t}$

Ce qui permet de calculer $\frac{dy}{dt}(t) = \frac{1}{3} - 3Be^{-3t}$

Les conditions initiales permettent donc d'écrire :

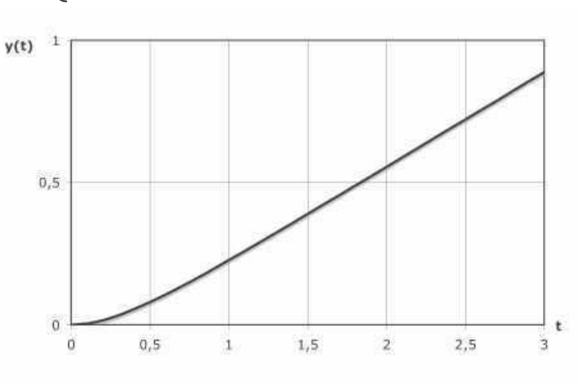
$\begin{cases} A + B = 0 \\ 1/3 - 3B = 0 \end{cases}$ d'où on détermine les constantes : $\begin{cases} A = -1/9 \\ B = 1/9 \end{cases}$

Donc, finalement, l'évolution de la sortie à partir de l'instant initial est :

$y(t) = \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}e^{-3t}$

ou encore :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{9}[e^{-3t} + 3t - 1]}$$



NB : le pôle nul génère un comportement instable de type intégrateur.
Le gain 1/3 de la fonction de transfert s'observe alors dans la pente de la droite asymptote.

22) <u>Recherche de y(t) par la transformation de Laplace</u>

Puisque les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), l'équation se transforme en :
$p^2Y(p) + 3pY(p) = X(p)$

ou encore : $Y(p) = \frac{1}{p(p+3)}X(p)$

On retrouve la définition de la ***fonction de transfert*** puisque l'on est effectivement sous les conditions de Heaviside.

L'entrée étant un échelon unitaire, sa transformée est $X(p) = \frac{1}{p}$

La sortie est donc, dans le domaine de Laplace : $Y(p) = \frac{1}{p^2(p+3)}$

et se décompose en éléments simples sous la forme :

$$Y(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+3} = \frac{A(p+3) + Bp(p+3) + Cp^2}{p^2(p+3)} = \frac{(B+C)p^2 + (A+3B)p + 3A}{p^2(p+3)}$$

D'où le système d'équations :

$\begin{cases} 3A = 1 \\ A + 3B = 0 \\ B + C = 0 \end{cases}$ qui a pour solution $\begin{cases} A = 1/3 \\ B = -1/9 \\ C = 1/9 \end{cases}$

Ainsi la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit : $Y(p) = \frac{1/3}{p^2} - \frac{1/9}{p} + \frac{1/9}{p+3}$

Or, on sait que :

- la transformée inverse de $\frac{1}{p^2}$ est t,

- la transformée inverse de $\frac{1}{p}$ est 1,
- la transformée inverse de $\frac{1}{p+a}$ est e^{-at}. Revoir la table des transformées si nécessaire.

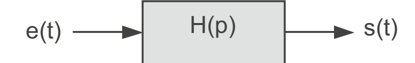
La transformée inverse de Y(p) est donc $y(t) = \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}e^{-3t}$,

soit $\boxed{y(t) = \frac{1}{9}[e^{-3t} + 3t - 1]}$ comme attendu.

II - FONCTION DE TRANSFERT ET STABILITÉ

II-1 Présentation

On considère un système décrit par la fonction de transfert suivante, dépendant d'un paramètre k positif réglable :



$$H(p) = \frac{1}{1 + 10p + (k+1)p^2 + 5p^3 + kp^4}$$

L'objectif de l'exercice est d'étudier l'influence du paramètre k sur la stabilité du système.

II-2 Travail demandé

Question 1 : condition de stabilité

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles le système est stable.

Question 2 : limite de stabilité

Déterminer la fréquence des oscillations prises par la variable de sortie du système, lorsque celui-ci est à la limite de stabilité.

II-3 Correction

Question 1 : condition de stabilité

L'ordre du système dépend de k. En effet, si k = 0 le système est d'ordre 3, alors que sinon il est d'ordre 4. On distinguera donc les deux cas.

- **1er cas : k = 0**

Le système est d'ordre 3 et le dénominateur de H(p) s'écrit : $D(p) = 5p^3 + p^2 + 10p + 1$.
On vérifie que 1x10 > 5x1 ce qui montre que le système est alors stable.
Ses racines sont à parties réelles strictement négatives et engendrent donc une réponse convergente.

- **2ème cas : k > 0**

Le système est d'ordre 4 et le dénominateur de H(p) s'écrit : $D(p) = kp^4 + 5p^3 + (k+1)p^2 + 10p + 1$.
Tous les coefficients étant strictement positifs, l'étude de la stabilité nécessite la construction du tableau de Routh :

p^4	k	k+1	1
p^3	5	10	0
p^2	1-k	1	0
p	$\frac{5-10k}{1-k}$	0	
1	1		

Les termes de la colonne des pivots devant être strictement positifs, la condition de stabilité s'écrit :

$$\begin{cases} k > 0 \text{ (qui est déjà supposé)} \\ 1 - k > 0 \\ \dfrac{5-10k}{1-k} > 0 \end{cases}$$

Ce qui impose k < 1/2.

Détails des calculs :

$$A_1 = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} k & k+1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = -\frac{10k-5(k+1)}{5} = 1-k$$

$$A_2 = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} k & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{0-5}{5} = 1$$

$$B_1 = -\frac{1}{1-k}\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1-k & 1 \end{vmatrix} = -\frac{5-10(1-k)}{1-k} = \frac{5-10k}{1-k}$$

$$C_1 = -\frac{1-k}{5-10k}\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ \frac{5-10k}{1-k} & 0 \end{vmatrix} = 1$$

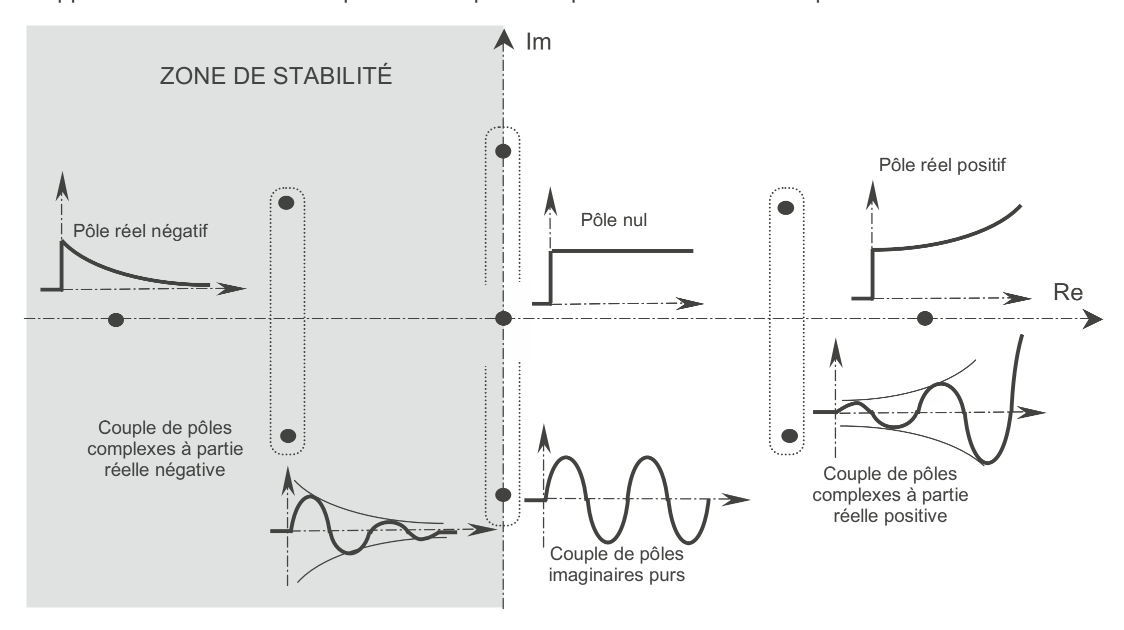
- En conclusion, **le système est stable pour $k \in [0\ ,\ 1/2\ [$** .

Pour la borne inférieure de l'intervalle, k = 0, le système est un système d'ordre 3, stable.
Pour la borne supérieure de l'intervalle , k = 1/2, le système est un système d'ordre 4, instable (situation limite).

<u>Question 2 :</u> limite de stabilité

On sait qu'en l'absence de pôle nul, ce qui est le cas ici, la situation instable limite se caractérise par la présence d'au moins un couple de pôles imaginaires purs qui engendreront des composantes sinusoïdales non amorties dans la réponse.

Rappel de la contribution des pôles à la réponse impulsionnelle selon leur partie réelle :



Ainsi, dans la situation instable limite précédemment identifiée (k = 1/2) le polynôme caractéristique D(p) présente une double racine imaginaire pure $\pm j\omega$, telle que ω soit la pulsation des oscillations alors engendrées.

On résout alors $D(j\omega) = \frac{1}{2}(j\omega)^4 + 5(j\omega)^3 + (\frac{1}{2}+1)(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 1 = 0$

Soit $D(j\omega) = 0,5\omega^4 - 5j\omega^3 - 1,5\omega^2 + 10j\omega + 1 = 0$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, il vient les deux équations scalaires :

$$\begin{cases} 0,5\omega^4 - 1,5\omega^2 + 1 = 0 \\ -5\omega^3 + 10\omega = 0 \end{cases}$$

dont $\omega = \sqrt{2}$ rad/s est racine positive commune.

À la limite de stabilité, soit pour k = 1/2, la sortie possèdera donc une composante oscillante à la pulsation $\sqrt{2}$ rad/s, soit à la fréquence $\sqrt{2}/2\pi =$ $\boxed{0,45 \text{ Hz.}}$

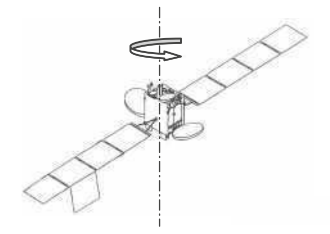
NB : Pour toute autre valeur de k, les deux équations scalaires qui seraient issues de $D(j\omega) = 0$ n'auraient pas de même solution. En effet, le polynôme n'aurait alors que des racines complexes non imaginaires pures, engendrant soit une réponse convergente, soit une réponse divergente selon que le système soit stable (k<1/2), soit franchement instable (k>1/2).

III - CONTRÔLE DU LACET D'UN SATELLITE

À partir d'un support du concours de l'École Polytechnique MP.

III-1 Présentation

Lors du déplacement orbital d'un satellite géostationnaire, pour que ses panneaux solaires et ses organes de télécommunication avec la terre soient correctement positionnés, il faut contrôler en continu son orientation. Celle-ci se caractérise par la position angulaire du satellite autour de son centre d'inertie, appelée attitude et définie par trois angles autour d'un système de trois axes tournant avec le satellite. On s'intéresse ici à l'orientation autour de l'axe de lacet, c'est-à-dire autour de la verticale qui passe par le centre d'inertie du satellite.



■ Dans le système étudié, le contrôle s'obtient par des petites fusées latérales commandées électriquement. La réaction à l'émission de gaz (propergols) par ces fusées génère un couple c(t) qui permet d'agir sur la position angulaire $\theta(t)$ du satellite autour de l'axe de lacet. La quantité de propergols consommée par ces fusées est infime et compatible avec la durée d'exploitation du satellite.

L'application du théorème du moment dynamique au satellite en projection sur son axe de lacet permet d'écrire que :

$$c(t) = J\frac{d^2\theta}{dt^2}(t)$$

où J est le moment d'inertie du satellite autour de son axe de lacet.

En effet, à l'altitude des satellites géostationnaires l'atmosphère est si peu dense que les frottements dans l'air peuvent être négligés : le seul couple intervenant autour de l'axe de lacet est donc celui généré par les fusées.

Cours de mécanique

■ Un capteur gyroscopique intégrateur permet de mesurer l'angle $\theta(t)$, qu'il traduit par une tension électrique $u_\theta(t)$ qui lui est proportionnelle selon un gain a (V/rad).

Cette tension est comparée à l'image $u_c(t)$ de la consigne angulaire à respecter $\theta_c(t)$. Le transducteur est adapté au capteur de telle sorte que $u_c(t) = a\theta_c(t)$, a étant le gain du capteur.

L'écart $\varepsilon(t) = u_c(t) - u_\theta(t)$ est traité par un correcteur proportionnel de gain C, qui élabore la tension d'alimentation u(t) de la partie opérative.

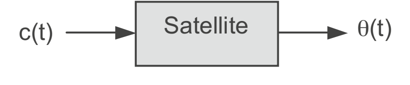
Celle-ci, constituée des fusées proprement dites et de leur dispositif électronique de commande, sera, pour simplifier, considérée comme générant un couple proportionnel à la tension de commande, le gain étant noté A (Nm/V).

NB : ces considérations sont bien évidemment très simplifiées par rapport à la réalité, mais n'enlèvent rien à la démarche qui va suivre.

III-2 Travail demandé

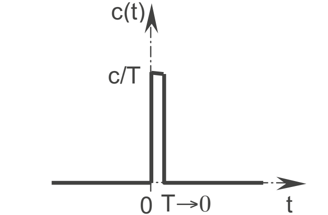
<u>Question 1 :</u> satellite non contrôlé

On considère le système « satellite » sans contrôle. Soumis à un couple c(t), il tourne d'un angle $\theta(t)$ selon l'équation donnée plus haut.



Quelle est la fonction de transfert S(p) du système « satellite » ? Ce système est-il stable ?

Quelle est la réaction du satellite à une brève émission de gaz pouvant être modélisée par une impulsion de couple de poids c (Nm.s) : $c(t) = c\,\delta(t)$? Justifier ce résultat par un raisonnement physique.



Quelle est la réaction du satellite à un échelon de couple ?

<u>Question 2 :</u> boucle d'asservissement

Donner le schéma bloc de l'asservissement décrit plus haut, et montrer que cet asservissement peut être décrit par un schéma à retour unitaire.

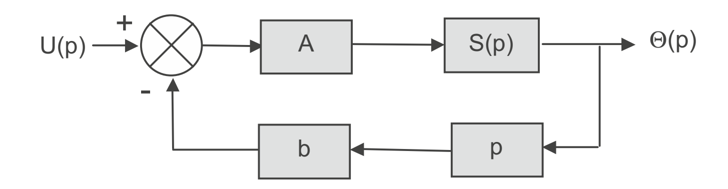
Exprimer sa FTBO et sa FTBF.

Que pensez vous de la stabilité de l'asservissement ?

Quelle est la réponse de cet asservissement à une consigne en échelon ?

<u>Question 3 :</u> correction tachymétrique

Afin d'assurer la stabilité du système, on lui adjoint une seconde boucle dite de correction tachymétrique. Pour cela, on dispose d'un capteur de vitesse angulaire de gain b ($V/rad.s^{-1}$) venant corriger l'alimentation des fusées comme indiqué ci-dessous :



31) Donner le schéma bloc complet de ce nouvel asservissement avec correction tachymétrique.

32) La description fait apparaître un bloc de dérivation non causal dans la boucle interne. Proposer une description équivalente n'utilisant que des blocs causaux.



33) Déterminer la FTBO et la FTBF de l'asservissement.

34) Vérifier la stabilité de l'asservissement ainsi réalisé.
Quelle est la précision statique de cet asservissement suite à une consigne en échelon ?
Conclure et préciser quelles sont les performances qu'il resterait à régler.

III-3 Correction

<u>Question 1 :</u> satellite non contrôlé

Le satellite obéit à l'équation : $c(t) = J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}(t)$

Celle-ci se transforme par la transformation de Laplace et sous les conditions de Heaviside en :
$C(p) = Jp^2\Theta(p)$

Ainsi, la fonction de transfert du satellite est : $\boxed{S(p) = \dfrac{\Theta(p)}{C(p)} = \dfrac{1}{Jp^2}}$

Il s'agit d'une fonction de transfert d'ordre 2, de classe 2 et de gain 1/J. Elle présente une racine nulle double.
Le système est donc <u>instable</u> puisque pour être stable toutes les racines de sa fonction de transfert doivent être à partie réelle strictement négative, ce qui n'est pas le cas de zéro.

• Si l'entrée est une impulsion de couple de poids c (Nm.s), dans le domaine de Laplace elle s'écrit $C(p) = c$. Alors, la position angulaire du satellite est, toujours dans le domaine de Laplace :

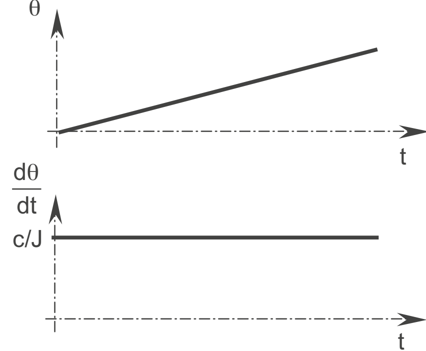
$\Theta(p) = \dfrac{1}{Jp^2}C(p) = \dfrac{c}{Jp^2}$

Or, on sait que la transformée inverse de $\dfrac{1}{p^2}$ est t (voir table des transformées si nécessaire).

Donc, dans le domaine temporel, l'évolution de la position angulaire est :

$\boxed{\theta(t) = \dfrac{c}{J}t}$

Il s'agit d'une évolution linéaire, indéfinie : soumis à une impulsion et en l'absence de frottements dans l'air, le satellite tourne indéfiniment à la vitesse constante c/J.



• Si l'entrée est un échelon, alors l'entrée, dans le domaine de Laplace, est de la forme $C(p) = \dfrac{c_0}{p}$.

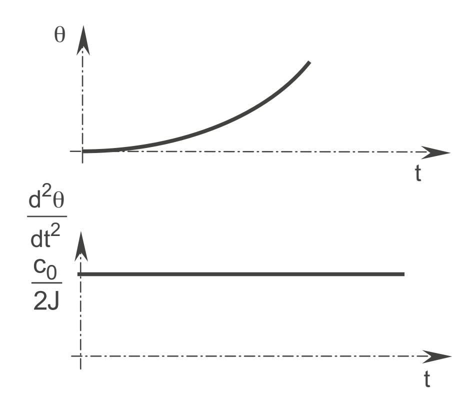
Alors, la position angulaire du satellite est, toujours dans le domaine de Laplace :

$\Theta(p) = \dfrac{1}{Jp^2}C(p) = \dfrac{c_0}{Jp^3}$

Or, on sait que la transformée inverse de $\dfrac{1}{p^3}$ est $\dfrac{1}{2}t^2$ (voir table des transformées si nécessaire).

Donc, dans le domaine temporel, l'évolution de la position angulaire est :

$$\theta(t) = \frac{c_0}{2J} t^2$$

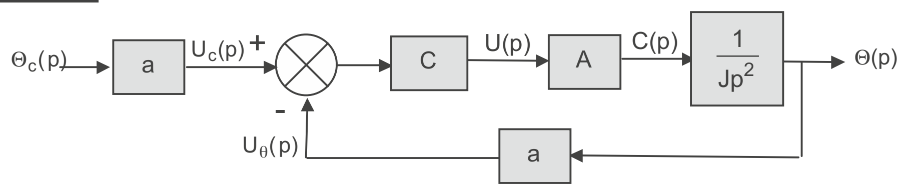


Il s'agit d'une évolution parabolique, indéfinie : soumis à un couple constant, le satellite accélère indéfiniment.

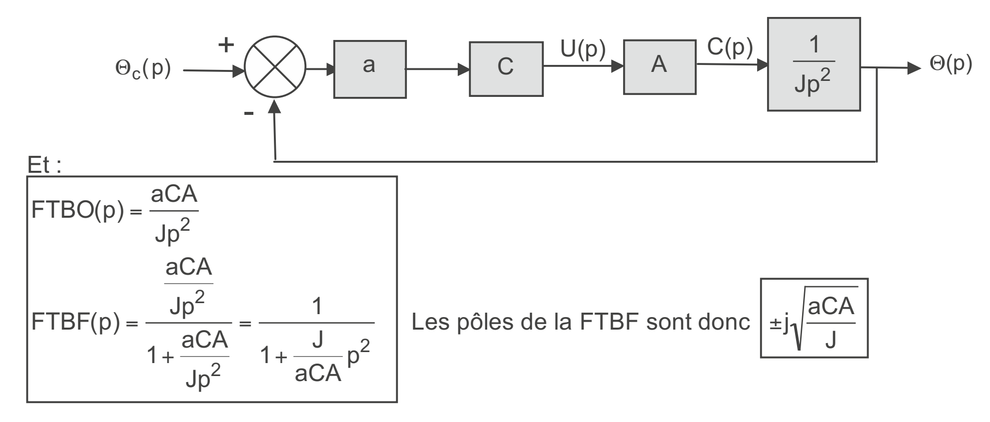
Ce résultat aurait pu se démontrer aussi par simple intégration du résultat précédent, puisque l'entrée en échelon est l'intégrale de l'entrée en impulsion, aux constantes multiplicatives c et c_0 près, comme cela s'observe très bien dans le domaine de Laplace par division par p.

Ces comportements sont bien caractéristiques d'un système instable.

<u>Question 2 :</u> boucle d'asservissement



Cette structure peut également être décrite par le schéma à retour unitaire :



Et :

$$FTBO(p) = \frac{aCA}{Jp^2}$$

$$FTBF(p) = \frac{\frac{aCA}{Jp^2}}{1 + \frac{aCA}{Jp^2}} = \frac{1}{1 + \frac{J}{aCA}p^2}$$

Les pôles de la FTBF sont donc $\pm j\sqrt{\frac{aCA}{J}}$

Ces deux pôles sont imaginaires purs, générateurs d'oscillations non amorties. Le système est donc toujours <u>instable</u>, même si sa réponse ne sera plus divergente mais oscillatoire.

Si le système est soumis à une consigne en échelon, celle si s'exprime dans le domaine de Laplace par :

$$\Theta_c(p) = \frac{\theta_c}{p}$$

La réponse est donc, toujours dans le domaine de Laplace : $\Theta(p) = FTBF(p)\frac{\theta_c}{p} = \frac{\theta_c}{p[1 + \frac{J}{aCA}p^2]}$

Deux méthodes sont alors possibles pour en déduire l'expression de la transformée inverse θ(t).

Première méthode

Classiquement, on opère une décomposition en éléments simples sous la forme :

$$\Theta(p)=\theta_c[\frac{X}{p}+\frac{Yp+Z}{1+\frac{J}{aCA}p^2}]=\frac{\theta_c}{p[1+\frac{J}{aCA}p^2]}[X+Zp+(\frac{J}{aCA}+Y)p^2]$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} X=1 \\ Z=0 \\ Y=-\frac{J}{aCA} \end{cases}$$

Ainsi la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$\Theta(p)=\theta_c[\frac{1}{p}-\frac{J}{aCA}\frac{p}{1+\frac{J}{aCA}p^2}]=\theta_c[\frac{1}{p}-\frac{p}{\frac{aCA}{J}+p^2}]$$. Or on sait que :

- la transformée inverse de $\frac{1}{p}$ est 1
- la transformée inverse de $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ est $\cos\omega t$. Voir la table des transformées si nécessaire.

La transformée inverse de $\Theta(p)$ est donc l'évolution cherchée : $\boxed{\theta(t)=\theta_c(1-\cos\sqrt{\frac{aCA}{J}}t)}$

Seconde méthode

On peut se dispenser de la décomposition en éléments simples si on écrit que :

- la transformée inverse de $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ est $\sin\omega t$. Voir la table des transformées si nécessaire,
- une division par p dans le domaine de Laplace correspond à une intégration dans le domaine temporel.

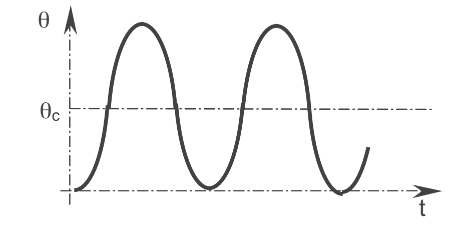
Alors $\Theta(p)=\frac{\theta_c}{p[1+\frac{J}{aCA}p^2]}$ a pour transformée inverse $\theta(t)=\theta_c\int_0^t\sqrt{\frac{aCA}{J}}\sin\sqrt{\frac{aCA}{J}}\tau d\tau$ Soit :

$$\theta(t)=\theta_c\sqrt{\frac{aCA}{J}}\sqrt{\frac{J}{aCA}}\left[-\cos\sqrt{\frac{aCA}{J}}t+1\right]=\boxed{\theta_c(1-\cos\sqrt{\frac{aCA}{J}}t)}$$

Conclusion

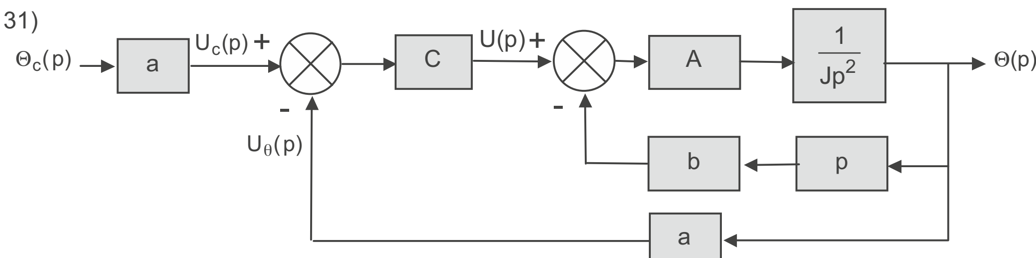
Le satellite oscille indéfiniment autour de la position de consigne θ_c et la pulsation des oscillations est définie par la partie imaginaire des pôles de la fonction de transfert.

Ceci, bien entendu, ne convient pas.

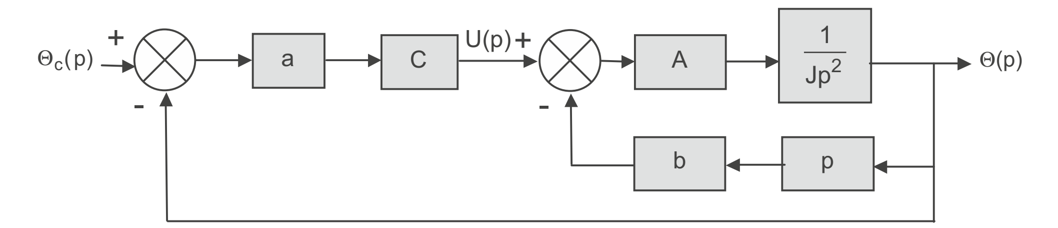


<u>Question 3 :</u> correction tachymétrique

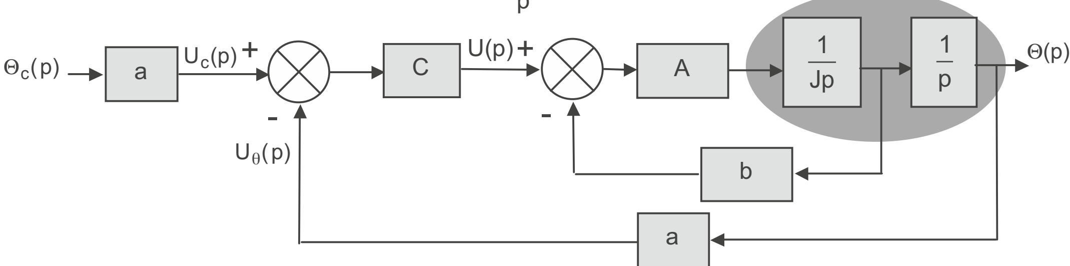
31)



Ou encore, avec un retour unitaire :

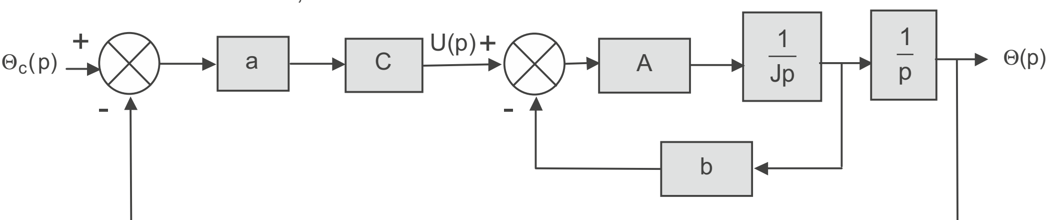


32) Il faut décomposer la double intégration en $\frac{1}{p^2}$:



Ce schéma ne fait apparaître que des blocs causaux. Il traduit en fait la réalité structurelle : le capteur gyrométrique fournit une information sur la vitesse angulaire (gain b V/rad.s^{-1}), puis par intégration une information sur l'angle (gain a V/rad).

Ramené à un retour unitaire, ce schéma devient :



33) Si on raisonne par exemple sur ce dernier schéma, la fonction de transfert de la boucle interne est :

$$H(p) = \frac{\frac{A}{Jp}}{1+\frac{bA}{Jp}} = \frac{A}{bA+Jp} = \frac{\frac{1}{b}}{1+\frac{J}{bA}p}$$

et donc $\boxed{FTBO(p) = \frac{\frac{aC}{b}}{p(1+\frac{J}{bA}p)}}$

NB : si la fonction de transfert de la boucle interne diffère selon le schéma de travail, puisque cette boucle en dépend, bien évidemment la FTBO et la FTBF en sont indépendantes.

$$\text{et } FTBF(p) = \frac{\frac{\frac{aC}{b}}{p(1+\frac{J}{bA}p)}}{1+\frac{\frac{aC}{b}}{p(1+\frac{J}{bA}p)}} = \frac{1}{1+\frac{b}{aC}(1+\frac{J}{bA}p)p} = \boxed{\frac{1}{1+\frac{b}{aC}p+\frac{J}{aCA}p^2}}$$

Fonction de transfert d'ordre 2, de classe nulle et de gain 1 (sans dimension).

34) La FTBF présente un dénominateur qui est un polynôme du 2ème ordre à coefficients tous positifs, le système est donc <u>stable</u>.

Le gain de la FTBF est 1, le système est donc <u>précis</u> pour une entrée en échelon. On peut le vérifier en calculant l'erreur statique relative de position, égale à l'écart statique calculé sur le schéma à retour unitaire :

$$Er_{\%} = \varepsilon_{s\%} = \lim_{p \to 0} \frac{1}{1+FTBO(p)} = \lim_{p \to 0} \frac{1}{1+\dfrac{\frac{aC}{b}}{p(1+\frac{J}{bA}p)}} = \lim_{p \to 0} \frac{p(1+\frac{J}{bA}p)}{p(1+\frac{J}{bA}p)+\frac{aC}{b}} = 0$$

L'erreur statique relative de position est bien <u>nulle</u>, ce qui était prévisible puisque <u>la FTBO est de classe 1</u>.

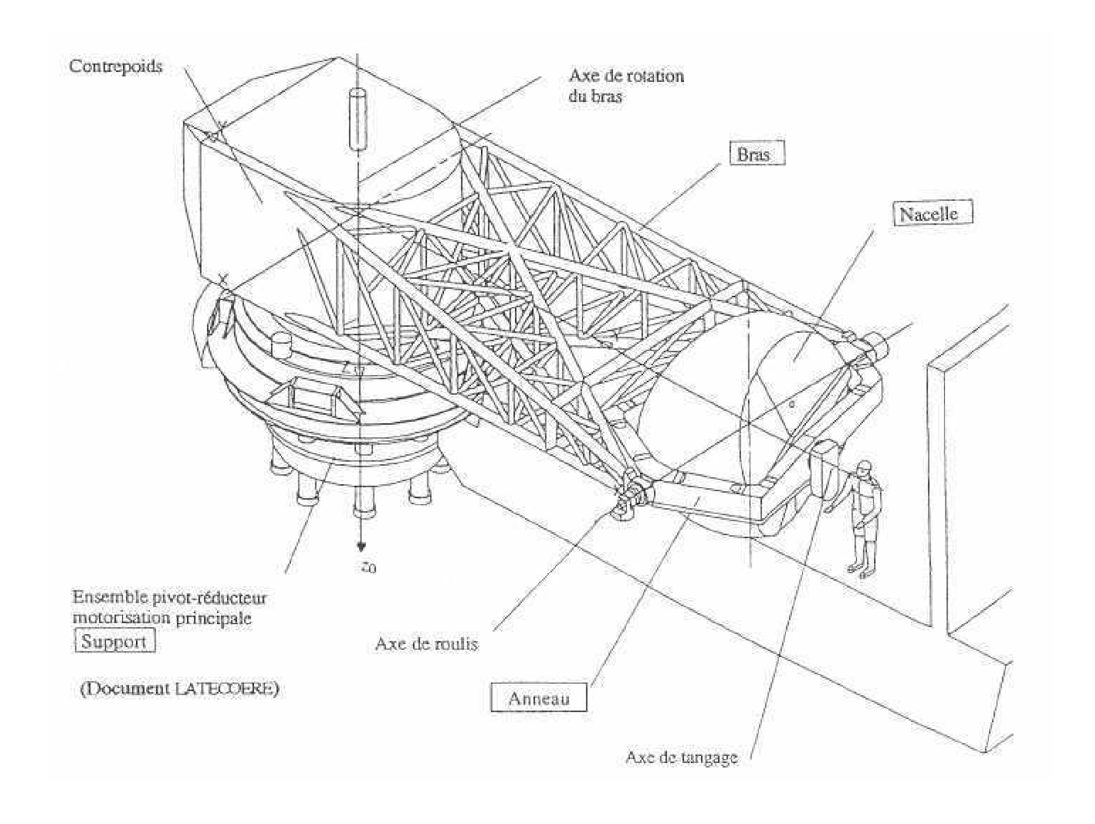
En conclusion, le système à correction tachymétrique est <u>stable et précis</u>. Il resterait à choisir les différents coefficients pour satisfaire des critères de rapidité ou de minimisation des oscillations par exemple.

IV - CENTRIFUGEUSE HUMAINE

D'après une épreuve du Concours Commun Polytechnique MP. Questions modifiées.

IV-1 Présentation

■ L'élargissement du domaine de vol des avions de combat modernes soumet les pilotes de chasse à des niveaux d'accélération de plus en plus élevés. Dans le cadre de l'entraînement physiologique des pilotes, l'utilisation d'une centrifugeuse humaine est un moyen avantageux de recréer au niveau du sol, l'accélération subie en opération. La figure ci-dessous représente une telle centrifugeuse où l'on reconnaît une structure cinématique ouverte à quatre corps (support, bras, anneau et nacelle) assemblés par des liaisons pivot.



Cette conception permet de lier de façon univoque les profils de position ou de vitesse relatives engendrés au niveau de chaque liaison à l'évolution temporelle des trois composantes d'accélération. Chaque liaison est alors motorisée par un actionneur qui doit être asservi à la consigne correspondante. On s'intéresse ici à la commande asservie de la vitesse ω de rotation de l'ensemble autour de l'axe vertical.

■ L'ensemble en mouvement formé par le bras, l'anneau et la nacelle peut en première approximation être considéré comme un ensemble indéformable de moment d'inertie équivalent J par rapport à l'axe de rotation. Cet ensemble est soumis à :

- un couple moteur $c_m(t)$ délivré par le motoréducteur d'entraînement,
- un couple de frottement visqueux engendré par les paliers et proportionnel à la vitesse du bras : $c_v(t) = -f_v\omega(t)$
- un couple de frottement aérodynamique engendré par l'air et proportionnel au carré de la vitesse du bras : $c_a(t) = -f_a\omega^2(t)$

Alors le principe fondamental de la dynamique, appliqué au bras par rapport au support galiléen, permet d'écrire que :

$$J\frac{d\omega}{dt}(t) = c_m(t) - f_v\omega(t) - f_a\omega^2(t)$$


Fiche ressource "inertie équivalente"
Cours de mécanique

■ Le motoréducteur d'entraînement est construit sur un moteur à courant continu et est régi par les quatre équations suivantes :

- l'équation mécanique précédente : $J\frac{d\omega}{dt}(t) = c_m(t) - f_v\omega(t) - f_a\omega^2(t)$
- l'équation électrique : $u(t) - e(t) = R\,i(t) + L\frac{di}{dt}(t)$
- Les équations de couplage électromécanique :
  $c_m(t) = K_c\ i(t)$
  $e(t) = K_v\ \omega(t)$

avec les notations habituelles déjà rencontrées pour la tension d'alimentation u(t), la force électromotrice e(t) et le courant d'induit i(t).


Cours d'électricité : le moteur à courant continu

Ce moteur est ici à très forte résistance rotorique, si bien que l'on pourra négliger les effets d'inductance : $L \approx 0$.
Donc, l'équation électrique devient : $u(t) - e(t) = R\,i(t)$

■ L'asservissement de vitesse de l'ensemble est réalisé de la manière suivante :

La vitesse effective $\omega(t)$ est évaluée par un capteur (génératrice tachymétrique) qui se comporte comme un simple gain C (V/rad.s^{-1}). La vitesse de consigne ω_c est indiquée par un transducteur qui se comporte comme le capteur afin de permettre la comparaison de grandeurs comparables au niveau du comparateur.

Ce comparateur fournit un écart qui est traité par un correcteur de fonction de transfert C(p) qui élabore un signal sous forme d'une tension v(t).

Ce signal v(t) est le signal de commande de l'amplificateur de puissance (préactionneur relié au réseau) qui se comporte comme un amplificateur de gain A (sans dimension) pour élaborer la tension u(t) d'alimentation du motoréducteur.

Le motoréducteur « transforme » cette tension de commande u(t) en la vitesse de rotation $\omega(t)$ de l'ensemble avec la fonction de transfert :

$M(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$.

IV-2 Travail demandé

<u>Question 1 :</u> schéma bloc

Donner le schéma bloc de l'asservissement de vitesse.
Mettre ce schéma sous forme d'un schéma à retour unitaire.

<u>Question 2 :</u> modélisation de l'ensemble en mouvement

L'ensemble en mouvement obéit à l'équation différentielle :

$$J\frac{d\omega}{dt}(t) = c_m(t) - f_v\omega(t) - f_a\omega^2(t)$$

Qu'est-ce qui permet d'affirmer que cette équation différentielle n'est pas linéaire ?

L'étude sera alors conduite après ***linéarisation autour d'un point de fonctionnement*** définit par le couple (c_{m0}, ω_0). On pose donc :

$\delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0$

$\delta c_m(t) = c_m(t) - c_{m0}$

petites variations autour du point de fonctionnement.

Établir l'équation différentielle vérifiée par ces petites variations et procéder à sa linéarisation.

On note $\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega(t)$ et $C_m(p)$ la transformée de Laplace de $\delta c_m(t)$.

Établir la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\Omega(p)}{C_m(p)}$.

<u>Question 3 :</u> modélisation du motoréducteur

Toujours en limitant l'étude autour du point de fonctionnement, établir la fonction de transfert du motoréducteur :

$M(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$.

<u>Question 4 :</u> asservissement de vitesse autour du point de fonctionnement

Donner le schéma bloc de l'asservissement de vitesse autour du point de fonctionnement et établir sa FTBO et sa FTBF en fonction de la fonction de transfert pour l'instant indéterminée du correcteur C(p).

Quelle est l'erreur permanente relative sur la vitesse (écart statique de position) en fonction de C(p) ?

<u>Question 5 :</u> choix du correcteur

Montrer qu'avec un correcteur proportionnel de type $C(p) = K_p$ cette erreur ne peut pas être nulle.

Montrer qu'avec un correcteur de type $C(p) = K_i\dfrac{1+p}{p}$ cette erreur est nécessairement nulle.

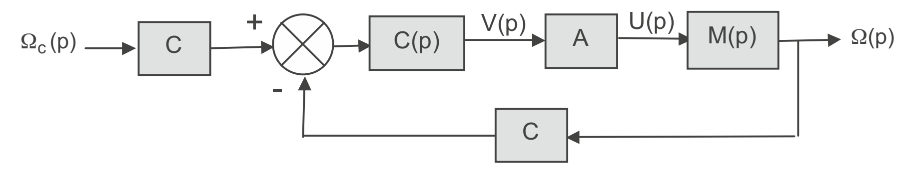
■ **Info :**
Un tel correcteur rendant l'asservissement précis (cf. chapitre 6) est appelé ***correcteur proportionnel intégral***, il peut en effet se mettre sous la forme :

$$C(p) = K_i \frac{1+p}{p} = K_i + \frac{K_i}{p}$$

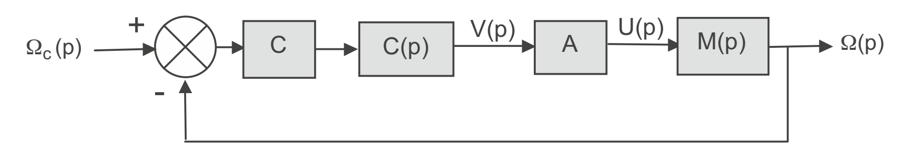
Il élabore donc un terme qui est la somme d'un terme proportionnel à l'écart et d'un terme qui est proportionnel à l'intégrale de l'écart depuis l'instant initial.

IV-3 Correction

Question 1 : schéma bloc



Cette structure peut également être décrite par le schéma à retour unitaire :



Question 2 : modélisation de l'ensemble en mouvement

L'équation $J\frac{d\omega}{dt}(t) = c_m(t) - f_v\omega(t) - f_a\omega^2(t)$ n'est pas linéaire car le terme en $\omega^2(t)$ ne l'est pas.

On pose :
$\delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0$
$\delta c_m(t) = c_m(t) - c_{m0}$

soit :
$\omega(t) = \delta\omega(t) + \omega_0$
$c_m(t) = \delta c_m(t) + c_{m0}$

L'équation différentielle devient alors :

$$J\frac{d}{dt}[\delta\omega(t) + \omega_0] = [\delta c_m(t) + c_{m0}] - f_v[\delta\omega(t) + \omega_0] - f_a[\delta\omega(t) + \omega_0]^2$$

soit : $J\frac{d\delta\omega}{dt}(t) = \delta c_m(t) + c_{m0} - f_v\delta\omega(t) - f_v\omega_0 - f_a\delta\omega^2(t) - 2f_a\omega_0\delta\omega(t) - f_a\omega_0^2$

ou encore : $J\frac{d\delta\omega}{dt}(t) = [c_{m0} - f_v\omega_0 - f_a\omega_0^2] + \delta c_m(t) - f_v\delta\omega(t) - f_a\delta\omega^2(t) - 2f_a\omega_0\delta\omega(t)$

Puisque (c_{m0}, ω_0) est un point de fonctionnement, ces deux valeurs sont solutions de l'équation différentielles donc : $c_{m0} - f_v\omega_0 - f_a\omega_0^2 = 0$

Par ailleurs, puisqu'on étudie les petites variations autour de ce point de fonctionnement, le terme $f_a\delta\omega^2(t)$ est négligeable devant $2f_a\omega_0\delta\omega(t)$. Donc finalement l'équation des petites variations autour du point de fonctionnement s'écrit :

$$J\frac{d\delta\omega}{dt}(t) = \delta c_m(t) - f_v\delta\omega(t) - 2f_a\omega_0\delta\omega(t)$$

soit : $\boxed{J\frac{d\delta\omega}{dt}(t) = \delta c_m(t) - (f_v + 2f_a\omega_0)\delta\omega(t)}$

Cette équation est linéaire et devient, après transformation dans le domaine de Laplace, sous les conditions de Heaviside à partir du point de fonctionnement, et avec les notations proposées :

$$Jp\Omega(p) = C_m(p) - (f_v + 2f_a\omega_0)\Omega(p)$$

ou encore $C_m(p) = [(f_v + 2f_a\omega_0) + Jp]\Omega(p)$

ce qui permet d'écrire la fonction de transfert demandée : $H(p) = \dfrac{\Omega(p)}{C_m(p)} = \dfrac{1}{(f_v + 2f_a\omega_0) + Jp}$

Soit, sous forme canonique $H(p) = \dfrac{\Omega(p)}{C_m(p)} = \dfrac{\dfrac{1}{f_v + 2f_a\omega_0}}{1 + \dfrac{J}{f_v + 2f_a\omega_0}p}$

Cette fonction de transfert est d'ordre 1 et de classe 0, caractéristique d'un système stable puisque son unique pôle est le réel négatif :

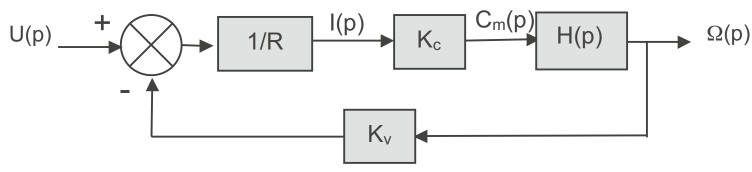
$$-\frac{f_v + 2f_a\omega_0}{J}$$

<u>Question 3 :</u> modélisation du motoréducteur

Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, les quatre équations régissant le fonctionnement du moteur sont :

- l'équation mécanique précédente traduite par la fonction de transfert H(p)
- l'équation électrique (L négligée) : U(p) – E(p) = RI(p)
- les équations de couplage électromécanique :
  $C_m(p) = K_c I(p)$
  $E(p) = K_v \Omega(p)$

Alors le motoréducteur peut être représenté par le schéma bloc :



Ce qui permet d'écrire que :

$$M(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\dfrac{K_c}{R}H(p)}{1 + \dfrac{K_vK_c}{R}H(p)} = \frac{\dfrac{K_c}{R[(f_v + 2f_a\omega_0) + Jp]}}{1 + \dfrac{K_vK_c}{R[(f_v + 2f_a\omega_0) + Jp]}} = \frac{K_c}{R[(f_v + 2f_a\omega_0) + Jp] + K_vK_c}$$

Soit sous forme canonique : $M(p) = \dfrac{\dfrac{K_c}{K_vK_c + R(f_v + 2f_a\omega_0)}}{1 + \dfrac{RJ}{K_vK_c + R(f_v + 2f_a\omega_0)}p}$

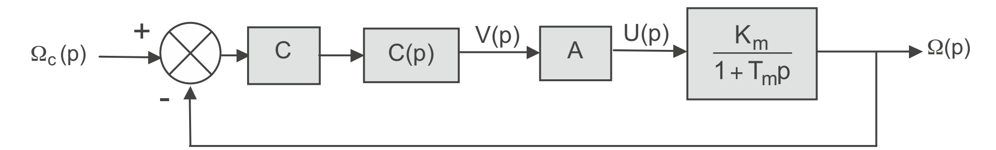
Cette fonction sera notée pour la suite pour simplifier :

$$M(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$$

C'est une fonction d'ordre 1, de classe 0, stable.

<u>Question 4 :</u> asservissement de vitesse autour du point de fonctionnement

Compte tenu de la modélisation adoptée pour le moteur, le schéma bloc de l'asservissement sera, en reprenant par exemple la description avec un retour unitaire :



Alors :

$$\mathrm{FTBO}(p) = \frac{CAK_mC(p)}{1+T_m p}$$

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{\mathrm{FTBO}(p)}{1+\mathrm{FTBO}(p)} = \frac{\frac{CAK_mC(p)}{1+T_m p}}{1+\frac{CAK_mC(p)}{1+T_m p}} = \frac{CAK_mC(p)}{CAK_mC(p)+1+T_m p} = \frac{1}{1+\frac{1+T_m p}{CAK_mC(p)}}$$

(retour unitaire)

La forme canonique de ces expressions dépend de C(p).

L'erreur permanente relative sur la vitesse n'est autre ici que l'écart statique de position puisque la description est faite avec un retour unitaire, soit :

$$E_{r\%} = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+\mathrm{FTBO}(p)} = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+\frac{CAK_mC(p)}{1+T_m p}} = \boxed{\frac{1}{1+CAK_m \lim\limits_{p\to 0} C(p)}}$$

NB : on suppose, bien entendu, que le choix à venir du correcteur assure la stabilité de l'asservissement.

<u>Question 5 :</u> choix du correcteur

- Si le correcteur est un correcteur proportionnel défini par $C(p) = K_p$, alors $\boxed{E_{r\%} = \frac{1}{1+CAK_mK_p}}$

Cette erreur sera d'autant plus faible que le gain K_p sera grand, mais ne pourra pas être nulle.

C'est la situation habituelle d'un système dont la <u>FTBO est de classe nulle</u>, soit $E_{r\%} = \frac{1}{1+K_{BO}}$.

On peut aussi calculer $\mathrm{FTBF}(p) = \frac{CAK_mK_p}{CAK_mK_p+1+T_m p} = \frac{\frac{CAK_mK_p}{CAK_mK_p+1}}{1+\frac{T_m}{CAK_mK_p+1}p}$

Le gain de cette fonction de transfert ne peut pas être 1 mais nécessairement un nombre inférieur à 1, d'autant plus proche de 1 que K_p sera grand. La vitesse ne peut atteindre la consigne.

On peut aussi vérifier que $1-\frac{CAK_mK_p}{CAK_mK_p+1} = \frac{1}{CAK_mK_p+1}$ qui est bien l'erreur calculée.

- Si le correcteur est un correcteur proportionnel intégral défini par $C(p) = K_i\frac{1+p}{p}$, alors cette fois un intégrateur est introduit dans la boucle et <u>la FTBO est de classe 1</u>.

Ceci permet d'annuler l'écart statique : le système est alors <u>précis</u>, sans condition sur coefficient K_i. Ceci peut se vérifier par :

$\lim_{p\to 0} C(p) = \infty$ et donc $\boxed{E_{r\%} = \dfrac{1}{1 + CAK_m \lim_{p\to 0} C(p)} = 0}$ quel que soit le coefficient K_i.

On peut aussi calculer $FTBF(p) = \dfrac{CAK_mK_i \dfrac{p+1}{p}}{CAK_mK_i \dfrac{p+1}{p} + 1 + T_m p} = \dfrac{p+1}{p + 1 + \dfrac{1}{CAK_mK_i} p + \dfrac{T_m}{CAK_mK_i} p^2}$

ou encore, sous forme canonique : $FTBF(p) = \dfrac{1+p}{1 + \dfrac{CAK_mK_i + 1}{CAK_mK_i} p + \dfrac{T_m}{CAK_mK_i} p^2}$

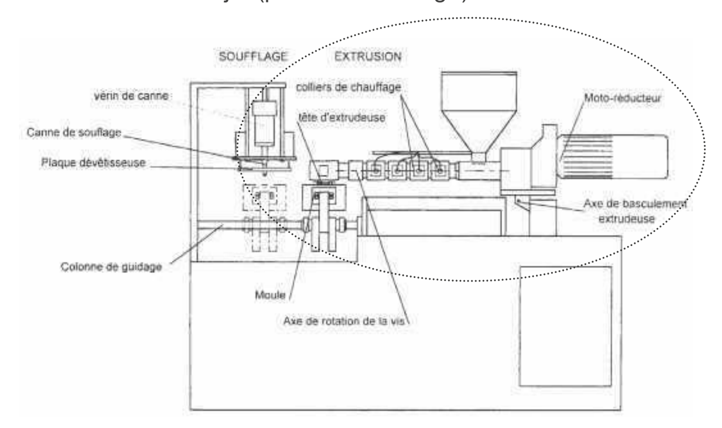
Cette fonction de transfert est bien celle d'un système stable (polynôme de degré 2 à coefficients positifs au dénominateur). Son gain est 1. La vitesse tend donc bien vers la consigne.

V - POSTE D'EXTRUSION

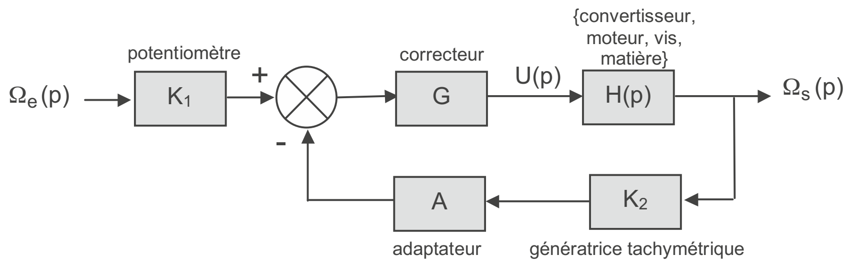
D'après une épreuve du concours ENGEES PSI. Questions complétées.

V-1 Présentation

L'extrusion est la technique de transformation des matières thermoplastiques la plus courante. La matière en vrac (poudre ou granulés) s'écoule en continu dans un fourreau chauffé par des colliers chauffants. Elle est plastifiée par la chaleur du fourreau et malaxée et laminée par la rotation d'une vis. Dans le poste ici étudié, elle est ensuite poussée par cette dernière vers un moule permettant d'obtenir la forme attendue de l'objet (poste de soufflage).



L'entraînement de la vis est obtenu par un moteur électrique à courant continu accouplé à un réducteur. Pour le matériau extrudé ici, le point de fonctionnement correspond à une vitesse de rotation de la vis de 135 tr/min. Des irrégularités dans la consistance du matériau nécessitent d'asservir la rotation de la vis en vitesse afin de garantir que celle-ci soit la plus constante possible et proche de 135 tr/min. Le schéma du système est le suivant :



La consigne de vitesse est fournie à l'aide d'un potentiomètre rotatif sur le pupitre de commande. Ce potentiomètre est modélisé par un gain K_1 = 0,12 V/tr.min^{-1}.

La tension de commande est comparée à la tension de mesure fournie par une génératrice tachymétrique modélisée par un gain K_2 = 0,2 V/tr.min^{-1}. À cette génératrice tachymétrique est associé un adaptateur sous forme d'un ampli de gain A.

L'écart établi est traité par un correcteur proportionnel qui est un simple gain G.

Le comportement de l'ensemble {convertisseur (préactionneur), moteur, vis, matière} est connu et modélisé par la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{\Omega_S(p)}{U(p)} = \frac{100}{1+15p}$$

où 100 est un gain exprimé en tr.min^{-1}/V et 15 une constante de temps exprimée en s.

V-2 Travail demandé

<u>Question 1 :</u> réglage de l'adaptateur, FTBO et FTBF

Quel doit être le gain A de l'adaptateur de mesure afin de mesurer des grandeurs comparables au niveau du comparateur ?
Donner alors l'expression de la FTBO et de la FTBF de ce système asservi.

<u>Question 2 :</u> réglage du correcteur

Déterminer la valeur G du correcteur permettant de limiter l'erreur sur la vitesse à 1% de sa valeur de consigne en échelon.

<u>Question 3 :</u> montée en vitesse

31) Tracer alors l'évolution de la vitesse pour une consigne en échelon de 135 tr/min.

32) Quelle est, en régime permanent, la tension u d'alimentation du convertisseur ?

33) Quelle est, à l'instant initial, la valeur de cette tension ?

<u>Question 4 :</u> stratégies de protection du convertisseur

41) Le convertisseur supporte au maximum une tension de 24 V.
Quel doit alors être le réglage maxi de G ?
Quelle en est la conséquence en termes de précision ?

42) Proposer une stratégie de montée en vitesse permettant la précision de 1% attendue sur la vitesse réglée, tout en préservant le convertisseur.

NB : on pourrait également envisager un correcteur proportionnel intégral pour annuler l'erreur, comme dans la centrifugeuse humaine (voir exercice précédent).

V-3 Correction

<u>Question 1 :</u> réglage de l'adaptateur, FTBO, FTBF

Classiquement, la comparaison de grandeurs comparables au niveau du comparateur impose $K_1 = AK_2$ soit :

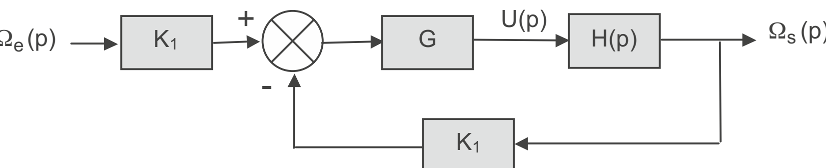
$\boxed{A = \frac{K_1}{K_2} = 0,6}$ gain sans dimension.

Alors : $FTBO(p) = GH(p)AK_2 = GH(p)K_1 = \frac{100GK_1}{1+15p}$, soit :

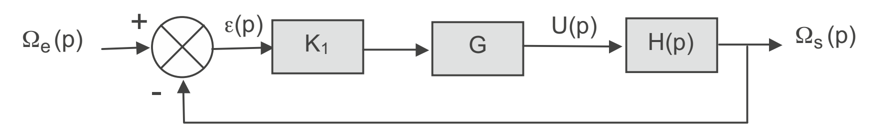
$\boxed{FTBO(p) = \frac{12G}{1+15p}}$ G étant réglable.

Et $FTBF(p) = K_1 \frac{GH(p)}{1+GH(p)AK_2} = \frac{FTBO(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{\frac{12G}{1+15p}}{1+\frac{12G}{1+15p}} = \boxed{\frac{12G}{1+15p+12G}}$

On retrouve la relation valable pour un retour unitaire. En effet, puisque $K_1 = AK_2$, le schéma devient :



ou encore :



La FTBO étant inchangée : $FTBO(p) = K_1GH(p)$

Finalement, sous forme canonique : $\boxed{FTBF(p) = \frac{\frac{12G}{1+12G}}{1+\frac{15}{1+12G}p}}$ G étant réglable.

Cette fonction de transfert est d'ordre 1, son unique pôle est le nombre $-\frac{1+12G}{15}$, réel <u>négatif</u>.

Ce pôle assure la stabilité du système.

<u>Question 2 :</u> réglage du correcteur

Trois façons de voir sont possibles.

21) <u>Raisonnement à partir du gain :</u>

Une précision parfaite de l'asservissement attend un gain 1 de la FTBF. Or, son gain est : $\frac{12G}{1+12G}$

Celui-ci ne peut donc être égal à 1 que pour G infini, ce qui est impossible. Le système ne peut donc pas être parfaitement précis. On accepte alors une erreur relative maxi de 1%. Cela revient à accepter un gain de 0,99 au lieu de 1, soit :

$$\frac{12G}{1+12G} = 0,99$$

d'où $G = \frac{0,99}{12(1-0,99)}$ soit $\boxed{G = 8,25}$ gain sans dimension.

22) <u>Raisonnement à partir de l'erreur :</u>

L'erreur relative commise sur la vitesse est : $E\% = \frac{1}{\omega_e} \lim_{t\to\infty} [\omega_e - \omega_s(t)]$ lorsque ω_e est une consigne en échelon. Soit en passant dans le domaine de Laplace :

$$E\% = \frac{1}{\omega_e}\lim_{t\to\infty}[\omega_e - \omega_s(t)] = \frac{1}{\omega_e}\lim_{p\to 0} p[\Omega_e - \Omega_s(p)]$$

avec : $\Omega_e(p) = \dfrac{\omega_e}{p}$ et $\Omega_s(p) = \text{FTBF}(p)\Omega_e(p) = \dfrac{\frac{12G}{1+12G}}{1+\frac{15}{1+12G}p}\dfrac{\omega_e}{p}$

donc $E\% = \lim\limits_{p\to 0}\left[1 - \dfrac{\frac{12G}{1+12G}}{1+\frac{15}{1+12G}p}\right] = 1 - \dfrac{12G}{1+12G} = \dfrac{1}{1+12G}$

= 1 - gain de la FTBF, comme on aurait pu s'en douter.

Cette erreur étant acceptée à 1%, il vient : $\dfrac{1}{1+12G} = 0,01$, d'où l'on retrouve bien $\boxed{G = 8,25}$

23) <u>Raisonnement à partir de l'écart :</u>

Le système pouvant être ramené à un système à retour unitaire, l'erreur et l'écart se confondent et on sait que l'écart peut se calculer par :

$$\varepsilon(p) = \frac{\Omega_e(p)}{1+\text{FTBO}(p)}$$

Le système étant soumis à une consigne en échelon, l'écart relatif en régime permanent est donc :

$$\varepsilon\% = \frac{1}{\omega_e}\lim_{p\to 0} p\frac{\frac{\omega_e}{p}}{1+\text{FTBO}(p)} = \lim_{p\to 0}\frac{1}{1+\text{FTBO}(p)} = \frac{1}{1+12G}$$

Ce résultat était prévisible, puisque <u>la FTBO étant de classe nulle</u> on a $\varepsilon\% = \dfrac{1}{1+K_{BO}}$.

Cet écart, égal à l'erreur ici, étant donc accepté comme elle à 1%, il vient donc de même $\boxed{G = 8,25}$

<u>Question 3 :</u> montée en vitesse

31) Si G est réglé à 8,25, alors $\text{FTBF}(p) = \dfrac{0,99}{1+0,15p}$

L'entrée étant un échelon de 135 tr/min, dans le domaine de Laplace la sortie est :

$$\Omega_s(p) = \frac{0,99}{1+0,15p}\frac{135}{p} = \frac{133,65}{p(1+0,15p)}$$

Elle se décompose en éléments simples sous la forme :

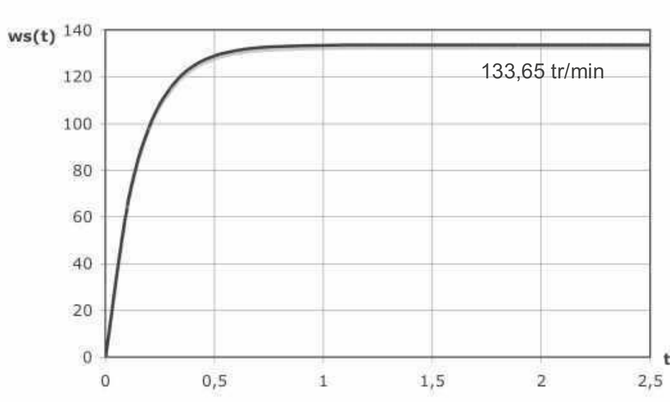
$$\Omega_s(p) = 133,65\left[\frac{A}{p} + \frac{B}{1+0,15p}\right] = 133,65\frac{A+(B+0,15A)p}{p(1+0,15p)} \text{ avec donc : } \begin{cases} A = 1 \\ B = -0,15 \end{cases}$$

soit $\Omega_s(p) = 133,65\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{0,15}{1+0,15p}\right] = 133,65\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1/0,15}\right]$

dont la transformée inverse est :

$$\boxed{\omega_s(t) = 133,65[1 - e^{-\frac{t}{0,15}}]}$$

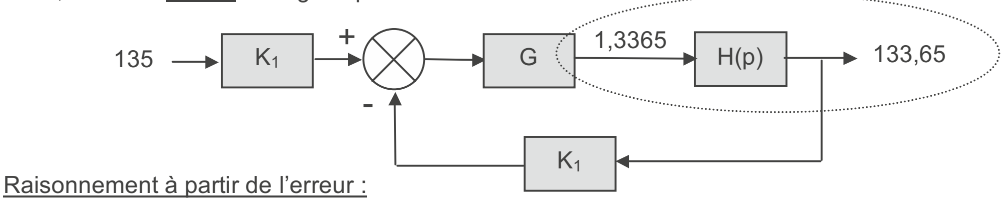
D'où l'évolution de la vitesse qui tend bien (et rapidement) vers <u>133,65 tr/min</u> (qui est 0,99x135 tr/min), selon la courbe ci-contre.



32) Deux points de vue peuvent être adoptés pour déterminer la tension d'alimentation du convertisseur en régime permanent : à partir de la valeur de la vitesse ou à partir de l'erreur.

Raisonnement à partir de la vitesse :

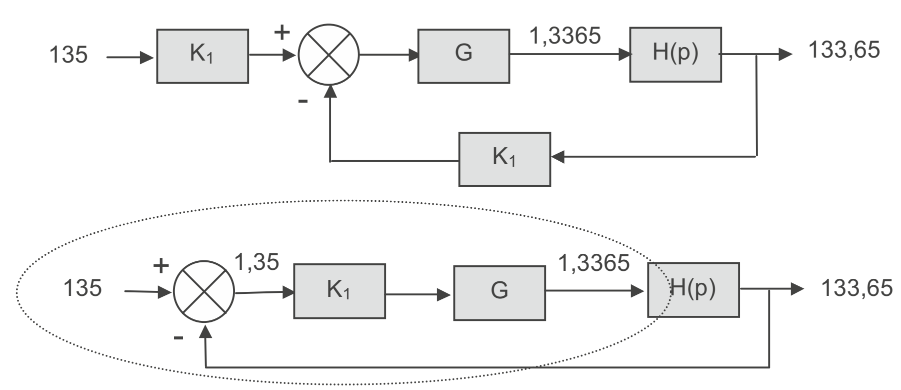
Puisqu'en régime permanent la vitesse est de 133,65 tr/min et que le gain de l'ensemble {convertisseur, moteur, vis, matière}, modélisé par H(p), est 100 $tr.min^{-1}/V$, la tension u est donc de $u = 1{,}3365\ V \approx \underline{1{,}34\ V}$ en régime permanent.



Raisonnement à partir de l'erreur :

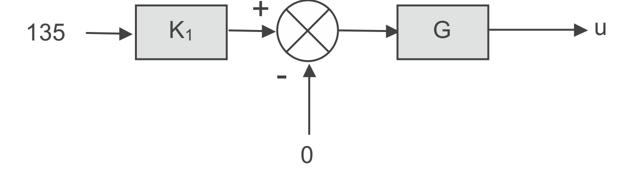
Puisqu'en régime permanent l'erreur est de 1%, la tension d'alimentation est donc alors :
$u = 0{,}01 x 135 x K_1 x G = 0{,}01x135x0{,}12x8{,}25 = 1{,}3365\ V \approx \underline{1{,}34\ V}$.

On trouve, bien entendu, le même résultat.



Ce double raisonnement montre la nécessité d'une erreur statique non nulle pour que la tension d'alimentation du convertisseur ne le soit pas. Ce système ne peut pas, par nature, être précis.

33) À l'instant initial, la vitesse est nulle , donc l'erreur est égale à la consigne de 135 tr/min et on lit donc immédiatement sur l'un des schémas blocs que la tension d'alimentation du convertisseur est :
$u = 135.K_1.G = \underline{133{,}65\ V}$



Question 4 : stratégies de protection du convertisseur

41) Cette valeur est très supérieure à la valeur maxi de 24 V que peut supporter le convertisseur.

Sachant que c'est à l'instant initial que l'erreur est maximale, puisque la vitesse est nulle, c'est donc à cet instant que la tension u d'alimentation du convertisseur le sera également.

Donc le gain G maxi du correcteur devra vérifier :
$24 = 135.K_1.G$
soit $\boxed{G = 1{,}48}$

L'erreur maximale sur la vitesse est alors augmentée puisqu'elle vaut :

$$E\% = \frac{1}{1+12G} = 0,053 = 5,3\%.$$

La précision de l'asservissement est moins bonne. Pour un réglage de 135 tr/min, la valeur asymptotique de la vitesse sera de 127,8 tr/min.

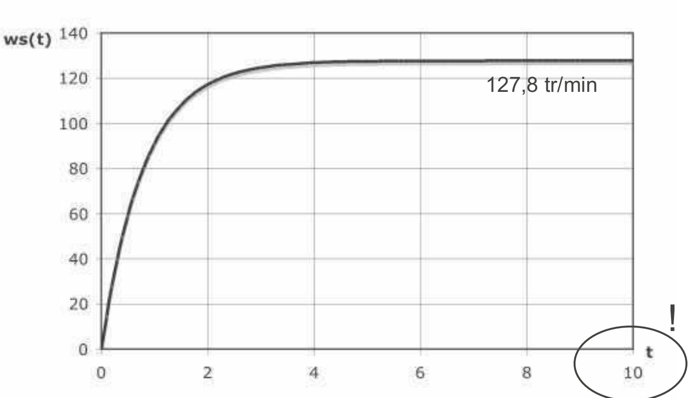
Puisque 1 - 0,053 = 0,947, la nouvelle FTBF sera :

$$FTBF(p) = \frac{0,947}{1+0,8p}$$

ce qui fournit pour réponse temporelle :

$$\omega_s(t) = 127,8\,[1-e^{-\frac{t}{0,8}}]$$

L'exponentielle convergeant moins rapidement, le système est moins précis, mais donc aussi moins rapide.



42) La rapidité n'est sans doute pas ici le critère déterminant puisqu'elle n'intervient que lors du réglage de la vitesse, le système fonctionnant ensuite en régulateur. Pour corriger l'imprécision une idée pourrait alors être de maintenir G = 1,48 mais donner une consigne supérieure à la valeur attendue, pour corriger l'erreur, soit donc ici une consigne de :

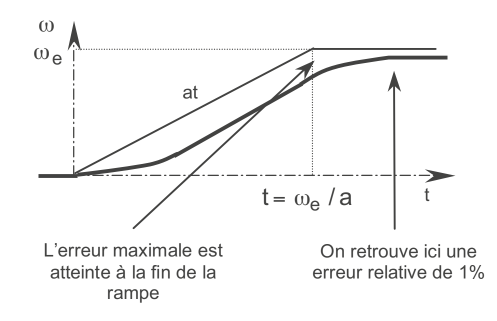
$$\frac{135}{1-E\%} = \frac{135}{0,947} = 142,56\text{ V}$$

← gain de la FTBF

Ce qui fournit une réponse temporelle : $\omega_s(t) = 127,8\,[1-e^{-\frac{t}{0,8}}]\text{x}\frac{1}{0,947} = 135\,[1-e^{-\frac{t}{0,8}}]$

Mais cette idée ne résout pas le problème de la tension au démarrage sur le convertisseur qui est alors $u = 142,56.K_1.G = 142,56 \times 0,12 \times 1,48 = 25,32\text{ V}$, donc supérieure aux 24 V admissibles.

Une solution permettant de conserver G = 8,25 (donc au final une erreur de 1%, acceptable) est d'annuler l'erreur au démarrage en sollicitant le système en rampe, puis en maintenant la consigne à la valeur souhaitée une fois celle-ci atteinte.



La question qui se pose alors est de savoir quelle est la pente maximale de la rampe préservant le convertisseur, donc limitant la tension u à 24 V.

L'erreur étant maximale cette fois, non pas au démarrage, mais à la fin de la rampe, c'est-à-dire à l'instant $t = \omega_e / a$, il faut calculer cette erreur pour déterminer la tension u.

Il faut donc accéder à l'évolution temporelle de l'erreur lors de la rampe.

Si l'entrée est une rampe $\omega_e(t) = at$, dans le domaine de Laplace $\Omega_e(p) = \frac{a}{p^2}$.

Alors la vitesse de sortie, dans le domaine de Laplace est :

$\Omega_s(p) = FTBF(p)\Omega_e(p) = \frac{0,99}{1+0,15p}\frac{a}{p^2}$ si G est repris à 8,25.

Cette fraction se décompose en éléments simples sous la forme :

$$\Omega_s(p) = 0,99a[\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{C}{1+0,15p}] = \frac{0,99a}{(1+0,15p)p^2}[A+(0,15A+B)p+(015B+C)p^2]$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} A = 1 \\ 0,15A + B = 0 \\ 0,15B + C = 0 \end{cases} \text{ qui a pour solution } \begin{cases} A = 1 \\ B = -0,15 \\ C = 0,15^2 \end{cases}$$

Ainsi, la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$\Omega_s(p) = 0,99a[\frac{1}{p^2}-\frac{0,15}{p}+\frac{0,15^2}{1+0,15p}] = 0,99a[\frac{1}{p^2}-\frac{0,15}{p}+\frac{0,15}{p+1/0,15}]$$

Soit par transformée inverse : $\omega_s(t) = 0,99a[t-0,15+0,15e^{-\frac{t}{0,15}}]$

L'erreur évolue donc selon :

$$Er(t) = \omega_e(t)-\omega_s(t) = at-0,99a[t-0,15+0,15e^{-\frac{t}{0,15}}] = 0,01at-0,99x0,15a[-1+e^{-\frac{t}{0,15}}]$$

En négligeant le terme en exponentielle, qui décroît très vite, on peut écrire pour t suffisamment grand devant 0,15 s : $Er(t) = a[0,01t+0,99x0,15]$

Donc à l'instant critique ($t = \omega_e / a$) l'erreur vaut :

$$Er(t) = a[0,01(\omega_e / a)+0,99x0,15] = 0,01\omega_e + 0,99x0,15a$$

Alors, à cet instant, la tension d'alimentation du convertisseur vaut :

$$u = K_1G[0,01\omega_e + 0,99x0,15a] = 0,99[1,35+0,1485a]$$

et doit être inférieure à 24 V.

On en déduit donc la valeur maximale de a :

$$0,99[1,35+0,1485a] = 24 \Rightarrow a = \frac{24-0,99x1,35}{0,99x0,1485}$$

soit $\boxed{a = 154,16 \text{ (tr/min).s}^{-1}}$

Puisque la valeur à atteindre est de 135 tr/min, <u>cela limite le temps de durée de la rampe à 0,88 s.</u>

NB : on peut vérifier a posteriori que l'approximation effectuée est légitime, en effet $e^{-\frac{0,88}{0,15}} \approx 0,003$ que l'on peut effectivement négliger devant 1.

En conclusion, une stratégie de montée en vitesse en rampe, avec une action progressive sur le potentiomètre de consigne faisant varier celle-ci de 0 à 135 tr/min en au moins 0,88 s, autorise de régler le gain du correcteur à G = 8,25 pour avoir une erreur de vitesse de seulement 1%, tout en limitant la tension d'alimentation du convertisseur afin qu'elle ne dépasse jamais 24 V.

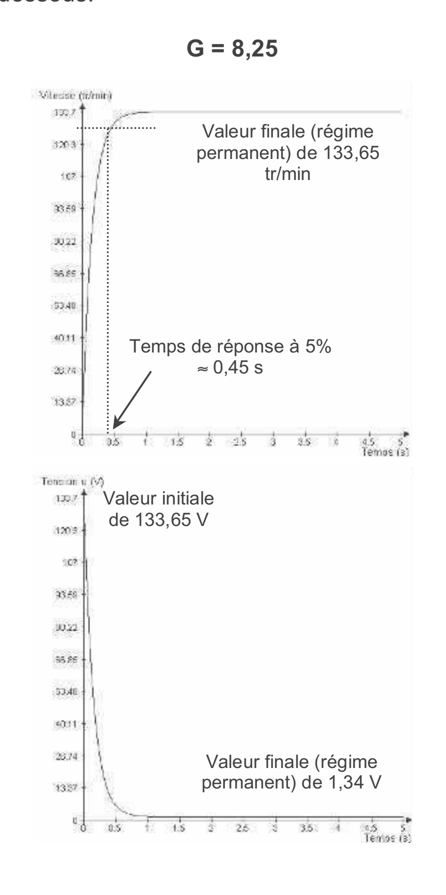
En pratique, il existe une autre solution, non évoquée ici, qui consiste à ***saturer*** la tension d'alimentation du convertisseur à la valeur 24 V par un dispositif électronique et de conserver l'entrée en échelon. Alors, aux premiers instants, la tension sera saturée et la mise en vitesse se fera avec la plus grande accélération admissible. Puis, une fois l'erreur suffisamment faible, l'asservissement prendra le relais pour limiter cette erreur à 1%.

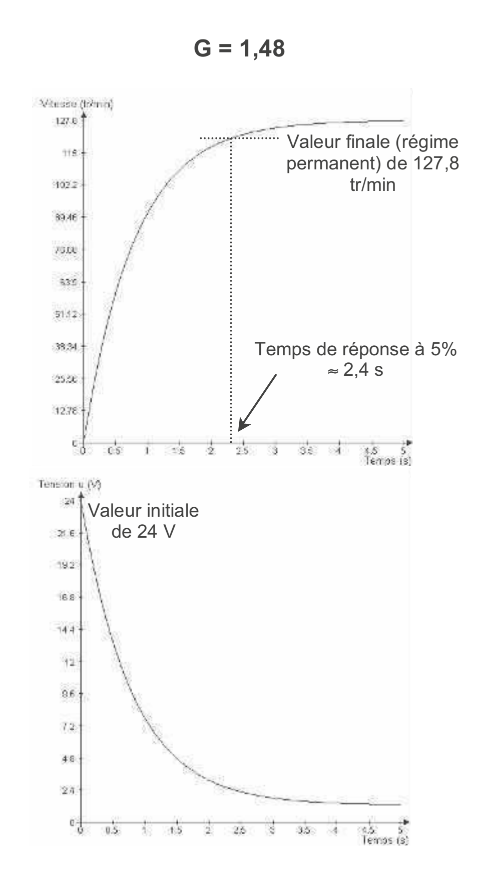
■ **Complément : simulations numériques**

Une modélisation numérique avec mesure de la tension, à l'aide d'un logiciel de simulation, permet de visualiser plus clairement les résultats qui précèdent.

Consigne de 135 tr/min

Si G = 8,25 ou 1,48 une consigne en échelon de 135 tr/min permet d'obtenir les évolutions ci-dessous.





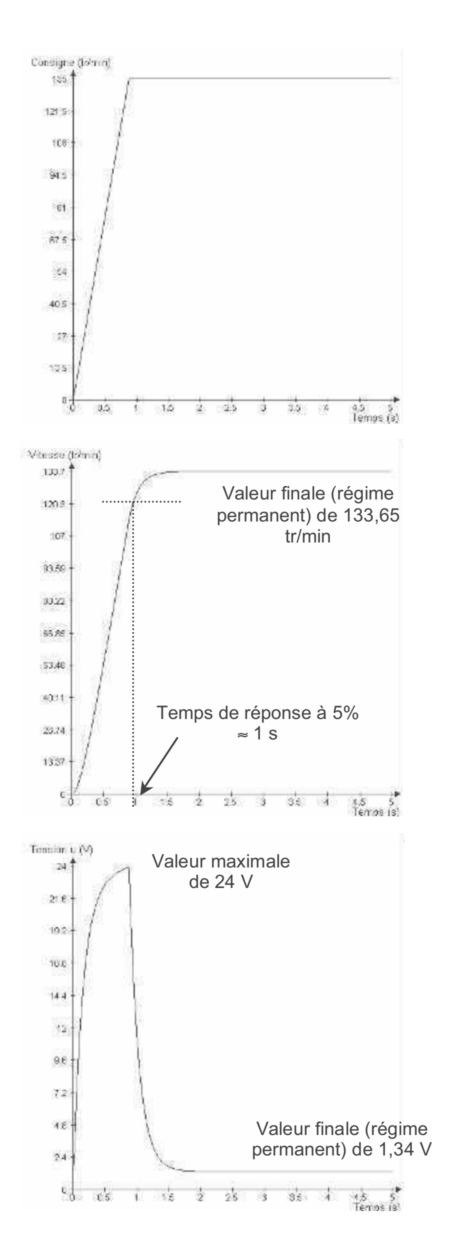
On observe, sur les courbes précédentes, les résultats établis :

Pour G=8,25 :

- les valeurs en régime permanent de la vitesse (correspondant à une erreur acceptée de 1%) et de la tension ;
- la valeur initiale de la tension, bien trop forte.

Pour G = 1,48 :

- une erreur plus forte sur la vitesse (valeur finale plus faible) et un système beaucoup plus lent (cf. temps de réponse à 5% multiplié par cinq)
- mais en revanche une valeur initiale de la tension (24V) qui préserve le convertisseur.

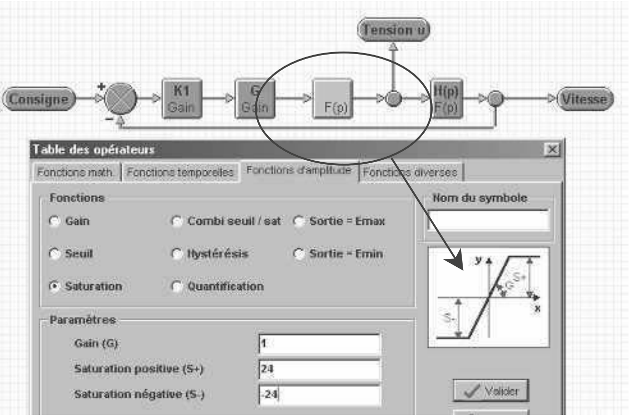


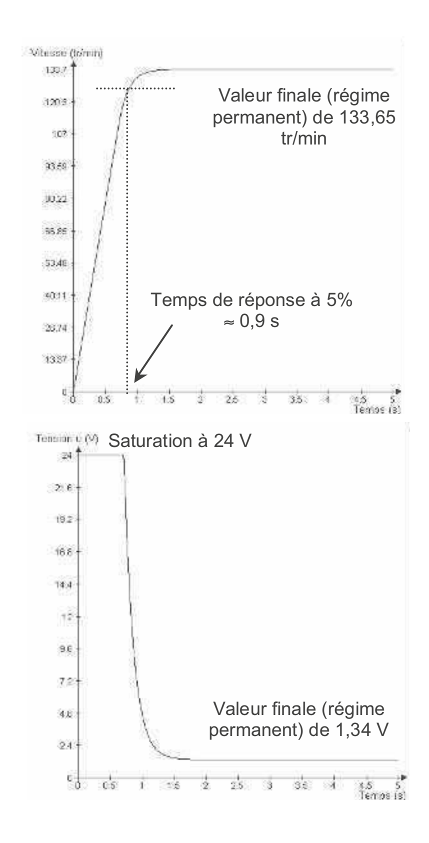
La consigne en rampe de pente 154,16 $(tr/min).s^{-1}$ pendant 0,88 s, puis maintien à 135 tr/min, permet de conserver le gain G = 8,25 assurant la précision de 1%, tout en préservant le convertisseur. Ceci est traduit par les courbes ci-contre :

La tension, qui évolue proportionnellement à l'erreur, est croissante lors de la phase de commande en rampe, puis décroît très rapidement jusqu'à atteindre la valeur qui permet la rotation à 133,65 tr/min.

On peut noter une rapidité (cf. temps de réponse à 5% de l'ordre de 1 s) bien supérieure à celle obtenue en diminuant le gain G pour conserver une entrée en échelon.

La dernière solution proposée, qui consiste à saturer l'alimentation du convertisseur à sa valeur maximale admissible (24V), peut-être simulée par introduction d'un bloc fonctionnel adéquat :





On peut ainsi conserver l'entrée en échelon, qui est plus simple à piloter que la rampe, tout en maintenant la valeur du gain G à 8,25 pour assurer la précision. Voir les simulations ci-contre.

Aux premiers instants, l'écart est important, ce qui conduit à la saturation de la tension de commande du convertisseur.

La vitesse augmente alors selon la dynamique de l'ensemble en boucle ouverte (accélération maximale permise par la tension de 24V) jusqu'à ce que l'écart soit suffisamment faible pour que la tension soit inférieure à 24V.

Alors, et donc seulement dans cette deuxième phase, la vitesse évolue selon la dynamique de l'ensemble asservi et le régime permanent est donc, bien entendu, le même qu'en absence de saturation, en particulier en termes de précision.

Par ailleurs, la saturation ralentit certes le système, mais légèrement moins que la montée en rampe (temps de réponse à 5% de 0,9 s au lieu de 1 s). Cette solution est donc celle, parmi les solutions qui préservent le convertisseur, qui offre à la fois la meilleure précision et la plus grande rapidité.

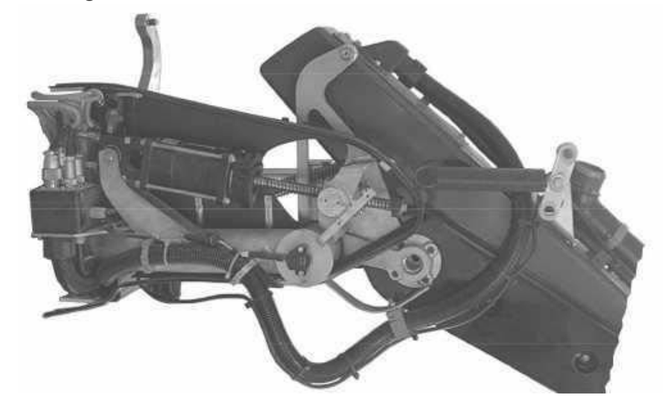
VI - BRAS MAXPID

L'objectif de cet exercice est principalement de mettre en évidence diverses non linéarités (saturation, seuil, saut) existant au sein d'un système d'asservissement en position angulaire.

VI-1 Présentation

Le bras MAXPID, proposé à l'équipement des laboratoires de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur des classes préparatoires scientifiques par la société Didastel (http://www.didastel.fr) est une chaîne fonctionnelle de positionnement angulaire.

Sa cinématique originale est commune à plusieurs robots développés par la société Pellenc (http://www.pellenc.com), spécialiste de robotique agricole, comme par exemple le robot Planeco ci-contre (document Didastel).





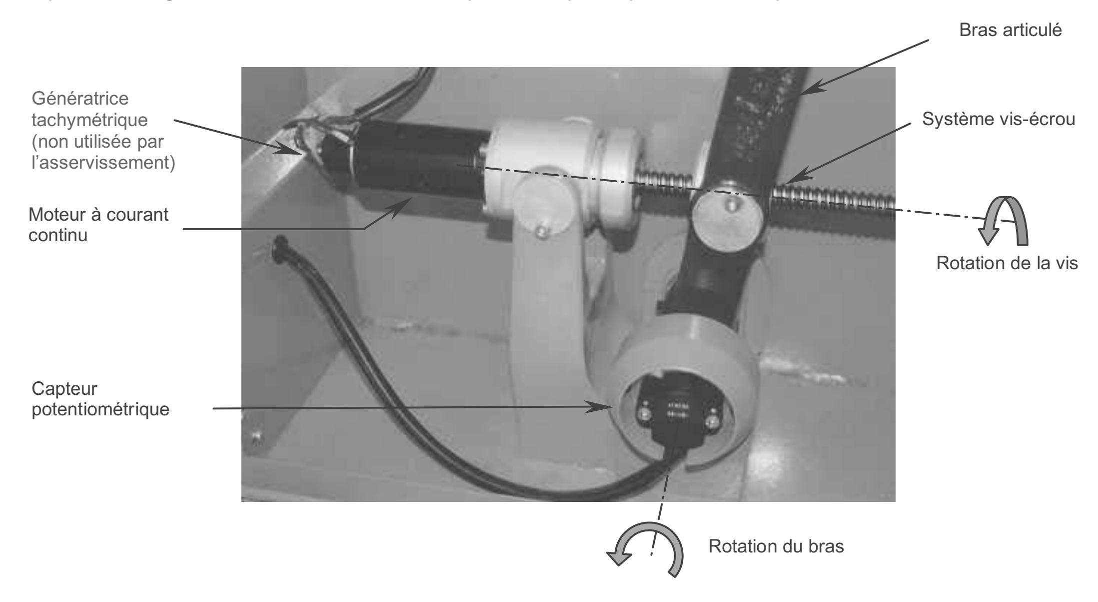


Dans sa version pédagogique, le système est piloté à partir d'un ordinateur via un logiciel spécifique qui permet également l'acquisition et la mise en forme des principales grandeurs caractéristiques de l'asservissement.

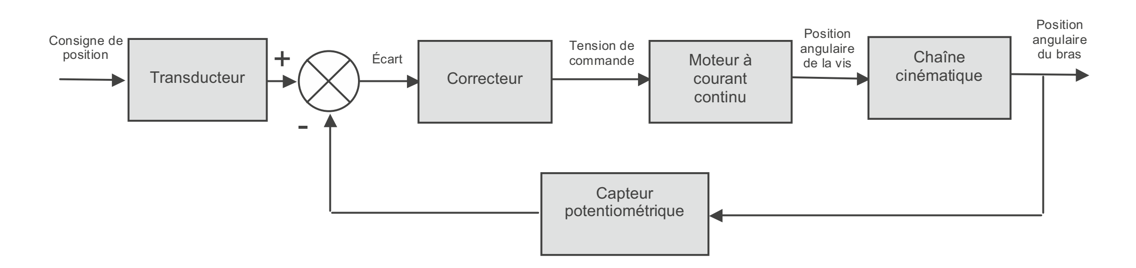
■ La partie opérative est constituée :

- d'un moteur électrique à courant continu (actionneur),
- d'un système de transformation de mouvement par système vis-écrou à billes (transmetteur),
- du bras articulé (effecteur).

La position angulaire du bras est mesurée par un capteur potentiométrique.



Par ailleurs, on peut noter qu'une génératrice tachymétrique accouplée au moteur permet d'avoir accès à la rotation de la vis, liée au rotor. Pour autant <u>cette information n'est pas utilisée par l'asservissement</u> mais uniquement pour les mesures expérimentales : elle est envoyée directement au logiciel d'acquisition de l'ordinateur. Il s'agit donc uniquement d'un asservissement de position angulaire du bras, décrit par le schéma bloc :

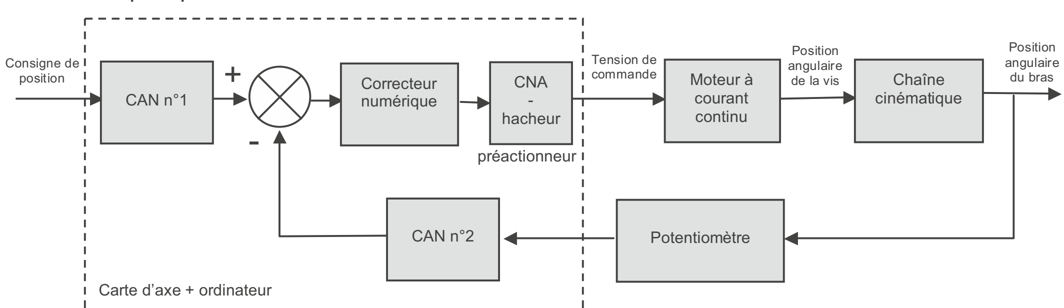


■ Ce schéma passe sous silence certains codages d'information. En effet, le comparateur et le correcteur étant entièrement numériques, il convient de réaliser certaines conversions :

- le transducteur est un convertisseur analogique numérique (CAN n°1) qui convertit la consigne en une image numérique,

- le capteur potentiométrique est la mise en série du potentiomètre proprement dit, qui convertit la position angulaire du bras en une tension, et d'un convertisseur analogique numérique (CAN n°2) qui convertit cette tension en une image numérique, comparable avec la précédente,
- le correcteur numérique doit être suivi d'un troisième convertisseur, cette fois numérique analogique (CNA), qui élabore la tension d'alimentation du moteur à partir du signal numérique de sortie du correcteur, via un hacheur. Il joue donc le rôle également de préactionneur.

Un schéma plus précis est donc :



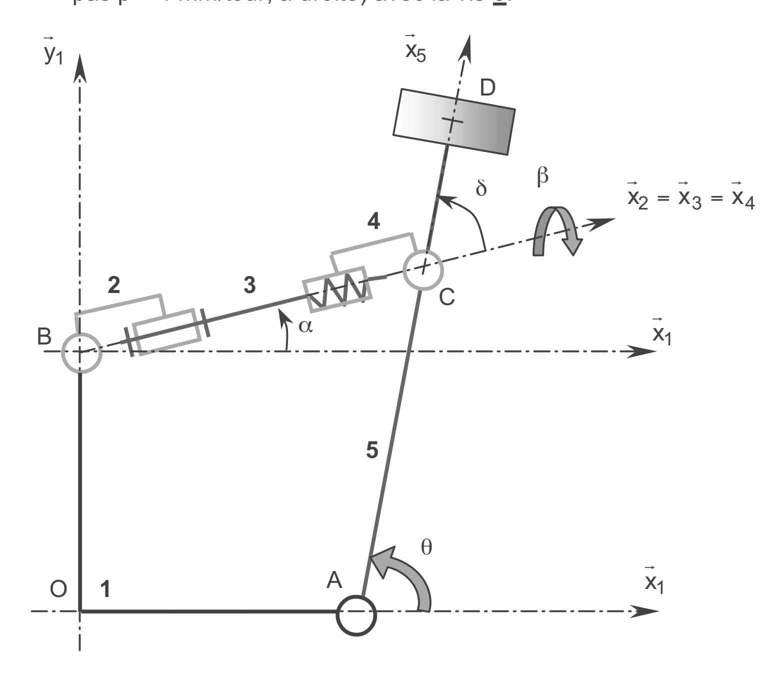
La carte d'axe, située dans le caisson du système, rassemble les différents éléments de conversion (CAN et CNA), la conversion de puissance pour le moteur, intégrée dans le CNA (hacheur) et le correcteur numérique, qui est paramétrable depuis l'ordinateur.



Par ailleurs, l'ordinateur permet également la saisie de la consigne ainsi que l'acquisition et l'affichage de données : angle du bras, angle de la vis, grandeurs électriques.

■ La chaîne cinématique, quant à elle, peut être définie par le schéma ci-dessous où l'on reconnaît :

- la vis **3** entraînée par le moteur, dont la position angulaire est notée β ;
- le corps **2** du moteur, articulé par rapport au bâti **1** (angle α) ;
- le bras **5** dont la position angulaire θ par rapport au bâti est la grandeur asservie ;
- l'écrou **4**, articulé par rapport au bras **5** (angle δ) et, bien entendu, en liaison hélicoïdale (de pas p = 4 mm/tour, à droite) avec la vis **3**.



OA = a = 70 mm
OB = b = 80 mm
AC = c = 80 mm

Notons, pour information, que des masses M, de centre d'inertie D, peuvent être disposées à l'extrémité du bras pour simuler une charge.
On pose AD = d, réglée à la valeur 275 mm.



VI-2 Travail demandé

<u>Question 1 :</u> caractéristique du codage et de la mesure

Les constantes de temps mises en jeu permettent de négliger les temps de réponse des blocs de codage, ainsi que du potentiomètre.

Le transducteur d'entrée peut donc être caractérisé par un essai en régime permanent, le temps n'intervenant pas dans sa caractéristique.

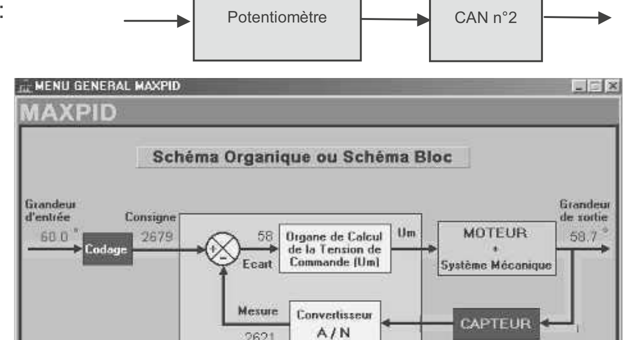
CAN n°1

Il en va de même pour la chaîne de retour :

Potentiomètre → CAN n°2

Le logiciel de pilotage permet d'accéder, pour diverses positions commandées du bras, à :

- un rappel de la consigne angulaire (grandeur d'entrée) : ci-contre 60°
- le codage de cette consigne : ci-contre 2679 incréments
- la position angulaire effective (grandeur de sortie) : ci-contre 58,7°
- le codage de cette position (mesure) : ci-contre 2621 incréments
- l'écart codé : ci-contre 2679-2621=58.



Plusieurs relevés peuvent être effectués et sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

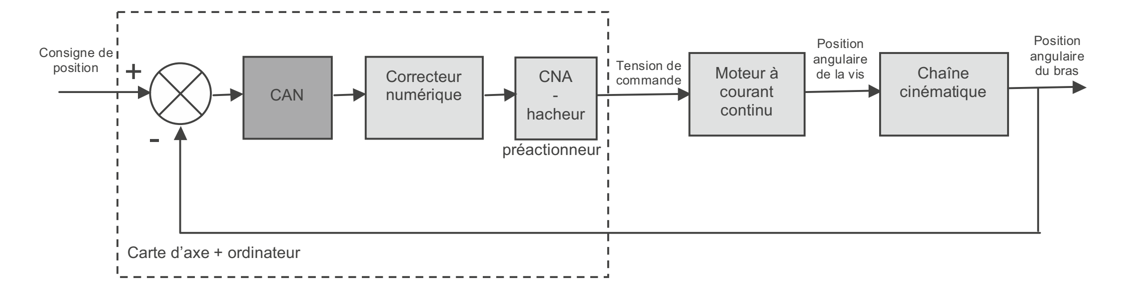
Entrée (°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Consigne	87	519	951	1383	1815	2247	2679	3111	3544	3976
Sortie (°)	-1,7	7,2	17,15	27,8	38,1	48,5	58,7	68,8	79,1	90,5
mesure	13	397	841	1289	1733	2181	2621	3061	3505	3997

11) Déduire de ces mesures les caractéristiques du transducteur d'entrée et celui de la chaîne de retour. Qu'observe-t-on ? Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

12) Quel est le gain de cette conversion et donc la précision (résolution) du codage ?

13) Ces caractéristiques présentent une non linéarité. Quel est ce type de non linéarité ?

14) Justifier que l'asservissement peut être décrit à l'aide d'un retour unitaire comme ci-dessous.
Quelle est la caractéristique du bloc de conversion CAN ? Est-elle linéaire ?

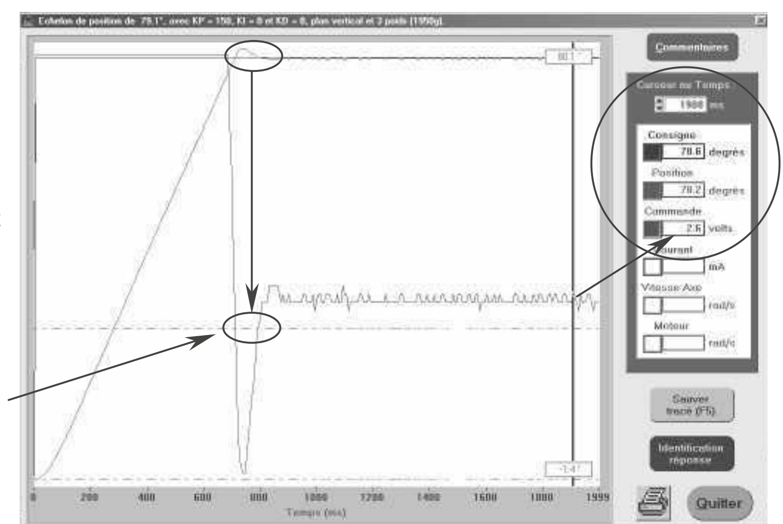


<u>Question 2 :</u> modélisation de l'ensemble {CNA, hacheur}

Dorénavant le réglage du correcteur est effectué sur un simple gain $\mathbf{K_p = 150}$.

Un second relevé va permettre de déterminer la caractéristique du bloc {CNA, hacheur} qui élabore la tension de commande du moteur. Comme pour la question précédente, les temps de réponse du codage et du hacheur sont suffisamment faibles pour pouvoir être négligés. On peut donc les caractériser en mesurant tout simplement un certain nombre de couples (écart, tension de commande). Ceci peut être obtenu à partir d'un essai de réponse à un échelon comme ci-dessous.

La consigne est de 78,6°. On y relève l'évolution temporelle de la position et de la tension de commande. Par exemple, à l'instant (1908 ms) où se trouve placé le curseur, on lit une position de 78,2° et une tension de commande 2,6 V.



NB : Il est intéressant de vérifier sur ce relevé que lorsque l'écart est nul, la tension de commande l'est également.

En déplaçant le curseur à plusieurs instants quelconques, on relève les points suivants :

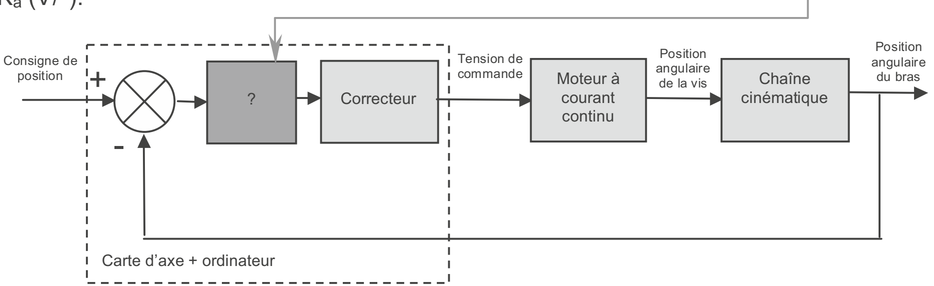
Temps (ms)	200	374	719	960	1113	1265	1576
Consigne (°)	78,6	78,6	78,6	78,6	78,6	78,6	78,6
Position (°)	17,5	38,7	79,4	78,2	78,4	78,3	78,2
Tension (V)	21,1	21,1	-5,1	2,6	1,3	2,0	2,6

Une manipulation inverse permettrait de vérifier que l'évolution est symétrique, la tension étant limitée à l'intervalle ± 21,1 V.

21) Proposer un modèle pour la caractéristique du bloc {CNA, hacheur}.
Cette caractéristique présente une non linéarité : quel est ce type de non linéarité ? Quel en est l'intérêt ici ?

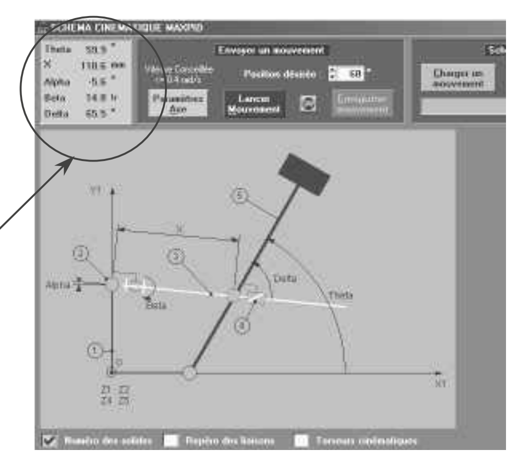
22) Préciser le domaine d'écart dans lequel le comportement est linéaire.

23) Regrouper alors les réponses aux questions précédentes pour représenter l'asservissement selon le schéma bloc ci-dessous. Dans son domaine linéaire, le gain du bloc fictif introduit sera noté K_a (V/°).



Question 3 : caractéristique de la chaîne cinématique et linéarisation

Le paramètre d'entrée de la chaîne cinématique est l'angle β de rotation de la vis par rapport au moteur. Le paramètre de sortie est l'angle θ. La position origine de la vis est choisie par β = 0 lorsque θ = 0.



31) La chaîne cinématique peut être caractérisée en relevant, pour diverses positions du bras, le couple (β,θ) auquel le système donne accès.

On relève le tableau de mesures suivant :

θ (°)	0	9,5	19,5	29,6	39,6	49,6	59,9	69,6	79,7	90
β (tr)	0	1,7	3,8	6,2	8,8	11,7	14,8	18,0	21,4	25

Tracer la caractéristique du bloc « chaîne cinématique ».

À partir d'une régression linéaire dans l'intervalle de position angulaire [30°,90°], proposer un modèle linéaire donnant θ comme fonction de β autour du point de fonctionnement défini par la position θ = 60°, θ variant de ± 30° autour de cette valeur.

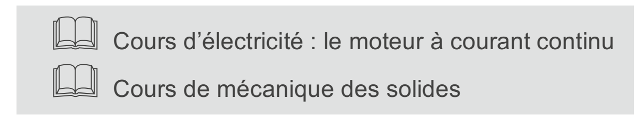
 Fiche ressource "droite des moindres carrés"

32) On se propose, à titre de complément, de retrouver le résultat précédent à partir d'un modèle de connaissance :

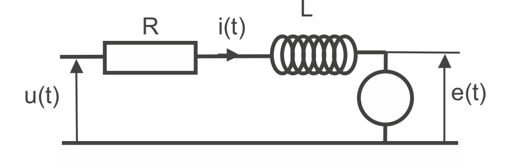
- Déterminer analytiquement la relation qui lie θ et β en fonction des différents paramètres géométriques constants. Il sera plus aisé d'exprimer β comme fonction de θ.
- Tracer cette fonction et vérifier la concordance avec les mesures précédentes.
- Vérifier le modèle de comportement établi précédemment à partir d'un calcul de la dérivée de cette fonction pour θ = 60°.

Question 4 : modélisation de la motorisation en évolution horizontale

Le moteur est un moteur électrique à courant continu dont les caractéristiques sont fournies page suivante (documentation constructeur, www.maxonmotor.com). On rappelle que le fonctionnement d'un tel moteur est régi par les équations suivantes (sous réserve d'hypothèses simplificatrices usuelles) :


Cours d'électricité : le moteur à courant continu
Cours de mécanique des solides

- L'équation électrique (loi d'Ohm dans le circuit d'induit), liant la tension d'alimentation u(t) à l'intensité du courant de commande i(t), s'obtient classiquement sachant que l'induit peut être modélisé comme une résistance R en série avec une inductance L et une force électromotrice e(t) :



$$u(t) - e(t) = R\, i(t) + L \frac{di}{dt}(t)$$

- L'équation mécanique s'obtient en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble de la chaîne cinématique entraîné par le rotor tournant à la vitesse (pulsation) $\omega(t)$, soumis à un couple électromagnétique $c_m(t)$ et un couple résistant $c_r(t)$:

  $$c_m(t) - c_r(t) = J\,\frac{d\omega}{dt}(t)$$

  où J est l'inertie de l'ensemble des parties mobiles, ramenée sur le rotor.
- Les équations de couplage électromécanique s'écrivent :

  $c_m(t) = K_c\, i(t)$

  $e(t) = K_v\, \omega(t)$

  où K_C et K_V sont des constantes, appelées respectivement constante de couple et constante de vitesse.

Programme Stock / Programme Standard / Programme Spécial (sur demande!)		Numéros de commande				
		118776	118777	118778	118779	118780
Caractéristiques moteur						
1 Puissance conseillée	W	90	90	90	90	90
2 Tension nominale	Volt	15.0	30.0	42.0	48.0	48.0
3 Vitesse à vide	tr / min	7070	7220	7530	7270	6650
4 Couple de démarrage	mNm	872	949	1070	966	878
5 Pente vitesse / couple	tr / min / mNm	8.45	7.77	7.17	7.63	7.68
6 Courant à vide	mA	245	124	93	77	69
7 Courant de démarrage	A	44.9	24.4	20.3	15.5	12.9
8 Résistance aux bornes	Ohm	0.334	1.23	2.07	3.09	3.72
9 Vitesse limite	tr / min	8200	8200	8200	8200	8200
10 Courant permanent max.	A	4.00	2.74	2.15	1.78	1.63
11 Couple permanent max.	mNm	77.7	107	113	111	111
12 Puissance max. fournie à la tension nom.	W	152	175	206	181	150
13 Rendement max.	%	81	84	86	85	85
14 Constante de couple	mNm / A	19.4	38.9	52.5	62.2	68.0
15 Constante de vitesse	tr / min / V	491	246	182	154	140
16 Constante de temps mécanique	ms	6	5	5	5	5
17 Inertie du rotor	gcm²	65.5	65.5	69.6	65.0	64.5
18 Inductivité	mH	0.09	0.34	0.62	0.87	1.04
19 Résistance therm. carcasse / air ambiant	K / W	6.2	6.2	6.2	6.2	6.2
20 Résistance therm. rotor / carcasse	K / W	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
21 Constante de temps thermique du bobinage	s	27	27	29	27	27

41) Lire dans la documentation, les valeurs des constantes R, L, K_v, K_c.
Comparer alors K_v et K_c. Que peut-on en conclure en termes énergétiques ?

NB : la valeur de l'inertie équivalente J ne peut bien entendu pas être lue dans cette documentation, car il s'agit de l'inertie de ***l'ensemble*** de la chaîne cinématique. La valeur indiquée en ligne 17 par le constructeur (69,6 g.cm^2 = 0,696 10^{-5} kg.m^2) n'est que la contribution du rotor du moteur à cette inertie. La détermination de celle-ci, si nécessaire, devra se faire, soit par un modèle de connaissance plus ou moins élaboré issu de la mécanique, soit à partir d'un modèle de comportement issu d'essais. Ceci sera réalisé lors des exercices du chapitre 4.

Fiche ressource "inertie équivalente"

42) La modélisation recherchée se limite à la situation où le bras Maxpid évolue **horizontalement**. Aussi, la pesanteur n'intervient pas dans l'équation mécanique : le couple résistant $c_r(t)$ n'est dû qu'aux différents frottements. On se propose de le modéliser comme la somme :

- d'un couple provenant des divers frottements secs $c_f(t) = C_{f0}$, constant ;
- d'un couple de frottements visqueux de la forme $f\omega(t)$, proportionnel à la vitesse de rotation du rotor.

Soit $c_r(t) = C_{f0} + f\omega(t)$

Traduire alors, sous forme de schéma bloc, le fonctionnement du moteur dans cette situation.

43) Établir, dans le domaine de Laplace, la relation qui lie la vitesse de rotation $\Omega(p)$ du moteur, transformée de $\omega(t)$, aux transformées $U(p)$ et $C_f(p)$ de sa tension d'alimentation $u(t)$ et du couple de frottements secs $c_f(t)$.

Question 5 : comportement du moteur en régime permanent

Dans cette question, on s'intéresse uniquement au comportement en régime permanent, le bras évoluant toujours horizontalement.

51) Établir la relation qui donne, en régime permanent, la vitesse de rotation du moteur soumis à une tension d'alimentation constante U_0 et à un couple de frottements secs C_{f0} également constant.

Un essai en boucle ouverte du système peut être réalisé en coupant la boucle de retour. Il existe en effet sur le boîtier de commande un bouton prévu à cet effet.



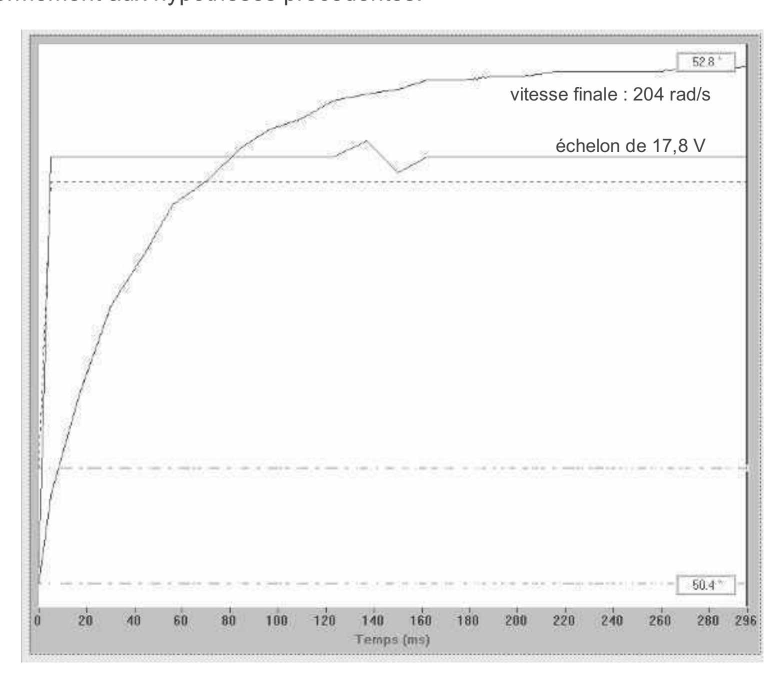
Il est alors possible de soumettre le moteur à des échelons de tension et de relever l'évolution de la vitesse de rotation du rotor renvoyée par la génératrice tachymétrique. Les essais sont effectués en évolution horizontale afin qu'aucun couple autre qu'un couple de frottements n'agisse sur le système, conformément aux hypothèses précédentes.

Un relevé type est donné ci-contre, par exemple pour un échelon de tension de 17,8 V.

La durée en l'essai est en pratique vite limitée par l'arrivée en butée du bras.

On constate que pour une tension de 17,8 V, la vitesse de rotation en régime permanent est de 204 rad/s.

Les essais sont répétés et permettent de remplir le tableau de valeurs ci-dessous, qui lie la tension de commande à la valeur atteinte par la vitesse en régime permanent.



Tension (V)	7,5	10,4	12,2	14,4	17,8	19,3	21,1 (saturation)
Vitesse (rad/s)	76	112	135	157	204	223	249

52) Vérifier la validité du modèle établi à la question 51 par rapport aux résultats expérimentaux et déterminer les valeurs :

- du couple de frottements secs C_{f0}
- du coefficient de frottements visqueux f.

53) Ces essais ont été effectués avec une tension positive. On peut supposer un comportement symétrique du moteur dans le cas d'une tension négative, conduisant à une inversion du sens de rotation.
Donner alors la courbe caractéristique entière du moteur (vitesse de rotation en régime permanent en fonction de la tension d'alimentation).

54) Sur cette courbe, ajouter la caractéristique idéale du moteur en l'absence de frottements. Quels sont les deux effets notables des frottements sur le moteur que l'on peut alors lire sur ce graphe ?

55) Sur le schéma bloc établi à la question 42 traduisant le fonctionnement du moteur, indiquer numériquement toutes les grandeurs dans les deux situations particulières suivantes :

- fonctionnement en régime permanent sous une tension d'alimentation de 17,8 V
- situation limite où la vitesse du rotor est annulée.

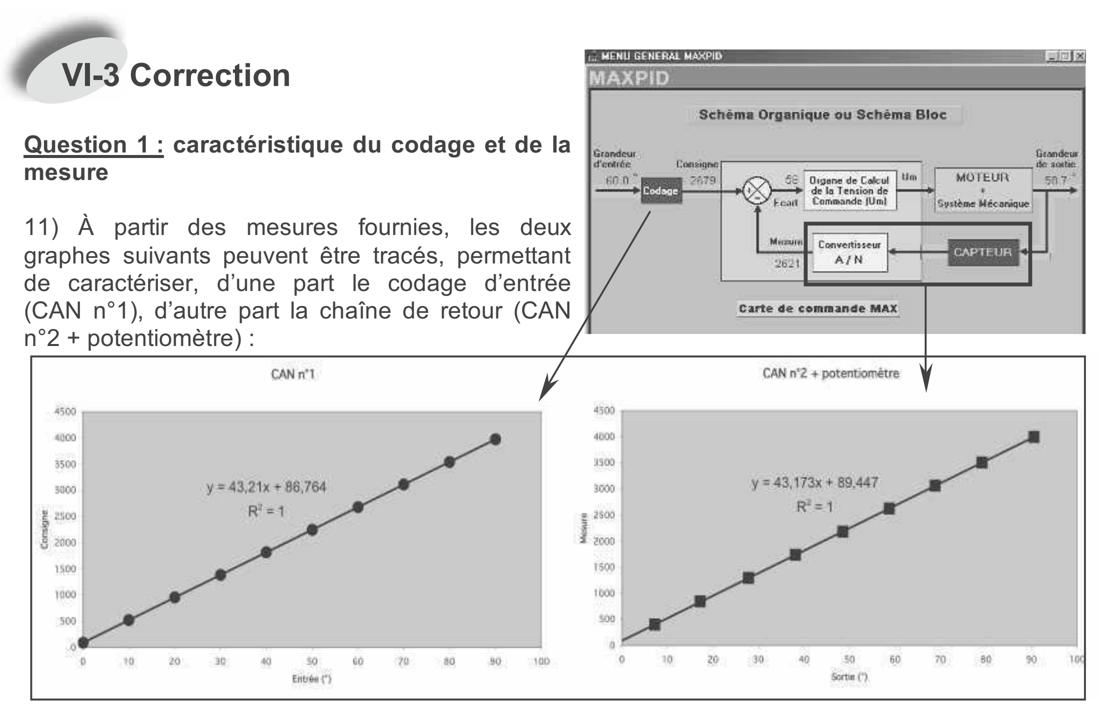
<u>Question 6 :</u> bilan

Établir, compte tenu de tous les résultats précédents, une modélisation <u>linéaire</u> du bras MAXPID en évolution horizontale autour du point de fonctionnement θ = 60°, sous forme d'un schéma bloc.

VI-3 Correction

<u>Question 1 :</u> caractéristique du codage et de la mesure

11) À partir des mesures fournies, les deux graphes suivants peuvent être tracés, permettant de caractériser, d'une part le codage d'entrée (CAN n°1), d'autre part la chaîne de retour (CAN n°2 + potentiomètre) :



Une régression affine par la méthode des moindres carrés, permet, comme indiqué sur les tracés précédents, d'estimer ces caractéristiques à :



Consigne ≈ 43,2 x entrée (°) + 87
Mesure ≈ 43,2 x sortie (°) + 89

Ceci avec un excellent coefficient de corrélation puisqu'il est quasiment égal à un.

Ces caractéristiques peuvent donc être considérées comme **identiques**, ce qui, classiquement, autorise la **comparaison** au niveau du comparateur. On pouvait s'attendre à ce résultat.

12) On y lit un gain de codage de 43,2 incréments par degré, ce qui assure une précision (résolution) de codage de 1/43,2 = ≈ **2,3 10^{-2} degré par incrément**.
Cette résolution correspond à la plus petite variation d'angle (de consigne ou effectif) évaluable par le codage.

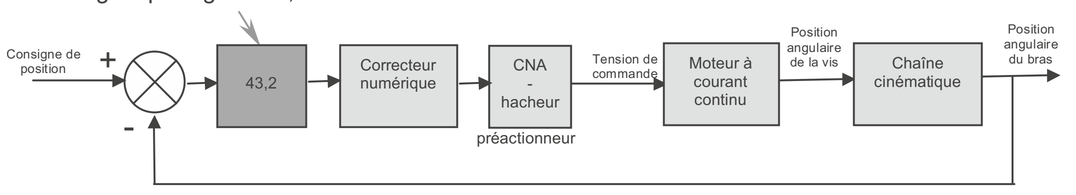
13) On peut noter l'existence d'un **offset** puisqu'un angle nul n'est pas codé par une valeur nulle. Cet offset correspond à une non linéarité de type **saut**.

14) Cet offset est mesuré respectivement à 87 et 89 pour la consigne et la mesure. Ces deux valeurs sont très proches et peuvent être considérées comme étant égales, puisque la différence de deux incréments correspond à un très petit angle de seulement 4,6 10^{-2} degré.

Ainsi, par différence, cet offset commun n'intervient pas dans le codage de l'écart qui s'écrit donc linéairement selon :

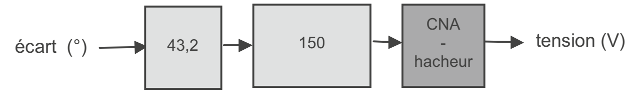
$$\text{Écart} \approx 43{,}2 \times [\text{entrée } (°) - \text{sortie } (°)]$$

Et donc l'asservissement peut être décrit à l'aide du schéma à retour unitaire ci-dessous, où le bloc CAN un gain pur égal à 43,2.



<u>Question 2 :</u> modélisation de l'ensemble {CNA, hacheur}

21) Le correcteur est réglé sur un simple gain K_p=150, l'élaboration de la tension de commande se fait alors selon :



La mesure associée de la tension de commande et de l'écart angulaire permet donc d'avoir accès à la caractéristique de l'ensemble {CNA, hacheur}.

À partir des mesures fournies, on trace ainsi la courbe donnant la tension en fonction de l'écart. On peut regretter que les quelques points relevés ne couvrent pas un domaine d'écarts uniformément répartis. Malgré tout, ces quelques points permettent de clairement identifier deux zones :

Tension

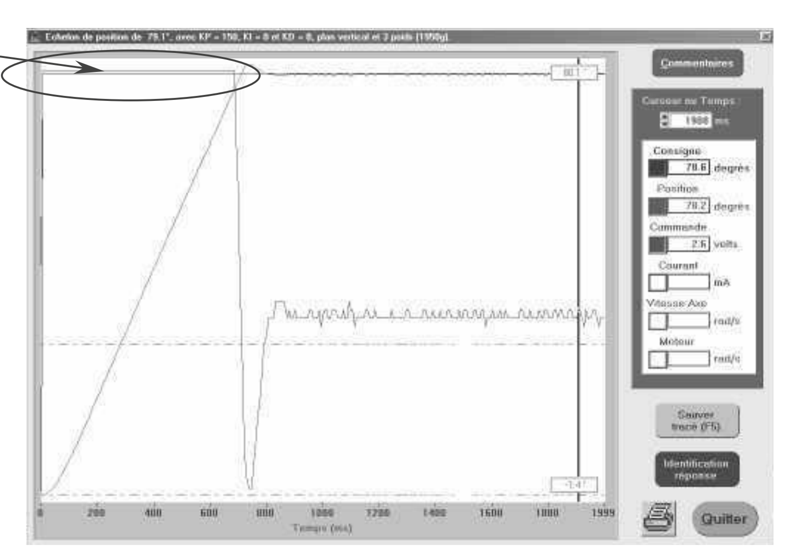
tension (V)

écart (°)

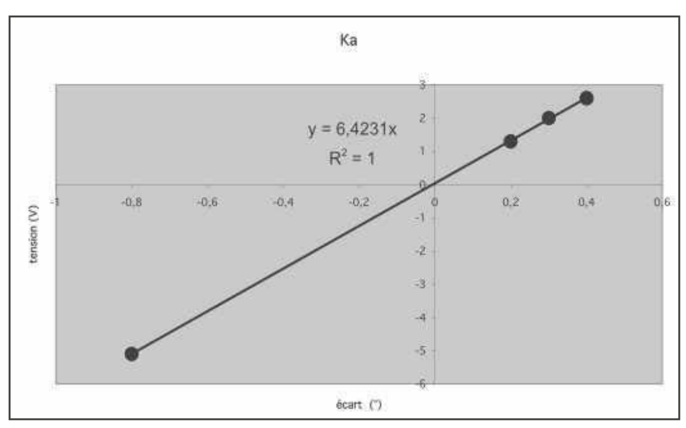
Zone non saturée

- une **saturation** de la tension à la valeur 21,1 V :

NB : cette saturation était déjà bien visible pour les forts écarts sur le relevé expérimental.



- dans la zone non saturée (ci-contre un zoom dans cette zone sur les quelques points de mesure), une **évolution linéaire** de la tension en fonction de l'écart.



Dans cette zone linéaire, une régression permet d'estimer la pente à 6,423 V/° avec un excellent coefficient de corrélation.

Soit, pour le bloc {CNA, hacheur} seul, une pente de :

6,423 / (150 x 43,2) ≈ 10^{-3} V / inc.

écart (°) → 43,2 → 150 → CNA - hacheur → tension (V)

Si on admet la symétrie de la caractéristique du bloc proposée par l'énoncé, celle-ci présente donc une **zone linéaire** de pente 10^{-3} V/inc, et **deux saturations** à ± 21,1 V.

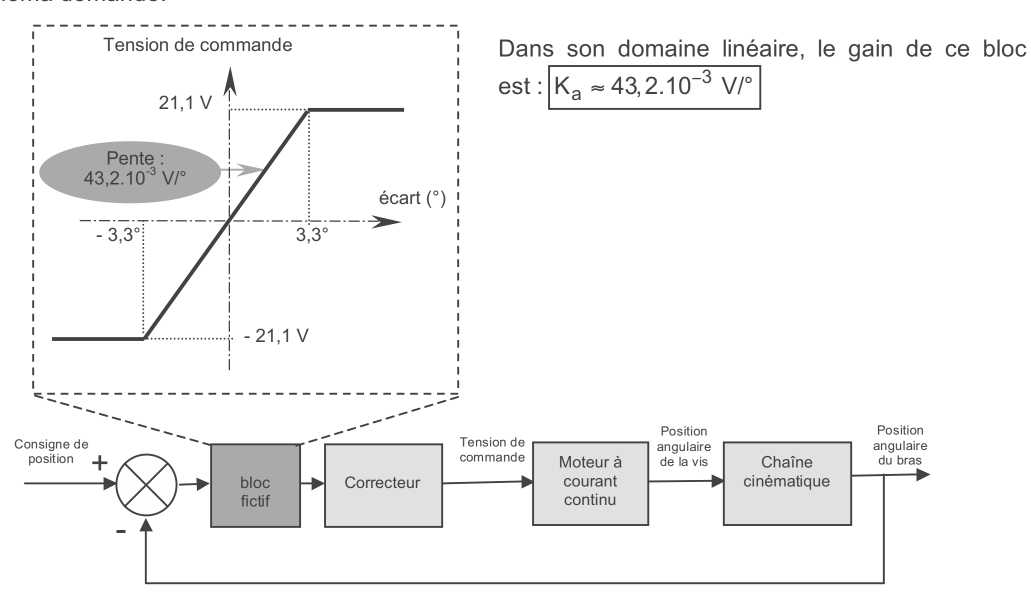
Tension de commande
21,1 V
Pente : 10^{-3} V/inc.
commande en inc.
140 inc correspondant à 3,3°
- 21,1 V

Ces saturations permettent de **protéger** le moteur d'une tension trop importante.

22) Compte tenu de la pente et de la saturation, il vient, en extrapolant, que la zone linéaire se situe pour des écarts compris dans l'intervalle **± 3,3 °**.

$$\text{En effet : } 3,3(°) = \frac{21,1(V)}{10^{-3}(V/inc) \times 150 \times 43,2(inc/°)}$$

23) On peut alors regrouper les blocs de codage (gain 43,2 inc/°) et le bloc {CNA, hacheur} selon la caractéristique ci-dessous, introduisant un bloc fictif permettant de décrire l'asservissement selon le schéma demandé.



Dans son domaine linéaire, le gain de ce bloc est : $\boxed{K_a \approx 43{,}2.10^{-3}\ \text{V/°}}$

<u>Question 3 :</u> caractéristique de la chaîne cinématique et linéarisation

31) À partir du tableau de valeurs relevées, on peut tracer la caractéristique demandée.

Cette caractéristique n'est pas linéaire, toutefois, dans l'intervalle de position angulaire [30°,90°], l'approximation semble raisonnable. On peut alors effectuer une régression linéaire dans cette zone restreinte, ce qui fournit une pente :

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta\theta} \approx 0{,}31\,\text{tr}/°$$

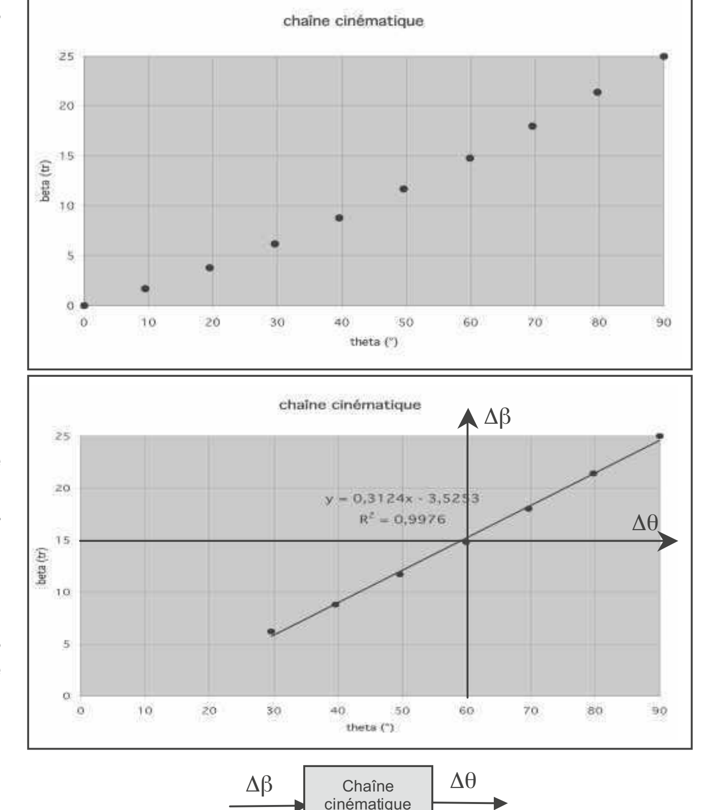
Ainsi, on peut proposer un modèle linéarisé de la chaîne cinématique (entrée β, sortie θ) autour du point de fonctionnement $\theta = 60°$, avec :

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\beta} \approx \frac{1}{0{,}31}\,°/\text{tr}$$

ou encore, si les deux angles sont exprimés dans la même unité :

$$\boxed{\frac{\Delta\theta}{\Delta\beta} \approx 9.10^{-3}}$$

En effet $\frac{1}{0{,}31} \times \frac{1}{360} \approx 9.10^{-3}$.

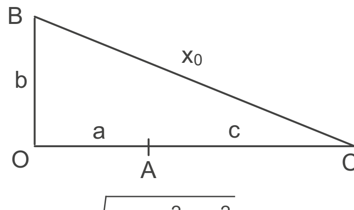


32) Posons $\overrightarrow{BC} = x\,\vec{x}_2$.

Alors, compte tenu de la liaison hélicoïdale de pas p, à droite, x et β sont liés par :

$x = -p\beta + x_0$

où x_0 est défini par la position initiale où $\beta = \theta = 0$:



soit : $x_0 = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}$

Par ailleurs, le paramètre x peut être obtenu à partir de la fermeture vectorielle :

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

qui projetée sur les directions $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$ fournit respectivement les deux équations scalaires :

$$\begin{cases} a + c\cos\theta - x\cos\alpha = 0 \\ c\sin\theta - x\sin\alpha - b = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore :} \quad \begin{cases} x\cos\alpha = a + c\cos\theta \\ x\sin\alpha = c\sin\theta - b \end{cases}$$

L'élévation au carré de ces deux équations permet, en les sommant ensuite, d'obtenir :

$x^2 = (a + c\cos\theta)^2 + (c\sin\theta - b)^2$

D'où $x = \sqrt{(a + c\cos\theta)^2 + (c\sin\theta - b)^2}$ puisque par construction x est un nombre positif.

On peut remarquer que l'on retrouve ici la valeur de x déjà établie pour $\theta = 0$, soit :

$x_0 = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}$.

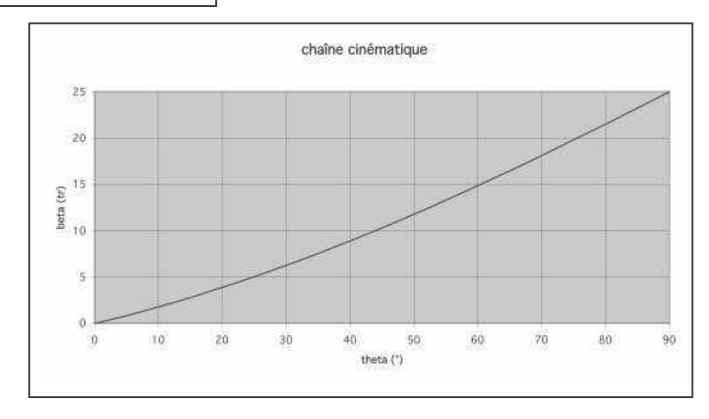
Finalement la relation cherchée entre β et θ est donc :

$\sqrt{(a + c\cos\theta)^2 + (c\sin\theta - b)^2} = -p\beta + \sqrt{(a+c)^2 + b^2}$ ou encore :

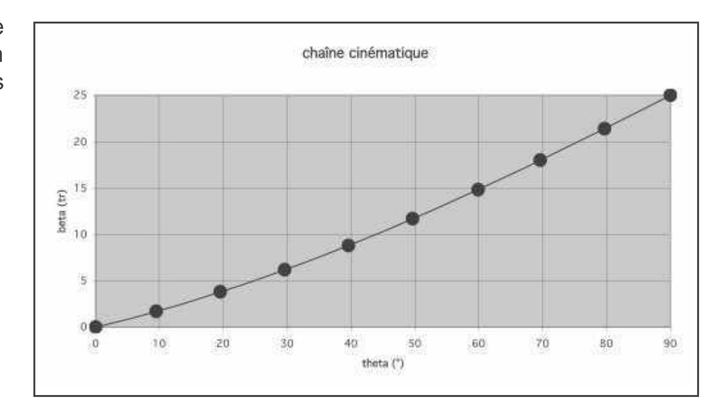
$$\boxed{\beta = \frac{1}{p}\left[\sqrt{(a+c)^2 + b^2} - \sqrt{(a + c\cos\theta)^2 + (c\sin\theta - b)^2}\,\right]}$$

qui fournit β en tours si p est en mm / tour.

Avec les valeurs numériques :
p = 4 mm/tour
a = 70 mm
b = 80 mm
c = 80 mm
on obtient le tracé ci-contre.



La concordance avec le relevé expérimental peut être vérifiée en superposant les points mesurés sur ce tracé :



À partir de la relation précédemment établie, on peut alors calculer la dérivée :

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{p}[\sqrt{(a+c)^2+b^2} - \sqrt{(a+c\cos\theta)^2+(c\sin\theta-b)^2}\,]\right] = -\frac{1}{p}\frac{d}{d\theta}\left[\sqrt{(a+c\cos\theta)^2+(c\sin\theta-b)^2}\right]$$

soit : $\dfrac{d\beta}{d\theta} = \dfrac{c}{p}\dfrac{\sin\theta(a+c\cos\theta)-\cos\theta(c\sin\theta-b)}{\sqrt{(a+c\cos\theta)^2+(c\sin\theta-b)^2}}$

Au point de fonctionnement $\theta = 60°$ et avec les différentes valeurs numériques caractéristiques :
p = 4 mm/tour
a = 70 mm
b = 80 mm
c = 80 mm

il vient : $\dfrac{d\beta}{d\theta} \approx 18{,}2$ tr/rad, soit $\dfrac{d\beta}{d\theta} \approx 18{,}2 \text{ x } \dfrac{2\pi}{360} \approx 0{,}32$ tr/°.

Ce chiffre est à comparer à $\dfrac{\Delta\beta}{\Delta\theta} = 0{,}31\,\text{tr}/°$, obtenu précédemment par une régression linéaire sur l'ensemble des points de l'intervalle [30°,90°].

La différence, très faible, entre les deux résultats tient au fait que la pente au point milieu de l'intervalle de linéarisation (notion définie par le calcul de la dérivée) n'est pas égale à la pente de la droite de régression définie sur l'intervalle entier. La méthode par régression linéaire fournit une linéarisation assez grossière, mais valable « en moyenne » sur tout l'intervalle de linéarisation, ici donc [30°,90°], alors que la méthode par calcul de la dérivée fournit une linéarisation fine, mais valable seulement pour de très petites variations autour du point de fonctionnement.

Question 4 : modélisation de la motorisation en évolution horizontale

41) On lit dans la documentation :
Ligne 8 : R = 2,07 Ω
Ligne 18 : L = 0,620 mH = 6,2 10^{-4} H
Ligne 14 : K_c = 52,5 mN.m.A^{-1} = 0,0525 N.m.A^{-1}
Ligne 15 : $1/K_v$ = 182 tr.min^{-1}.V^{-1}

Attention à la « constante de vitesse » qui n'est pas ici la constante K_v mais son inverse, comme le montre une lecture attentive des unités. La constante K_v est donc K_v = 1/182 V/(tr.min^{-1}) qu'il convient d'exprimer en unités du système international pour pouvoir la comparer à K_c, soit :

K_v = 1/182 x $\dfrac{60}{2\pi}$ = 0,0525 V/(rad.s^{-1}). Les constantes K_c et K_v sont donc **identiques**.

Ceci traduit le fait que toute la puissance électromagnétique est transformée en puissance mécanique. En effet :

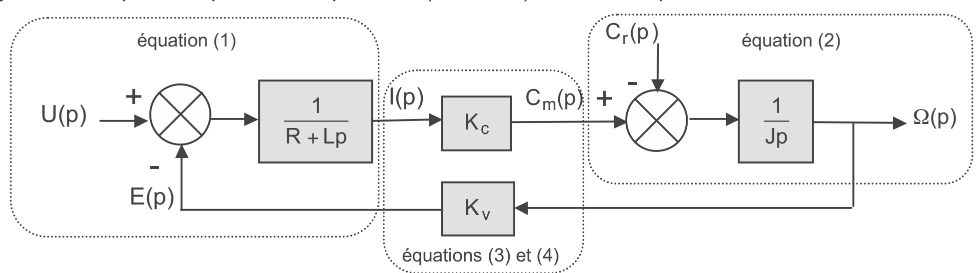
- la puissance électromagnétique s'écrit : $P_e = e.i = K_v\omega.i$
- la puissance mécanique s'écrit : $P_m = C_m.\omega = K_c i.\omega$

Il est donc clair que l'égalité des constantes traduit l'égalité de ces puissances.

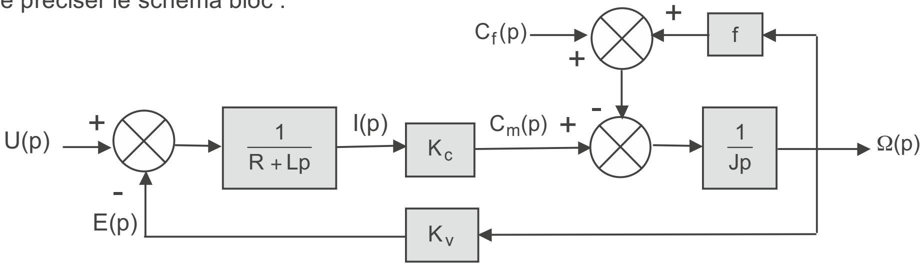
42) Sous les conditions de Heaviside, les quatre équations qui décrivent le fonctionnement du moteur se transforment dans le domaine de Laplace en :

$$\begin{cases} U(p) - E(p) = R\,I(p) + Lp\,I(p) = (R+Lp)I(p) \text{ ou encore } I(p) = \dfrac{1}{R+Lp}[U(p)-E(p)] & (1) \\ C_m(p) - C_r(p) = Jp\,\Omega(p) \text{ ou encore } \Omega(p) = \dfrac{1}{Jp}[C_m(p)-C_r(p)] & (2) \\ C_m(p) = K_c\,I(p) & (3) \\ E(p) = K_v\,\Omega(p) & (4) \end{cases}$$

Ce système d'équations peut classiquement (cf. cours) être traduit par le schéma bloc :



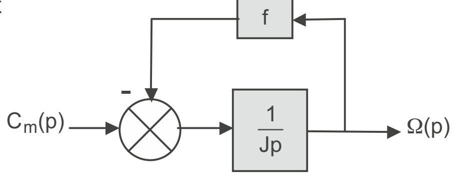
Sachant, par ailleurs, que dans les conditions de l'étude le couple résistant peut être modélisé sous la forme $c_r(t) = c_f(t) + f\omega(t)$, il vient, dans le domaine de Laplace : $C_r(p) = C_f(p) + f\Omega(p)$. Ce qui permet de préciser le schéma bloc :



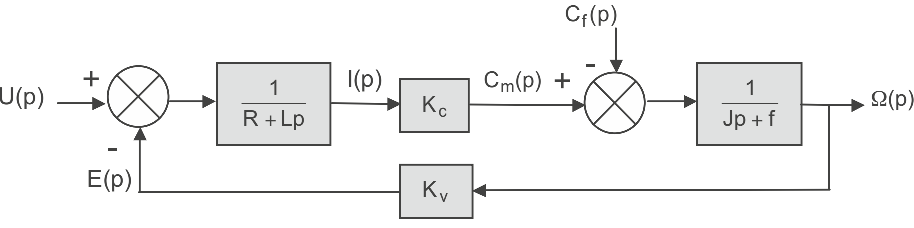
Ceci avec $C_f(p) = \dfrac{C_{f0}}{p}$ si on suppose le couple de frottements secs constant.

La boucle traduisant les frottements visqueux peut être réduite à l'aide de la formule de Black selon :

$$\frac{\Omega(p)}{C_m(p)} = \frac{\dfrac{1}{Jp}}{1+\dfrac{f}{Jp}} = \frac{1}{Jp+f}$$



Ce qui permet de simplifier le schéma bloc :



Remarque :

Ce schéma aurait pu être également établi directement en réécrivant l'équation mécanique dans le domaine temporel en tenant compte des frottements :

$$c_m(t) - c_r(t) = J\frac{d\omega}{dt}(t) \Rightarrow c_m(t) - c_f(t) - f\omega(t) = J\frac{d\omega}{dt}(t) \Rightarrow c_m(t) - c_f(t) = J\frac{d\omega}{dt}(t) + f\omega(t)$$

soit dans le domaine de Laplace : $C_m(p) - C_f(p) = (J\,p + f)\Omega(p)$, ou encore $\Omega(p) = \dfrac{C_m(p) - C_r(p)}{Jp+f}$.

43) À partir de ce schéma, et par superposition, il vient :

$$\Omega(p)=\frac{\dfrac{K_c}{(R+Lp)(Jp+f)}}{1+\dfrac{K_vK_c}{(R+Lp)(Jp+f)}}U(p)-\frac{\dfrac{1}{Jp+f}}{1+\dfrac{K_vK_c}{(R+Lp)(Jp+f)}}C_f(p)$$

ou encore :

$$\boxed{\Omega(p)=\frac{\dfrac{K_c}{K_vK_c+Rf}}{1+\dfrac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c+Rf}p^2}U(p)-\frac{\dfrac{R+Lp}{K_vK_c+Rf}}{1+\dfrac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c+Rf}p^2}C_f(p)}$$

En se souvenant que $C_f(p)=\frac{C_{f0}}{p}$ si on suppose le couple de frottements secs constant.

<u>Question 5 :</u> comportement du moteur en régime permanent

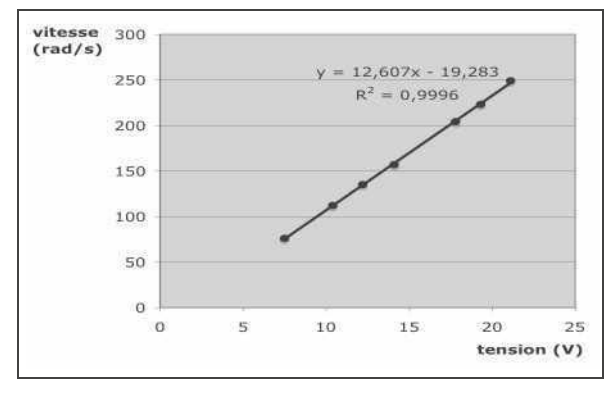
51) La relation qui donne, dans le domaine de Laplace, la vitesse de rotation du moteur soumis à une tension d'alimentation constante U_0 et à un couple de frottements secs C_{f0} également constant est, d'après la relation ci-dessus :

$$\Omega(p)=\frac{\dfrac{K_c}{K_vK_c+Rf}}{1+\dfrac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c+Rf}p^2}\frac{U_0}{p}-\frac{\dfrac{R+Lp}{K_vK_c+Rf}}{1+\dfrac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c+Rf}p^2}\frac{C_{f0}}{p}$$

La stabilité étant bien évidemment acquise (dénominateur d'ordre 2 à coefficients > 0) la vitesse en régime permanent est fournie par le théorème de la valeur finale :

$$\boxed{\omega_\infty=\lim_{p\to 0}p\Omega(p)=\frac{1}{K_vK_c+Rf}\left[K_cU_0-RC_{f0}\right]}$$

52) Les essais permettent de tracer l'évolution de la vitesse atteinte en régime permanent en fonction de la tension de commande et de procéder (ci-contre) à une linéarisation.



On observe, comme prévu par le modèle, une évolution de type affine avec un bon coefficient de corrélation et donc la loi :

$\omega_\infty \approx 12{,}6\,U_0-19{,}3$
(avec les unités V et rad/s)

Alors, procédant par identification il vient :

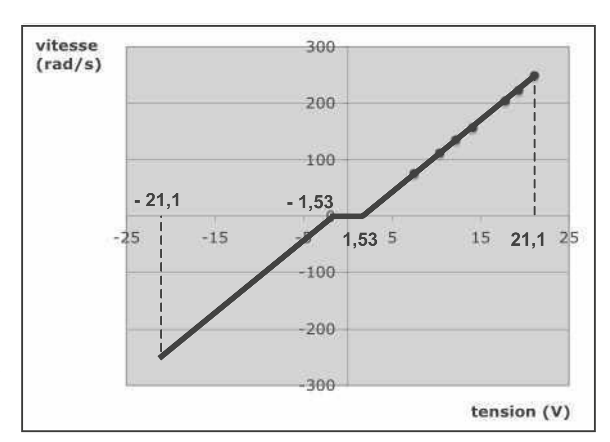
$$\frac{K_c}{K_vK_c+Rf}\approx 12{,}6\ \text{rad.s}^{-1}/\text{V} \qquad \text{et} \qquad \frac{RC_{f0}}{K_vK_c+Rf}\approx 19{,}3\ \text{rad/s}$$

Ceci permet de déterminer, en utilisant les valeurs des constantes électriques connues :

$$f=\frac{1}{R}\left(\frac{K_c}{12{,}6}-K_vK_c\right)\approx \boxed{6{,}8.10^{-4}\ \text{N.m/rad.s}^{-1}}$$

$$C_{f0}=\frac{19{,}3}{R}(K_vK_c+Rf)\approx \boxed{0{,}039\ \text{N.m}}$$

53) En tenant compte de la symétrie et de la tension limite de 21,1 V, on fournit alors ci-contre la caractéristique cherchée.



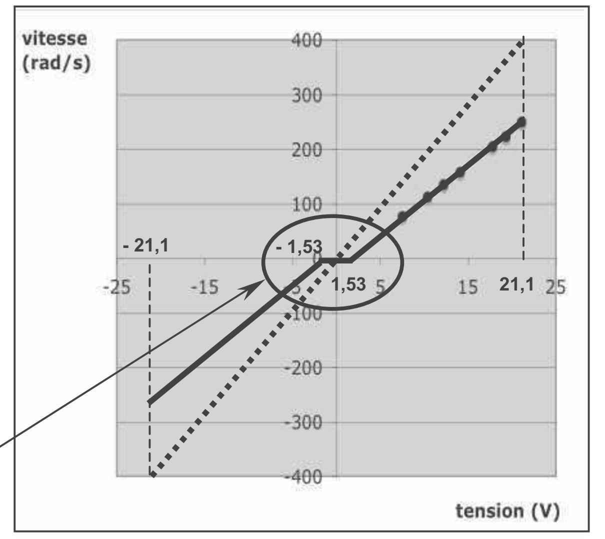
54) En l'absence de frottements, la vitesse en régime établi est tout simplement proportionnelle à la tension d'alimentation, selon la loi obtenue en prenant f et C_{f0} nuls dans la relation précédente :

$$\omega_\infty = \frac{1}{K_v} U_0 = 19{,}1\, U_0$$

toujours avec les unités V et rad/s.

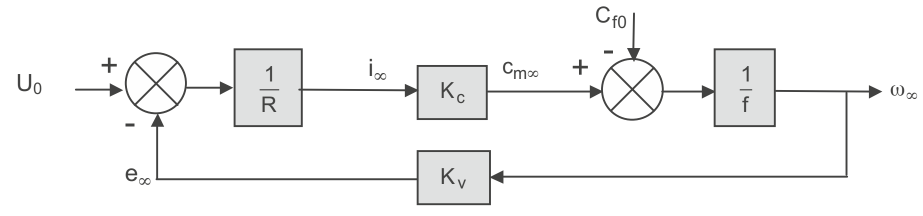
On peut alors superposer cette caractéristique idéale (en pointillé ci-contre) à la précédente due aux frottements, afin d'établir une comparaison.
Il apparaît clairement deux effets notables des frottements sur le comportement du moteur en régime permanent :

- comme on pouvait s'y attendre, un ralentissement de celui-ci ;
- un ***effet de seuil*** (non linéarité), tel qu'en dessous d'une tension d'alimentation de ±1,53 V, le moteur ne peut vaincre les frottements et la vitesse est donc nulle.



NB : Il s'agit d'un comportement en régime permanent, c'est-à-dire en quasi-statique. Bien évidemment, avec l'inertie, le moteur, alimenté sous une tension inférieure à 1,53 V, pourra continuer à tourner. Par contre, s'il est alimenté sous une tension inférieure à cette valeur seuil alors que sa vitesse est nulle, il restera à l'arrêt.

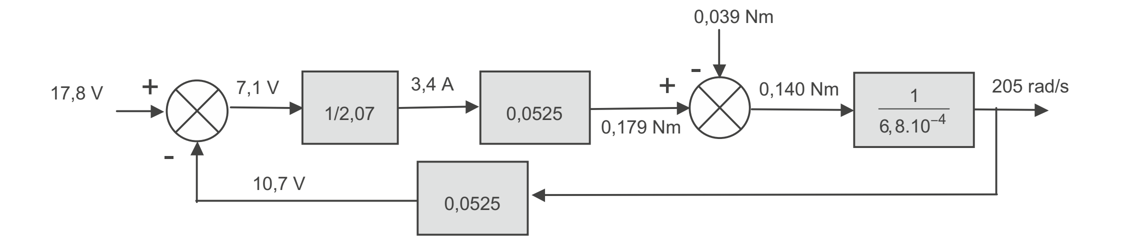
55) En régime permanent, avec des entrées constantes, le schéma bloc de l'asservissement s'obtient en annulant p dans les fonctions de transfert (théorème de la valeur finale) :



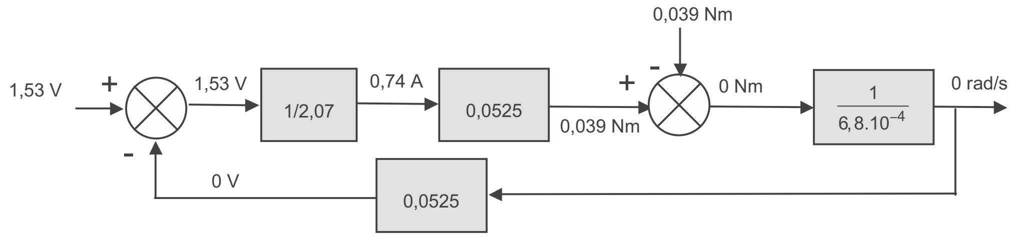
On peut vérifier qu'on y retrouve directement :

$$\omega_\infty = \frac{\frac{K_c}{Rf}}{1+\frac{K_v K_c}{Rf}} U_0 - \frac{\frac{1}{f}}{1+\frac{K_v K_c}{Rf}} C_{f0} = \frac{1}{K_v K_c + Rf}\left[K_c U_0 - R C_{f0}\right]$$

Ainsi, en régime permanent, sous une tension d'alimentation de 17,8 V, on peut vérifier la cohérence des différentes valeurs numériques (aux arrondis près) en régime permanent :

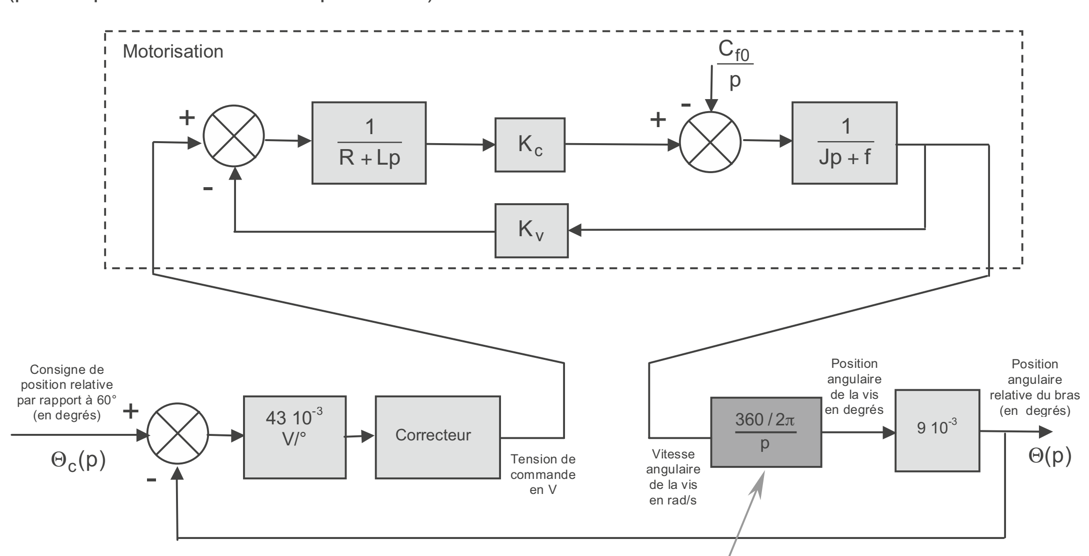


Quant à la situation où la vitesse du rotor est annulée, on peut vérifier sur le schéma ci-dessous qu'elle est bien obtenue, toujours en régime permanent, pour une tension de 1,53 V :



Question 6 : bilan

Si on rassemble les différents modèles qui ont été établis, le schéma bloc de l'asservissement, dans son domaine de fonctionnement linéaire et lorsque le bras évolue dans un plan horizontal (pas de perturbation due à la pesanteur) est :



Attention à ne pas oublier une adaptation d'unités ainsi qu'une intégration.

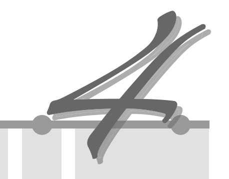
Ce modèle n'est valable que si :

- l'écart n'est pas trop important, afin que la tension de commande ne soit pas saturée ;
- la consigne n'éloigne pas trop le bras du point de fonctionnement θ = 60°, afin que le modèle linéarisé de la loi cinématique soit acceptable.

Ces deux exigences sont convergentes.

Toutes les grandeurs apparaissant dans le schéma sont connues ou ont été déterminées, à l'exception de l'inertie J qui nécessite les développements du chapitre suivant.

MODÈLES USUELS



Ce chapitre présente l'étude exhaustive du comportement temporel de trois ***modèles*** linéaires dont certains aspects ont déjà été introduits lors des exemples des chapitres précédents :

- le système intégrateur,
- le système fondamental du premier ordre,
- le système fondamental du deuxième ordre.

Il sera également l'occasion de l'étude du système à retard pur, modèle non linéaire pouvant néanmoins être décrit par une fonction de transfert.

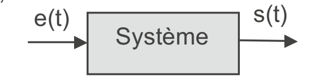
On entend par comportement temporel, la réponse de ces systèmes aux entrées canoniques que sont l'impulsion, l'échelon et la rampe, définies au chapitre 2, V-2. L'étude de la réponse à une entrée sinusoïdale, dite réponse fréquentielle, sera abordée dans le chapitre 5.

Ces modèles sont d'un usage classique pour décrire, en particulier par des modèles de comportement, les systèmes où les grandeurs varient continûment avec le temps (mécanique, électricité, hydraulique, etc.) et tout particulièrement en automatique. Par ailleurs, quand un système ne peut pas être directement décrit par un de ces modèles, il peut souvent l'être par composition de ceux-ci. Ils constituent ainsi la « boîte à outils » de base de l'ingénieur.

I - SYSTÈME INTÉGRATEUR

I-1 Définition

Le système intégrateur est le système monovariable du premier ordre, d'entrée e(t) et de sortie s(t), décrit par l'équation différentielle :



$$\frac{ds}{dt}(t) = K\, e(t)$$

où K est une constante positive appelée ***gain***, homogène au rapport des dimensions de la sortie et de l'entrée, divisé par le temps. Voir remarque concernant le gain page suivante.

Par transformation de Laplace sous les conditions de Heaviside, il vient clairement :

$$pS(p) = KE(p)$$

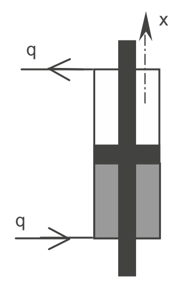
La fonction de transfert du système est donc : $H(p) = \frac{K}{p}$

E(p) → H(p) → S(p)

Un tel système est ***instable*** puisque son seul pôle est zéro.

■ Les systèmes pouvant être décrits par ce modèle sont très nombreux. D'une manière générale, tous les processus accumulateurs sont concernés :

- le volume de liquide entrant dans un réservoir est l'intégrale du débit entrant,
- la charge d'un condensateur est l'intégrale du courant de charge,
- etc.



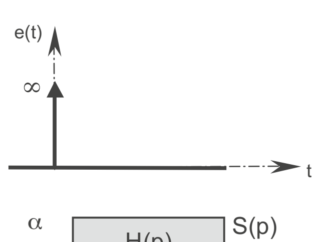
Par exemple, dans les chapitres précédents, le cas d'un vérin hydraulique a été rencontré de nombreuses fois. Le déplacement x de la tige est lié au débit q de fluide entrant par :

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{S} q(t)$$ où S est la section utile du piston.

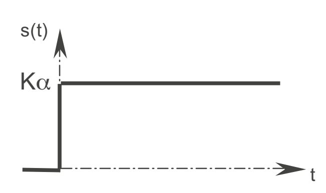
La fonction de transfert d'un tel vérin (entrée q, sortie x) est donc : $H(p) = \frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{1}{Sp}$.

Son gain est K = 1/S.

I-2 Réponse impulsionnelle



La réponse impulsionnelle d'un système a été définie comme sa réponse à une impulsion idéalisée, de durée nulle et de niveau infini. Une telle impulsion est en pratique irréalisable, mais peut constituer une approximation correcte de phénomènes de durée très brève mais suffisante pour produire un effet.



L'aire du signal est appelée poids de l'impulsion. Si l'entrée est une impulsion de poids α, soit $e(t) = \alpha\delta(t)$, il a été établi que, dans le domaine de Laplace, elle s'écrit alors $E(p) = \alpha$.
La sortie sera donc, toujours dans le domaine de Laplace :

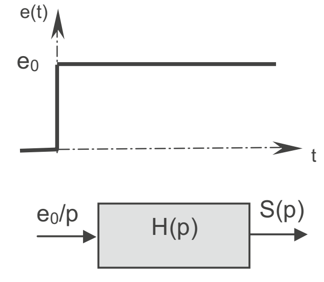
$$S(p) = H(p)\alpha = \frac{K\alpha}{p}$$

Ce qui fournit l'évolution temporelle par transformation inverse (voir table des transformées si nécessaire) :

$s(t) = K\alpha$, soit une constante.

L'exemple précédent du vérin permet de comprendre très simplement cette réponse qui traduit bien l'***instabilité du système intégrateur*** (voir chapitre 3, IV-6-3) : soumis à une impulsion de débit laissant entrer un volume α de fluide dans la chambre d'admission, le piston se déplace d'une distance $K\alpha = \alpha/S$ et demeure à ce nouvel emplacement. La réponse impulsionnelle ne revient pas vers sa valeur initiale, ce qui est bien caractéristique d'un système instable.

I-3 Réponse indicielle

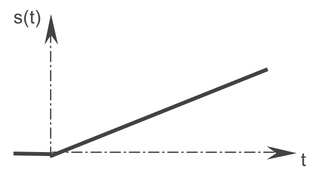


La réponse indicielle d'un système est sa réponse à un échelon. Si l'entrée est un échelon de niveau e_0, elle s'écrit alors $E(p) = e_0/p$ dans le domaine de Laplace. Si $e_0 = 1$, l'échelon est dit unitaire.
La sortie sera donc, toujours dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p)\frac{e_0}{p} = \frac{Ke_0}{p^2}$$

Ce qui fournit l'évolution temporelle par transformation inverse :

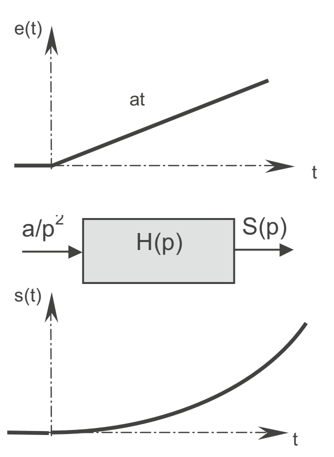
$s(t) = Ke_0 t$, soit une évolution linéaire.



L'exemple du vérin permet encore une fois de comprendre très simplement cette réponse, qui traduit toujours aussi bien l'***instabilité du système intégrateur*** : soumis à un débit constant e_0, le piston se déplace à vitesse constante (de module $Ke_0 = e_0/S$) et ne s'arrête pas tant que le débit est maintenu. La position de sortie est donc une grandeur indéfiniment croissante. La réponse à un échelon ne tend donc pas vers une valeur finie.

■ **Remarque**
Ces considérations font que le gain K d'un intégrateur n'a pas le sens physique qu'il possède pour un système stable. En effet, la notion de rapport entre la valeur asymptotique de la sortie et l'entrée en échelon n'a alors aucun sens, puisque la sortie indicielle diverge. Revoir chapitre 3, IV-5 si nécessaire.

I-4 Réponse à une rampe



Si l'entrée est une rampe de pente a, elle s'écrit alors $E(p)= a/p^2$ dans le domaine de Laplace. Si a = 1, la pente est dite unitaire.
La sortie sera donc, toujours dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p)\frac{a}{p^2} = \frac{Ka}{p^3}$$

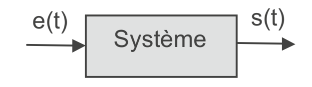
Ce qui fournit l'évolution temporelle par transformation inverse :

$$s(t) = \frac{Kat^2}{2}$$, soit une évolution parabolique.

L'exemple du vérin permet encore une fois une interprétation : si le débit en entrée croit linéairement, le mouvement de la tige est un mouvement uniformément accéléré.

II - SYSTÈME FONDAMENTAL DU PREMIER ORDRE

II-1 Définitions



Le système fondamental du premier ordre est le système monovariable du premier ordre, d'entrée e(t) et de sortie s(t), décrit par l'équation différentielle :

$$s(t) + \tau \frac{ds}{dt}(t) = K\,e(t)$$

où K et τ sont des constantes positives appelées respectivement ***gain*** et ***constante de temps*** du système. Le gain K est homogène au rapport des dimensions de la sortie et de l'entrée ; la constante de temps τ est homogène à un temps, bien entendu.

Par transformation de Laplace sous les conditions de Heaviside, il vient clairement :

$$S(p) + \tau\, pS(p) = KE(p)$$

La fonction de transfert du système est donc :

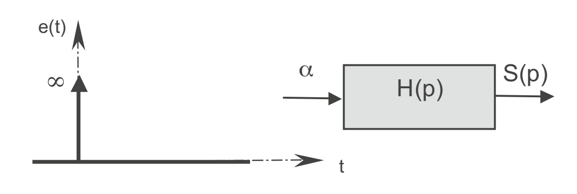
$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

E(p) → H(p) → S(p)

Un tel système est ***stable*** puisque son seul pôle est $-1/\tau$, réel clairement négatif.

■ Ce modèle décrit de nombreux systèmes. Les quelques exemples rencontrés dans les premiers chapitres de cet ouvrage en attestent : circuit RC, asservissement hydraulique, etc.

II-2 Réponse impulsionnelle

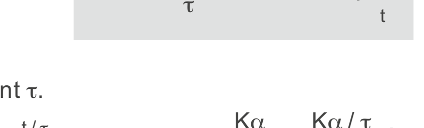


Si l'entrée est une impulsion de poids α, la sortie sera, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p)\alpha = \frac{K\alpha}{1+\tau p} = \frac{K\alpha}{\tau}\,\frac{1}{p+1/\tau}$$

Ce qui fournit l'évolution temporelle par transformation inverse :

$$s(t) = \frac{K\alpha}{\tau}e^{-t/\tau}$$ (voir table des transformées si nécessaire)



L'allure de cette réponse est bien caractéristique d'un système stable, puisqu'elle tend vers zéro.

Plusieurs caractéristiques peuvent y être soulignées :

- une discontinuité à l'origine, physiquement irréaliste, mais tout autant que l'impulsion elle même ;
- une valeur initiale $s(0_+) = \dfrac{K\alpha}{\tau}$;
- une tangente à l'origine qui coupe l'axe des temps à l'instant τ.

Pour démontrer ce résultat, il suffit de calculer $\dfrac{ds}{dt}(t) = -\dfrac{K\alpha}{\tau^2}e^{-t/\tau}$ qui vaut bien $-\dfrac{K\alpha}{\tau^2} = -\dfrac{K\alpha/\tau}{\tau}$ à l'instant t = 0.

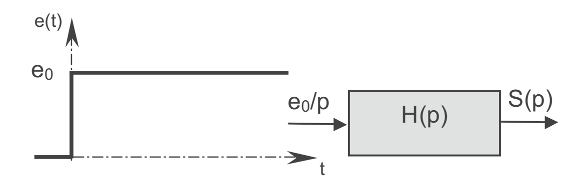
■ **Remarque**

Le poids α de l'impulsion étant son aire, sa dimension est celle de l'entrée multipliée par le temps. Le gain K, quant à lui, a pour dimension celle de la sortie divisée par celle de l'entrée. On peut alors vérifier l'homogénéité correcte de la sortie, qui n'est peut-être pas immédiate dans son écriture :

$s(t) = \dfrac{K\alpha}{\tau}e^{-t/\tau} \Rightarrow [s] = [K] \times [\alpha] \times \dfrac{1}{[T]}$, l'exponentielle étant sans dimension.

et on vérifie que $[s] = \dfrac{[s]}{[e]} \times [e] \times [T] \times \dfrac{1}{[T]}$.

II-3 Réponse indicielle



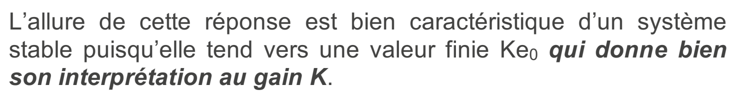
Si l'entrée est un échelon de niveau e_0, la sortie sera, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p)\frac{e_0}{p} = \frac{Ke_0}{p(1+\tau p)}$$

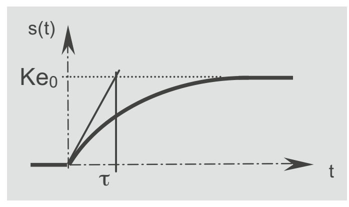
La recherche de s(t) nécessite préalablement une décomposition en éléments simples figurant dans la table des transformées, sous la forme :

$$S(p) = Ke_0\left[\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p}\right] = Ke_0\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/\tau}\right]$$

Ce qui fournit l'évolution temporelle par transformation inverse :



$s(t) = Ke_0[1-e^{-t/\tau}]$ (voir table des transformées si nécessaire)

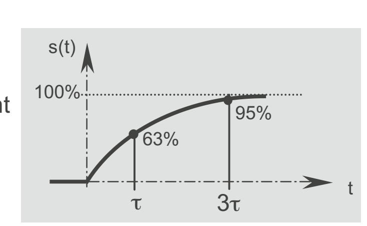


L'allure de cette réponse est bien caractéristique d'un système stable puisqu'elle tend vers une valeur finie Ke_0 ***qui donne bien son interprétation au gain K***.

Par ailleurs, la tangente à l'origine coupe la droite asymptote à l'instant τ.

Pour démontrer ce résultat, il suffit de calculer $\dfrac{ds}{dt}(t) = \dfrac{Ke_0}{\tau}e^{-t/\tau}$ qui vaut bien $\dfrac{Ke_0}{\tau}$ à t = 0.

■ **Points remarquables**



- Pour t = τ, la sortie vaut $s(t) = Ke_0[1-e^{-1}] \approx 0{,}63\,Ke_0$
- Le temps de réponse à 5% du système est obtenu en écrivant qu'alors : $0{,}95Ke_0 = Ke_0[1-e^{-t5\%/\tau}]$

  d'où $e^{-t5\%} = 0{,}05$

  soit $t_{5\%} = -\tau \ln 0{,}05 \approx 3\tau$.

La constante de temps d'un système fondamental du premier ordre peut être considérée comme le temps de montée à 63% de la valeur asymptotique.

Le temps de réponse à 5% d'un système fondamental du premier ordre peut être considéré comme étant égal à ***trois fois*** sa constante de temps.

Ces deux résultats temporels sont fondamentaux. Ils sont aisément contrôlables lors de la ***validation de modèles de connaissance*** ou l'***élaboration de modèles de comportement*** par identification (cf. exemple du chariot filoguidé plus loin, II-6). En revanche, la propriété qui lie la tangente à l'origine et la constante de temps n'est utilisable que si le nombre de points de mesure est suffisamment grand dans les temps très courts. Sinon le tracé de la tangente est trop imprécis.

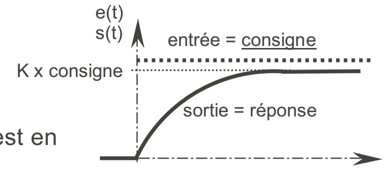
■ **Erreur statique de position**

On se restreint ici au cas où la grandeur d'entrée est la ***consigne*** que la sortie doit suivre. C'est la situation courante des systèmes asservis. La sortie est alors nécessairement comparable à l'entrée et le gain K est donc sans dimension. ***Uniquement dans ce cas***, on peut définir l'erreur statique de position comme la différence asymptotique entre l'entrée en échelon et la sortie. Ces considérations ont été détaillées au chapitre 2, V-4, et au chapitre 3, VII-1.

Sous ces importantes réserves on calculera donc :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty}(e(t)-s(t)) = e_0 - \lim_{t\to\infty} s(t) = e_0 - Ke_0 = (1-K)e_0$$

soit une erreur relative $\varepsilon_{s\%} = 1-K$



Le système sera donc précis si son gain est égal à 1, ce qui est en accord avec sa définition.

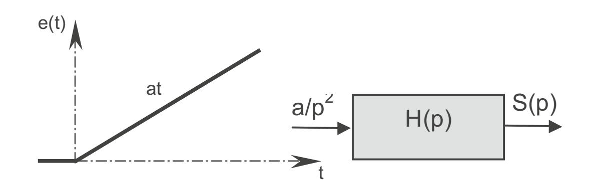
NB : Ce résultat peut se retrouver également en utilisant le théorème de la valeur finale dans le domaine de Laplace :

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p(E(p)-S(p)) = \lim_{p\to 0} pE(p)[1-H(p)] = \lim_{p\to 0} p\frac{e_0}{p}[1-\frac{K}{1+\tau p}] = \lim_{p\to 0} e_0[1-\frac{K}{1+\tau p}] = e_0(1-K)$$

II-4 Réponse à une rampe

Si l'entrée est un rampe de pente a, la sortie sera, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p)\frac{a}{p^2} = \frac{Ka}{p^2(1+\tau p)}$$

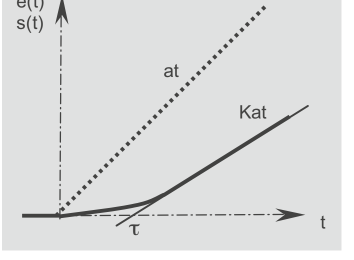


La recherche de s(t) nécessite préalablement une décomposition en éléments simples figurant dans la table des transformées, sous la forme :

$$S(p) = Ka[\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau}{p+1/\tau}]$$

Ce qui fournit l'évolution temporelle par transformation inverse :

$s(t) = Ka[t - \tau(1-e^{-t/\tau})]$ (voir table des transformées si nécessaire)



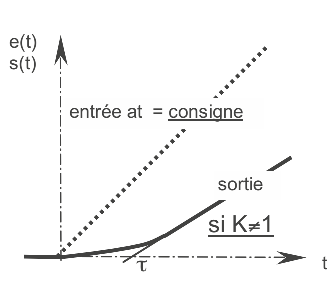
La sortie tend donc asymptotiquement vers une droite de pente Ka qui coupe l'axe des temps à l'instant τ. Par ailleurs, la tangente à l'origine est horizontale.

Pour démontrer ce dernier résultat, il suffit de calculer $\frac{ds}{dt}(t) = Ka(1-e^{-t/\tau})$ qui est bien nulle à t=0.

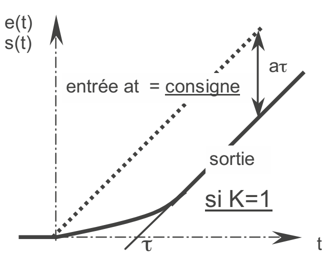
■ **Erreur statique de traînage**

Sous les mêmes importantes réserves que pour la réponse indicielle donnant un ***sens*** à cette grandeur, on définit l'erreur statique de traînage qui est la différence asymptotique entre l'entrée en rampe (alors consigne) et la sortie :

$$\varepsilon_V = \lim_{t\to\infty}(e(t)-s(t)) = \lim_{t\to\infty}(at - Ka[t-\tau(1-e^{-t/\tau})]) = Ka\tau + \lim_{t\to\infty} a(1-K)t$$



La convergence de cette limite n'est assurée que ***si K = 1*** et dans ce cas $\varepsilon_V = a\tau$. Sinon cette erreur augmente indéfiniment.



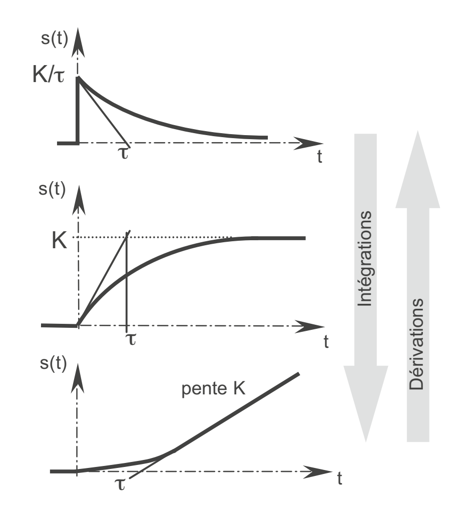
NB : Ce résultat peut se retrouver également en utilisant le théorème de la valeur finale dans le domaine de Laplace :

$$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p(E(p)-S(p)) = \lim_{p\to 0} p\frac{a}{p^2}[1-\frac{K}{1+\tau p}] = \lim_{p\to 0}\frac{a\tau p + a(1-K)}{p(1+\tau p)}$$

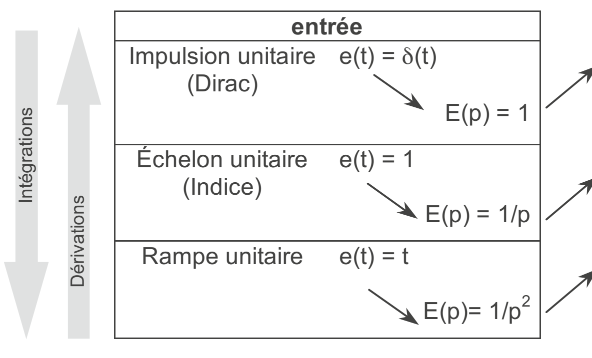
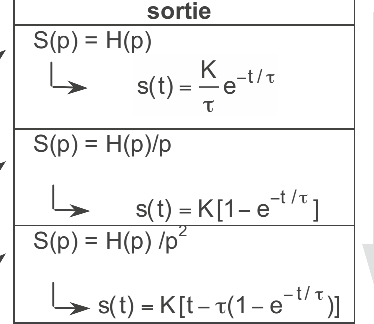
$= a\tau + \lim_{p\to 0}\frac{a(1-K)}{p}$ qui diverge sauf ***si K = 1*** et dans ce cas $\varepsilon_V = a\tau$.

II-5 Relations entre les réponses

Puisque les différentes entrées canoniques ***unitaires*** peuvent être déduites les unes des autres par intégrations (ou dérivations) successives, il en va de même pour les sorties, par linéarité de ces opérations. Ainsi, par exemple, puisque l'impulsion est la dérivée de l'indice (infinie à l'instant initial, nulle sinon), la réponse impulsionnelle est la dérivée de la réponse indicielle, etc. On peut aisément le vérifier sur les courbes ci-contre, ne serait-ce qu'à l'instant initial ou au contraire sur le comportement asymptotique.



Cela s'observe d'ailleurs dans le domaine de Laplace par les multiplications successives de la sortie par l'opérateur 1/p qui traduit une intégration sous les conditions de Heaviside, c'est-à-dire avec des conditions initiales nulles annulant les constantes. Ceci peut être mis en évidence dans le tableau récapitulatif qui suit.

entrée		sortie
Impulsion unitaire (Dirac)	$e(t) = \delta(t)$ → $E(p) = 1$	$S(p) = H(p)$ → $s(t) = \frac{K}{\tau}e^{-t/\tau}$
Échelon unitaire (Indice)	$e(t) = 1$ → $E(p) = 1/p$	$S(p) = H(p)/p$ → $s(t) = K[1-e^{-t/\tau}]$
Rampe unitaire	$e(t) = t$ → $E(p) = 1/p^2$	$S(p) = H(p)/p^2$ → $s(t) = K[t-\tau(1-e^{-t/\tau})]$

Ces considérations fondamentales sont indépendantes du système et ne s'appliquent donc pas uniquement au système fondamental du premier ordre. On peut, par exemple, les vérifier sur les réponses canoniques du système intégrateur précédemment présentées qui s'obtiennent

également par intégrations successives (constante, évolution linéaire, évolution parabolique). Ainsi, possédant l'une des sorties canoniques d'un système, il pourra être plus aisé de déterminer les autres sorties canoniques par intégration ou dérivation, plutôt que de résoudre à chaque fois l'équation différentielle.

II-6 Asservissement de vitesse du chariot filoguidé MP22

II-6-1 Présentation



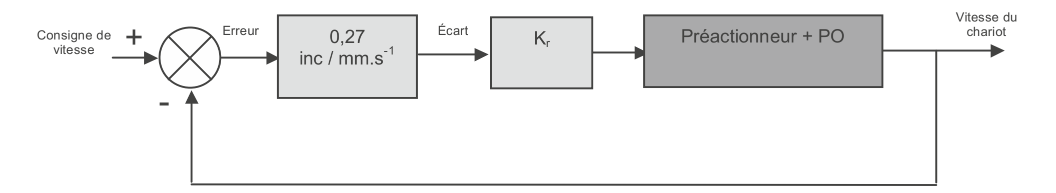
La structure de cette chaîne fonctionnelle, déjà rencontrée en particulier comme exercice d'application du chapitre 2, est brièvement rappelée ci-dessous :

Consigne de vitesse
Adaptateur de consigne
+
-
Écart
Correcteur
Régulateur de vitesse + amplificateur
Tension de commande
Moteur à courant continu
Vitesse angulaire du rotor
Réducteur
Vitesse de rotation de la roue
Chariot
Vitesse du chariot
Capteur de vitesse (codeur incrémental)
Mesure de vitesse

Déplacement chariot
Consigne(s)
Régulateur de Déplacement
Commande Proportionnelle Vitesse
Correcteur
$K_r = 4.00$
Sortie régulateur
I.P.
M
Vitesse
Réducteur
Codeur
Interface Capteur
ΔMx pendant Te
Mesure de x
Roue
Déplacement Maxi
Consigne de vitesse
Condition de départ
Start
Condition d'arrêt
DEPmaxi + Stop

Cette chaîne permet un asservissement de la vitesse du chariot selon une valeur de consigne. En fait, plus précisément, c'est la vitesse de sortie du moteur qui est réellement asservie, la suite de la chaîne, hors boucle, comportant des composants proportionnels, dépendant du rapport du réducteur et du rayon de la roue motrice, et étant faiblement l'objet de perturbations.

L'asservissement travaille sur des grandeurs numériques. Lorsque le correcteur est un correcteur proportionnel de gain K_r et une fois les différentes conversions traduites, la chaîne fonctionnelle peut être décrite par la représentation simplifiée ci-après :



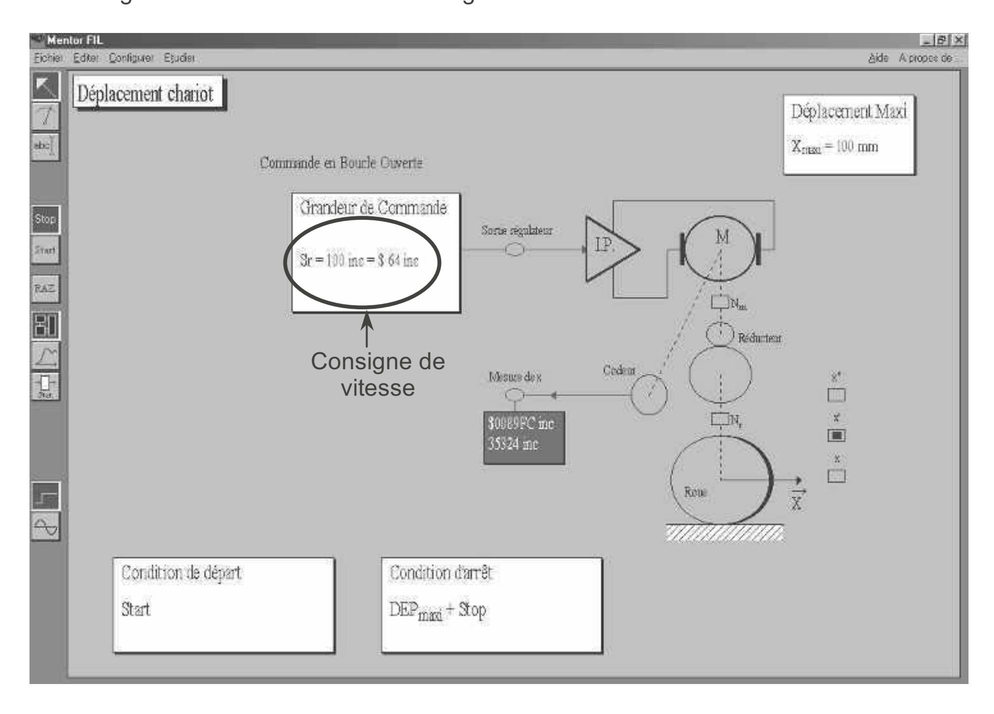
Ce schéma à retour unitaire permet la description du système de la manière suivante :

L'écart, image en incréments de l'erreur de vitesse, est amplifié dans le rapport K_r. Cette commande numérique est traduite en vitesse du chariot par l'ensemble {préactionneur + PO} constitué des éléments suivants :

- le préactionneur, constitué du régulateur de vitesse et de l'amplificateur, qui contient une conversion numérique-analogique et élabore la tension de commande du moteur ;
- l'actionneur (le moteur) qui transforme l'énergie électrique en énergie mécanique ;
- un transmetteur (le réducteur) qui adapte la vitesse du moteur afin de fournir un couple suffisant à la roue ;
- l'effecteur (le chariot lui-même, mais en fait tout simplement sa roue motrice) qui traduit la vitesse de rotation en sortie de réducteur en vitesse d'avancement.

II-6-2 Élaboration d'un modèle de comportement du bloc {préactionneur + PO}

Un modèle de ce bloc fonctionnel peut-être proposé à partir d'un essai en boucle ouverte que permet le logiciel de pilotage du chariot. Une consigne de vitesse codée en incréments (inc) est donnée directement à l'entrée du régulateur de vitesse. La sortie du capteur de vitesse permet alors la mesure de celle-ci et le tracé de son évolution temporelle. On procède alors à un essai avec une consigne en échelon de 100 inc au régulateur de vitesse :



L'évolution temporelle de la vitesse est donnée ci-après. On reconnaît l'allure de la réponse d'un système fondamental du premier ordre à un échelon, ce qui permet de proposer, par identification, une fonction de transfert pour le bloc sollicité de la forme :

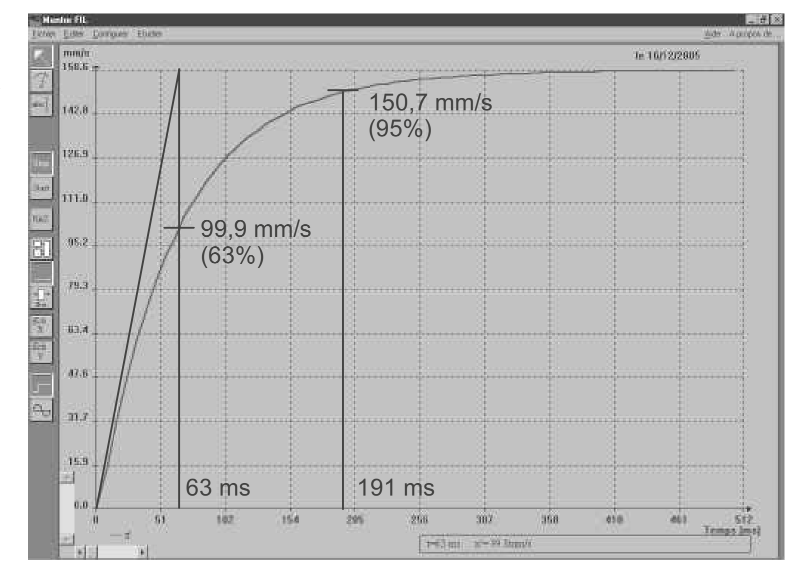
$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Une analyse quantitative doit alors permettre d'identifier le gain et la constante de temps ainsi que de valider le modèle. On relève :

- une valeur asymptotique de 158,6 mm/s ;
- 63% de cette valeur (99,9 mm/s) atteinte au bout de 63 ms ;
- un temps de réponse à 5% (valeur atteinte de 150,7 mm/s) de 191 ms.

On vérifie bien que sensiblement :
191 ≈ 63 x3.

Ceci corrobore le modèle du premier ordre pour lequel ***le temps de réponse à 5% est égal au triple de la constante de temps***.



De plus, bien que le tracé de la tangente à l'origine soit relativement imprécis, on constate qu'elle semble cohérente avec la constante de temps préalablement évaluée à 63 ms.

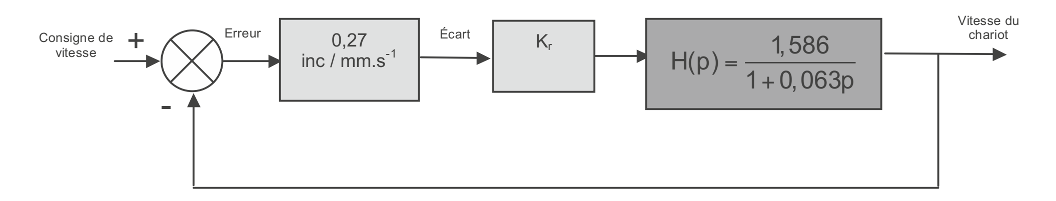
Ces considérations autorisent à proposer, pour le bloc fonctionnel sollicité, la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1,586}{1+0,063p}$$

soit un gain de 1,586 mm.s^{-1}/inc et une constante de temps de 63 ms = 0,063 s.

II-6-3 Fonction de transfert de l'asservissement

L'identification précédente permet donc de préciser le schéma bloc de l'asservissement :



Ce qui permet de calculer la fonction de transfert de l'asservissement de vitesse en fonction du gain K_r du correcteur :

$$F(p) = \frac{0,27K_r \dfrac{1,586}{1+0,063p}}{1+0,27K_r \dfrac{1,586}{1+0,063p}} = \frac{\dfrac{0,27K_r x1,586}{1+0,27K_r x1,586}}{1+\dfrac{0,063}{1+0,27K_r x1,586}p}$$

Soit : $$F(p) = \frac{\dfrac{0,428K_r}{1+0,428K_r}}{1+\dfrac{0,063}{1+0,428K_r}p}$$

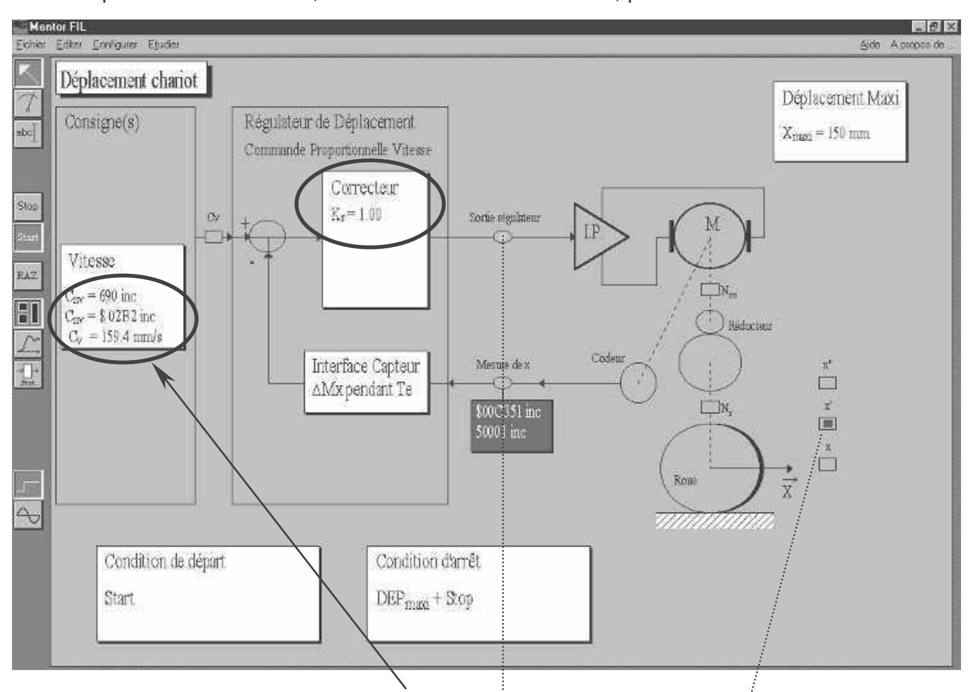
L'asservissement de vitesse se comporte donc comme un système fondamental du premier ordre :

- de gain $\dfrac{0{,}428\,K_r}{1+0{,}428\,K_r}$
- de constante de temps $\dfrac{0{,}063}{1+0{,}428\,K_r}$

Soit, par exemple en réglant le gain du correcteur à $K_r = 1$:

- un gain de 0,3 (sans dimension)
- une constante de temps de 0,044 s.

On peut alors procéder à un essai, en boucle fermée cette fois, pour valider le modèle :

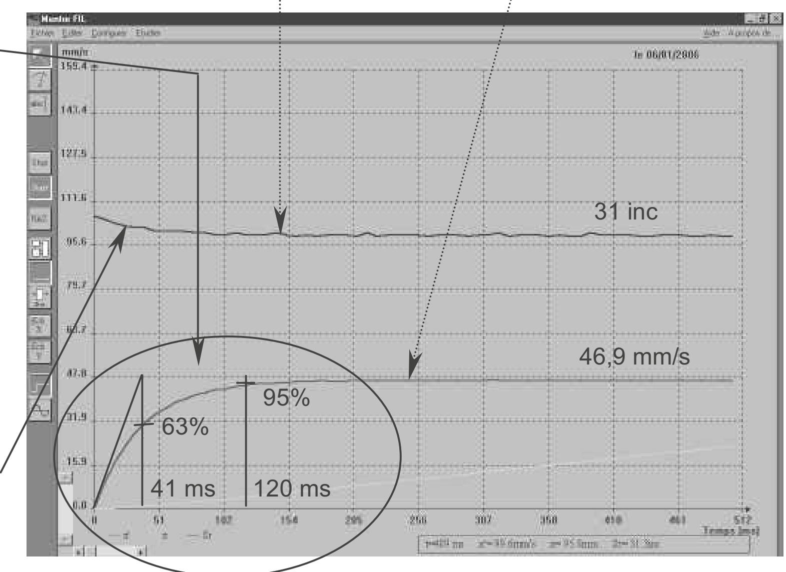


Si on fournit une consigne de vitesse de 159,4 mm/s (690 inc), l'évolution temporelle de la vitesse du chariot est donnée ci-dessous :

On y relève :

- une allure satisfaisante avec le modèle du premier ordre ;
- une valeur finale de 46,9 mm/s ;
- un temps de montée à 63% de 41 ms cohérent, aux imprécisions près, avec la tangente à l'origine ;
- un temps de réponse à 5% de 120 ms qui est bien sensiblement le triple du précédent.

On vérifie par ailleurs que la sortie du correcteur ne sature pas.



Ces mesures valident correctement un modèle du premier ordre avec :

- un gain de 46,9/159,4 = 0,31 cohérent avec la valeur prévue ;
- une constante de temps de l'ordre de 41 ms, légèrement plus faible que la valeur 44 ms attendue, mais cohérente si on accepte une incertitude inférieure à 10%.

II-6-4 Influence du gain K_r du correcteur

L'influence prévisible du gain du correcteur sur les caractéristiques de gain et de constante de temps de l'asservissement de vitesse peut être traduite dans le tableau ci-dessous, pour les valeurs 1, 2, 4 et 16 du gain du correcteur :

K_r	1	2	4	16
Gain $\dfrac{0,428K_r}{1+0,428K_r}$	0,30	0,46	0,63	0,87
Cte de temps $\dfrac{0,063}{1+0,428K_r}$	44 ms	34 ms	23 ms	8 ms

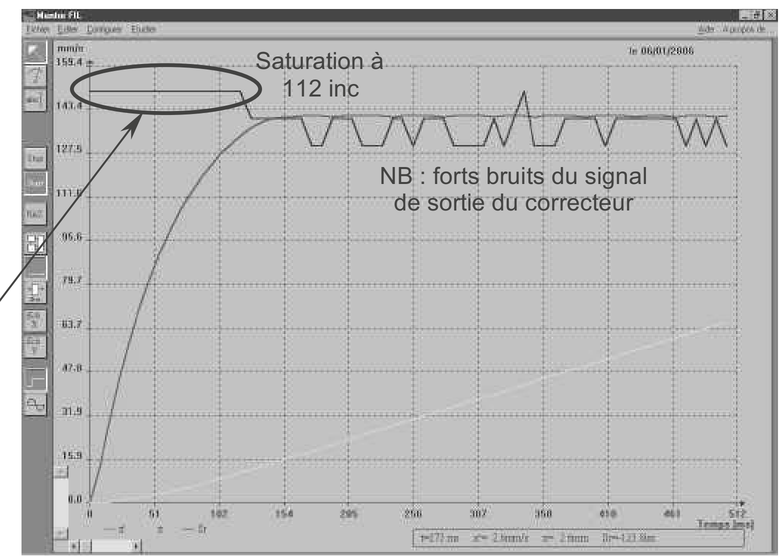
Afin de contrôler la validité du modèle, on procède alors au réglage de K_r selon les différentes valeurs indiquées et on relève l'évolution de la vitesse pour une entrée en échelon comme précédemment. On obtient les résultats suivants, toujours pour une consigne de 159,4 mm/s :

K_c	1	2	4	16
Valeur finale de la vitesse	46,9 mm/s	73,5 mm/s	101,6 mm/s	141,4 mm/s
Valeur finale théorique (gain x 159,4 mm/s)	47,8 mm/s	73,3 mm/s	100,4 mm/s	138,7 mm/s
Temps de montée à 63%	41 ms	31 ms	38 ms	54 ms
Rappel de la constante de temps théorique	44 ms	34 ms	23 ms	8 ms
Temps de réponse à 5%	120 ms	92 ms	80 ms	121 ms
Temps de réponse à 5% théorique	132 ms	102 ms	69 ms	24 ms

On observe, pour les quatre valeurs de réglage du gain du correcteur, une valeur finale de la vitesse tout à fait cohérente avec la prévision du modèle, aux erreurs de mesure près.

Concernant les aspects temporels, pour les réglages aux valeurs 1 et 2 de K_r on observe des temps cohérents avec le modèle.

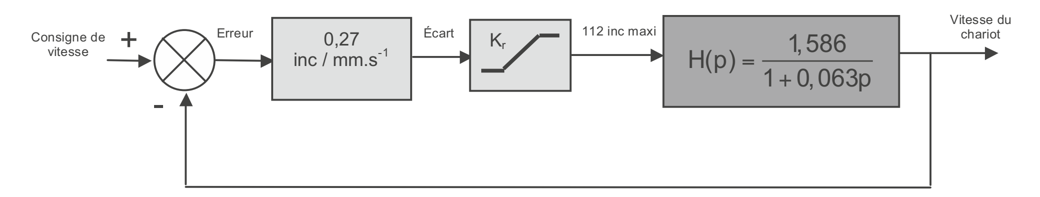
En revanche, pour un gain de correcteur plus élevé, on constate que le modèle n'est pas du tout représentatif de la réalité qui montre une évolution de la vitesse beaucoup plus lente que prévue.
Cela s'explique par la présence d'une **saturation** de la sortie du correcteur qui ne peut pas dépasser la valeur de 112 incréments, comme on peut le voir par exemple sur le relevé ci-contre effectué pour la valeur K_r = 16.



Le modèle du premier ordre, linéaire, ne prend pas en compte ces saturations.

Une telle saturation limite la tension d'alimentation du moteur, ce qui a pour effet de limiter la vitesse du chariot pendant toute sa durée, et donc de ralentir le système.

La saturation cesse lorsque l'erreur en vitesse est devenue suffisamment faible pour que, multipliée par K_r, elle génère une sortie du correcteur inférieure à 112 incréments. C'est-à-dire lorsque l'erreur est inférieure à 112 / 0,27 K_r comme on peut le lire directement sur le schéma bloc :

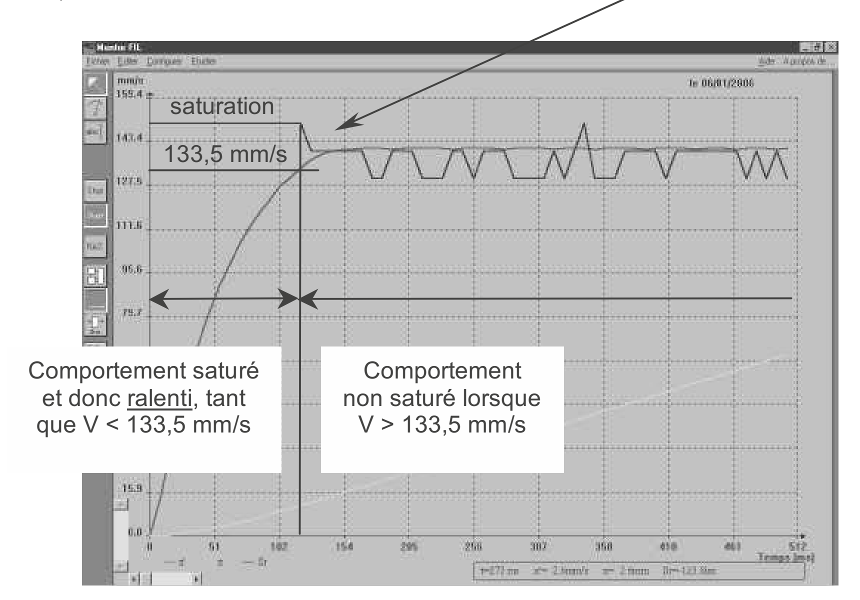


Soit donc pour les quatre réglages testés :

K_r	1	2	4	16
Erreur maxi : 112 / 0,27 K_r	414,8 mm/s	207,4 mm/s	103,6 mm/s	25,9 mm/s
Vitesse limite : consigne - erreur maxi = 159,4 - erreur maxi			55,8 mm/s	133,5 mm/s

La consigne en échelon étant de 159,4 mm/s, on vérifie bien que l'erreur conduisant à la saturation n'est jamais atteinte pour les valeurs 1 et 2 de K_r, ce qui explique alors la cohérence des observations avec le modèle. En revanche, pour les valeurs 4 et 16, l'erreur conduisant à la saturation étant inférieure à la consigne, on peut, par différence, déterminer la vitesse limite au dessous de la quelle il y a saturation.

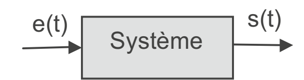
On peut alors revenir aux relevés pour y vérifier la validité de cette vitesse limite. Par exemple ci-dessous pour K_r = 16 :



III - SYSTÈME FONDAMENTAL DU DEUXIÈME ORDRE

III-1 Définitions

Le système fondamental du deuxième ordre est le système monovariable du deuxième ordre, d'entrée e(t) et de sortie s(t), décrit par l'équation différentielle :



$$s(t)+\frac{2z}{\omega_0}\frac{ds}{dt}(t)+\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}(t)=K\,e(t)$$

où K, ω_0 et z sont des constantes ***positives*** appelées respectivement :

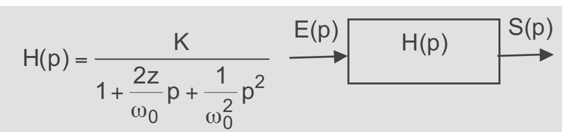
- ***K : gain***
- **ω_0: *pulsation propre***
- ***z : facteur d'amortissement***.

Le gain K est homogène au rapport des dimensions de la sortie et de l'entrée, la pulsation propre est homogène à l'inverse d'un temps (et s'exprimera en rad/s) et le facteur d'amortissement est sans dimension. La signification physique de ces termes apparaîtra dans la réponse du système aux diverses sollicitations ; en particulier le fait d'introduire une pulsation ω_0 et non pas une fréquence ou encore une constante de temps, comme pour le système du premier ordre.

Par transformation de Laplace sous les conditions de Heaviside, il vient clairement :

$$S(p)+\frac{2z}{\omega_0}pS(p)+\frac{1}{\omega_0^2}p^2S(p)=KE(p)$$

La fonction de transfert du système est donc :



$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

D'après le critère de Routh, un tel système est ***stable si z ≠ 0***.
Pour plus d'information, on peut rechercher les pôles de la fonction de transfert et pour cela calculer le discriminant (réduit) du polynôme du second degré :

$$\Delta=\frac{z^2}{\omega_0^2}-\frac{1}{\omega_0^2}=\frac{1}{\omega_0^2}(z^2-1)$$

On en déduit que les pôles seront réels ou complexes selon le signe de ce discriminant, donc selon la valeur de z par rapport à 1. Ceci définit deux classes de systèmes : les systèmes ***amortis*** et les systèmes ***sous-amortis***.

■ **Système amorti (si z ≥ 1)**

Le discriminant étant positif, le système possède deux pôles réels :

$$p_1=-\omega_0(z-\sqrt{z^2-1})$$
$$p_2=-\omega_0(z+\sqrt{z^2-1})$$

Ces deux pôles réels sont bien négatifs, ce qui assure la stabilité du système, comme prévu. La fonction de transfert peut alors s'écrire comme le produit de deux fonctions du premier ordre, en introduisant des constantes de temps $\tau_i=-1/p_i$:

$$H(p)=\frac{Kp_1p_2}{(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{K}{(1-p/p_1)(1-p/p_2)}=\frac{K}{(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)} \text{ si } z>1,$$

ou bien $H(p)=\frac{Kp_1^2}{(p-p_1)^2}=\frac{K}{(1-p/p_1)^2}=\frac{K}{(1+\tau p)^2}$ si z=1, puisque alors les deux pôles sont égaux.

Dans ce dernier cas (z = 1) le système est dit ***critique***. Sa constante de temps est $\tau=1/\omega_0$.

■ **Système sous-amorti (si z < 1)**

Le discriminant étant négatif, le système possède deux pôles complexes conjugués :

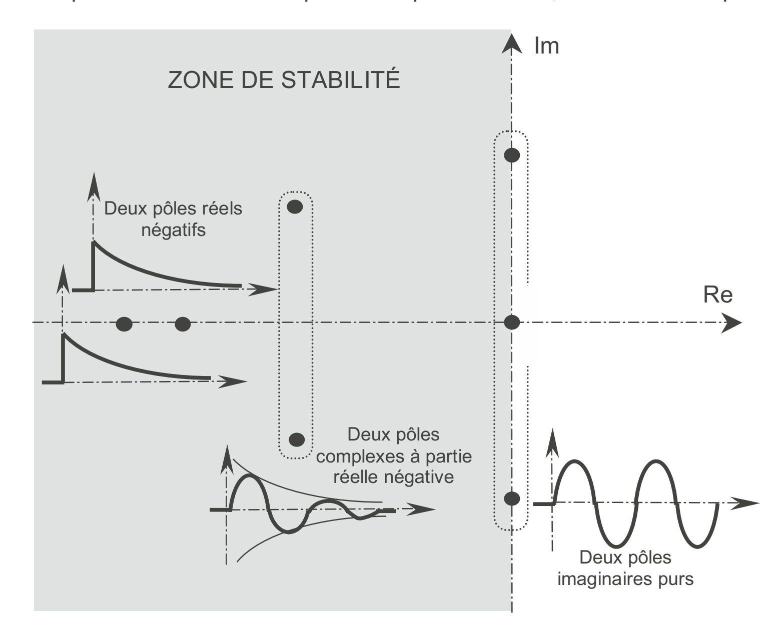
$$p_1 = -\omega_0(z - j\sqrt{1-z^2})$$
$$p_2 = -\omega_0(z + j\sqrt{1-z^2})$$

La fonction de transfert ne peut pas alors être décrite comme le produit de deux fonctions de transfert du premier ordre et aucune constante de temps ne peut être introduite.

Si le facteur d'amortissement z est non nul, ces deux pôles sont bien à partie réelle négative, ce qui assure la stabilité du système, comme prévu.

■ **Récapitulation et visualisation dans le plan complexe**

Ces différents systèmes peuvent être récapitulés à partir de la position des pôles dans le plan complexe associée aux réponses impulsionnelles, comme au chapitre 3, IV-4 :



Si les deux pôles sont réels négatifs ($z \geq 1$), le système est dit ***amorti*** ou ***apériodique***. Si ces deux pôles sont égaux ($z = 1$), le système est dit critique.

Si les deux pôles sont complexes ($z < 1$), le système est dit ***sous-amorti*** ou ***oscillatoire amorti***.

Si le facteur d'amortissement est nul ($z = 0$), le système est instable (situation limite) et sa réponse présente des oscillations non amorties : les deux pôles sont des imaginaires purs conjugués.

Ces résultats sont issus de la recherche mathématique de la solution générale de l'équation différentielle sans second membre :

$$s(t) + \frac{2z}{\omega_0}\frac{ds}{dt}(t) + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}(t) = 0$$

Fiche ressource "équations différentielles linéaires à coefficients constants"

Ils vont être approfondis ci-après par l'étude complète de la réponse impulsionnelle des différents systèmes fondamentaux du deuxième ordre.

■ Les systèmes pouvant être modélisés comme des systèmes fondamentaux du deuxième ordre, amortis comme sous amortis, sont très nombreux. Déjà, les quelques exemples rencontrés dans les premiers chapitres de cet ouvrage en attestent : moteur électrique à courant continu, contrôle d'un satellite à correction tachymétrique, etc.

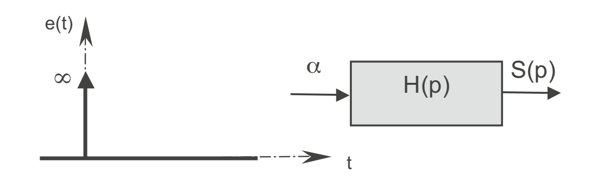
■ **Remarque : relations entre les pôles**

Classiquement, comme pour tout polynôme du second degré, les pôles sont liés par les relations qui en donnent le produit et la somme :

$p_1 p_2 = \omega_0^2$

$p_1 + p_2 = -2z\omega_0$

III-2 Réponse impulsionnelle



Si l'entrée est une impulsion de poids α, la sortie sera, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p)\alpha = \frac{K\alpha}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

dont il convient de chercher l'antécédent s(t).

III-2-1 Système amorti non critique (si z > 1)

Le système peut se décomposer comme deux systèmes du premier ordre en série, alors :

$S(p) = \frac{K\alpha}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$, les constantes de temps ayant été définies plus haut.

On peut alors décomposer S(p) sous la forme $S(p) = \frac{K\alpha}{\tau_1 - \tau_2}\left[\frac{\tau_1}{1+\tau_1 p} - \frac{\tau_2}{1+\tau_2 p}\right]$.

Ce qui permet une transformation inverse aisée :

$$s(t) = \frac{K\alpha}{\tau_1 - \tau_2}[e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}]$$ (voir table des transformées si nécessaire)

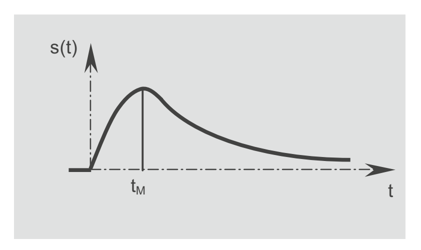
Pour déterminer l'allure de l'évolution temporelle de la sortie il est intéressant de calculer sa dérivée :

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{K\alpha}{\tau_1 - \tau_2}[-\frac{1}{\tau_1}e^{-t/\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}e^{-t/\tau_2}]$$

à l'instant initial cette dérivée vaut $\frac{ds}{dt}(0) = \frac{K\alpha}{\tau_1\tau_2} \neq 0$

et elle s'annule à l'instant t_M défini par $\frac{1}{\tau_1}e^{-t_M/\tau_1} = \frac{1}{\tau_2}e^{-t_M/\tau_2}$, soit $e^{t_M(1/\tau_1 - 1/\tau_2)} = \frac{\tau_2}{\tau_1}$ ou encore :

$$t_M = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\ln\frac{\tau_1}{\tau_2}$$



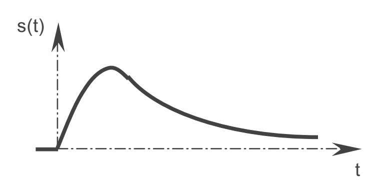
À cet instant, la sortie présente donc un maximum, dont on pourrait déterminer la valeur en réinjectant la valeur de t ci-dessus dans la relation donnant s(t). Puis elle décroît en tendant vers zéro, ce qui est bien caractéristique de la réponse impulsionnelle d'un système stable.

III-2-2 Système amorti critique (si z = 1)

Dans ce cas les deux constantes de temps sont égales et la sortie est donc, dans le domaine de Laplace : $S(p) = \frac{K\alpha}{(1+\tau_1 p)^2}$

Dont la transformée inverse est : $s(t) = \frac{K\alpha}{\tau^2}te^{-t/\tau}$ (voir table des transformées si nécessaire)

Un calcul de la dérivée de cette fonction montre aisément qu'elle est non nulle à l'instant initial, puis que cette fonction présente un maximum avant de décroître. L'allure de l'évolution temporelle est donc, dans ce cas critique où z = 1, identique à celle obtenue précédemment dans le cas amorti général (z > 1). Cette allure est donc finalement l'allure à retenir pour z ≥ 1.



III-2-3 Système sous-amorti (si z < 1)

Dans ce cas, le système possède deux pôles complexes et la fonction de transfert n'est pas décomposable en deux fonctions du premier ordre.

On peut néanmoins toujours écrire : $S(p) = H(p)\alpha = \dfrac{K\alpha}{1 + \dfrac{2z}{\omega_0} p + \dfrac{1}{\omega_0^2} p^2} = \dfrac{K\alpha p_1 p_2}{(p - p_1)(p - p_2)}$.

Avec : $p_1 = -\omega_0(z - j\sqrt{1 - z^2})$ et $p_2 = -\omega_0(z + j\sqrt{1 - z^2})$

Une décomposition en éléments simples s'écrit donc :

$$S(p) = \frac{K\alpha p_1 p_2}{p_1 - p_2}\left[\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right] = \frac{K\alpha\omega_0^2}{2\omega_0 j\sqrt{1 - z^2}}\left[\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right] = \frac{K\alpha\omega_0}{2j\sqrt{1 - z^2}}\left[\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right]$$

qui par transformation inverse donne :

$$s(t) = \frac{K\alpha\omega_0}{2j\sqrt{1 - z^2}}[e^{p_1 t} - e^{p_2 t}] \qquad \text{(voir table des transformées si nécessaire)}$$

$$s(t) = \frac{K\alpha\omega_0}{2j\sqrt{1 - z^2}}[e^{-\omega_0(z - j\sqrt{1 - z^2})t} - e^{-\omega_0(z + j\sqrt{1 - z^2})t}] = \frac{K\alpha\omega_0}{2j\sqrt{1 - z^2}} e^{-\omega_0 z t}[e^{j\omega_0\sqrt{1 - z^2}\,t} - e^{-j\omega_0\sqrt{1 - z^2}\,t}]$$

or : $e^{-j\omega_0\sqrt{1 - z^2}\,t} = \cos\omega_0\sqrt{1 - z^2}\,t - j\sin\omega_0\sqrt{1 - z^2}\,t$

et $e^{+j\omega_0\sqrt{1 - z^2}\,t} = \cos\omega_0\sqrt{1 - z^2}\,t + j\sin\omega_0\sqrt{1 - z^2}\,t$

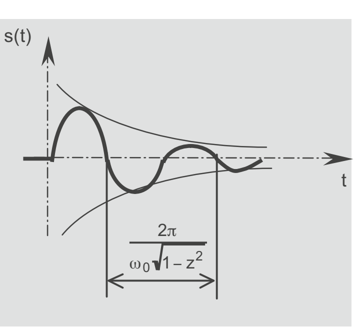
Donc : $s(t) = \dfrac{K\alpha\omega_0}{2j\sqrt{1 - z^2}} e^{-\omega_0 z t} 2j\sin\omega_0\sqrt{1 - z^2}\,t$

Soit, après simplification par 2j : $s(t) = \dfrac{K\alpha\omega_0}{\sqrt{1 - z^2}} e^{-\omega_0 z t}\sin\omega_0\sqrt{1 - z^2}\,t$

La réponse est donc oscillatoire amortie et présente l'allure ci-contre qui tend bien vers zéro (stabilité) et où :

- la pseudo pulsation des oscillations est $\omega_0\sqrt{1 - z^2}$,
- la pseudo période de ces oscillations est donc $\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - z^2}}$.

Plus le facteur d'amortissement z est petit, c'est-à-dire moins le système est amorti, plus la pseudo période des oscillations est petite. Elle se rapproche de $2\pi / \omega_0$ quand z se rapproche de zéro.



III-2-4 Système non amorti (si z = 0)

Dans le cas limite où z = 0 (système non amorti), la réponse impulsionnelle oscille indéfiniment, ce qui caractérise bien un système ***à la limite de l'instabilité***. Les deux pôles sont alors en effet imaginaires purs conjugués. La pulsation des oscillations n'est autre que ω_0 et la période $2\pi / \omega_0$.

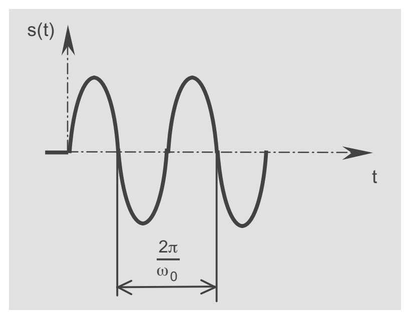
Ceci a déjà été abordé à plusieurs reprises, comme par exemple lors de la visualisation des contributions des pôles dans le plan complexe, mais peut se retrouver ici de manière directe. En effet, la sortie s'écrit alors dans ce cas :

$$S(p) = H(p)\alpha = \frac{K\alpha}{1 + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

dont la transformée inverse est immédiatement :

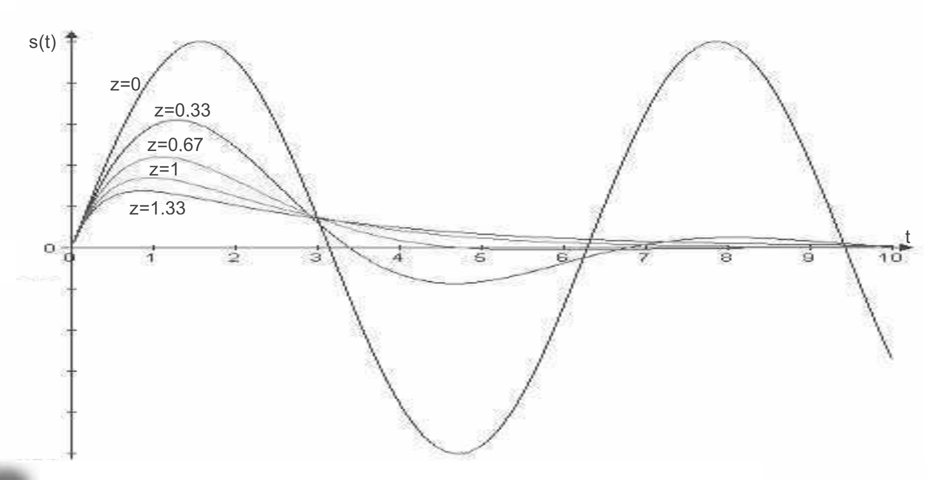
$$s(t) = K\alpha\omega_0 \sin\omega_0 t$$

d'après la table des transformées.



III-2-5 Récapitulatif

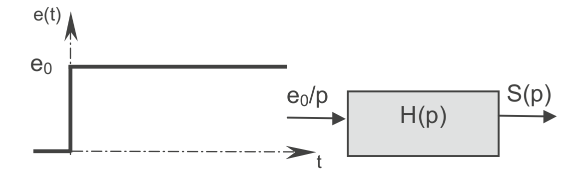
Les courbes ci-dessous, obtenues à l'aide d'un logiciel de simulation, permettent de visualiser, de manière récapitulative, l'influence du facteur d'amortissement sur la réponse impulsionnelle d'un système fondamental du deuxième ordre :



III-3 Réponse indicielle

Si l'entrée est un échelon de niveau e_0, la sortie sera, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p)\frac{e_0}{p} = \frac{Ke_0}{p[1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2]}$$



dont il convient de chercher l'antécédent s(t).

Cette recherche pourrait s'effectuer par transformée inverse de S(p). Mais, puisque la réponse impulsionnelle a été déterminée précédemment, il est plus aisé d'utiliser l'importante propriété énoncée en I-5, à savoir que la réponse indicielle s'obtient par intégration de la réponse impulsionnelle, sous les conditions Heaviside.

III-3-1 Système amorti non critique (si z > 1)

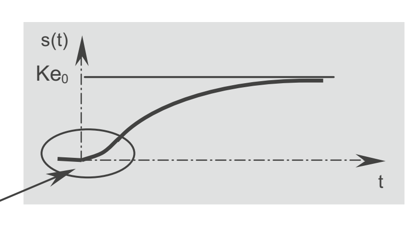
La réponse à une impulsion de poids α est $s(t) = \frac{K\alpha}{\tau_1 - \tau_2}[e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}]$.

Donc par intégration, la réponse (nulle à t=0) à un échelon de niveau e_0 est immédiatement :

$$s(t) = \frac{Ke_0}{\tau_1 - \tau_2}[-\tau_1 e^{-t/\tau_1} + \tau_2 e^{-t/\tau_2}] + Ke_0$$

ou encore :

$$s(t) = Ke_0[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}(\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2})]$$



À l'instant initial, la dérivée de la réponse indicielle n'est autre que la réponse impulsionnelle à cet instant, qui est nulle. La tangente à l'origine de la réponse est donc horizontale.

III-3-2 Système amorti critique (si z = 1)

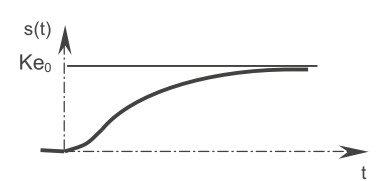
La réponse à une impulsion de poids α est $s(t) = \frac{K\alpha}{\tau^2} te^{-t/\tau}$.

Donc par intégration (par parties), la réponse (nulle à t = 0) à un échelon de niveau e_0 est :

$$s(t) = \frac{Ke_0}{\tau^2}[-t\tau e^{-t/\tau} - \tau^2 e^{-t/\tau}] + Ke_0$$

ou encore :

$$s(t) = Ke_0[1 - (1 + t/\tau)e^{-t/\tau}]$$



dont l'allure de l'évolution est identique à celle du cas précédent (z>1), tout comme pour la réponse impulsionnelle.

III-3-3 Système sous amorti (si z < 1)

La réponse à une impulsion de poids α est $s(t) = \frac{K\alpha\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\omega_0 zt} \sin \omega_0 \sqrt{1-z^2}\, t$.

Après intégration, la réponse (nulle à t = 0) à un échelon de niveau e_0 est :

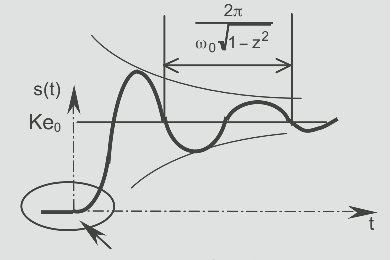
$$s(t) = \frac{Ke_0\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\omega_0 zt}\left[-\frac{\sqrt{1-z^2}}{\omega_0}\cos \omega_0\sqrt{1-z^2}\, t - \frac{z}{\omega_0}\sin\sqrt{1-z^2}\, t\right] + Ke_0$$

soit : $s(t) = Ke_0[1 - e^{-\omega_0 zt}(\cos\omega_0\sqrt{1-z^2}\, t + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\sin\sqrt{1-z^2}\, t)]$

que l'on préfère écrire usuellement sous la forme :

$$s(t) = Ke_0[1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\omega_0 zt}\sin(\omega_0\sqrt{1-z^2}\, t + \varphi)]$$

où $\varphi = \arctan\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$



La réponse est donc oscillatoire amortie autour de la valeur Ke_0, de tangente nulle à t=0.

Comme pour la réponse impulsionnelle :

- la pseudo pulsation des oscillations est $\omega_0\sqrt{1-z^2}$,
- la pseudo période de ces oscillations est donc $\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$.

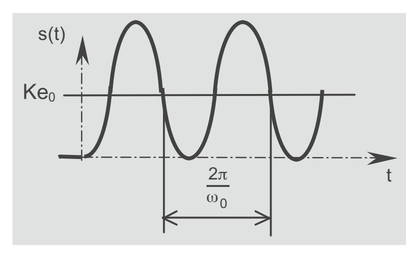
Plus le facteur d'amortissement z est petit, c'est-à-dire moins le système est amorti, plus la pseudo période des oscillations est petite. Elle se rapproche de $2\pi/\omega_0$ quand z se rapproche de zéro.

III-3-4 Système non amorti (si z = 0)

La réponse à une impulsion de poids α est $s(t) = K\alpha\omega_0 \sin\omega_0 t$.

Donc par intégration, la réponse (nulle à t=0) à un échelon de niveau e_0 est immédiatement :

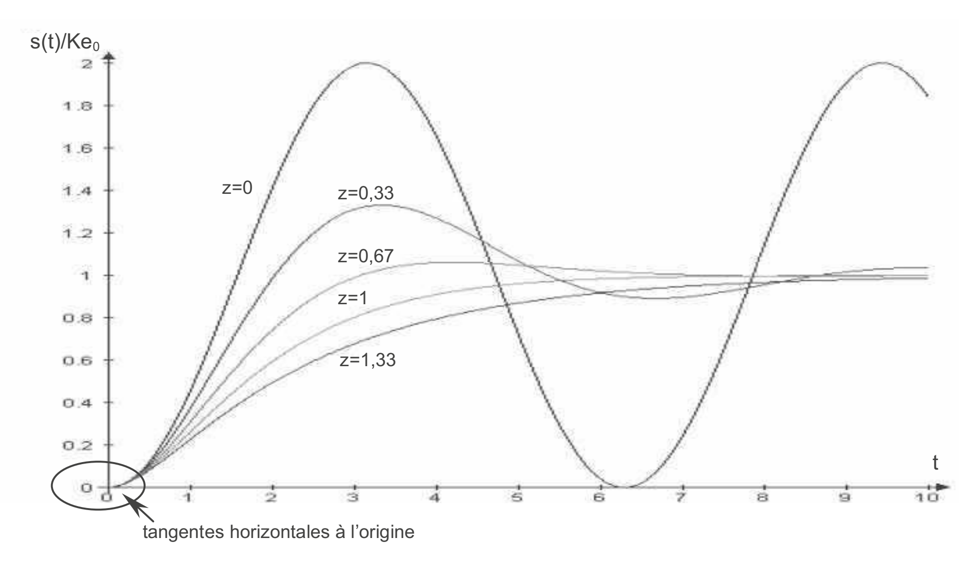
$$s(t) = Ke_0[1 - \cos\omega_0 t]$$



La sortie oscille indéfiniment autour de la valeur Ke_0, à la pulsation ω_0 et donc à la période $2\pi/\omega_0$, ce qui caractérise bien un système à la limite de l'instabilité.

III-3-5 Récapitulatif

Les courbes plus précises ci-dessous permettent de visualiser de manière récapitulative l'influence du facteur d'amortissement sur la réponse indicielle d'un système fondamental du deuxième ordre, comme cela a été fait précédemment pour la réponse impulsionnelle. On vérifiera visuellement le rapport d'intégration/dérivation entre ces courbes et les précédentes.



■ **Erreur statique de position**

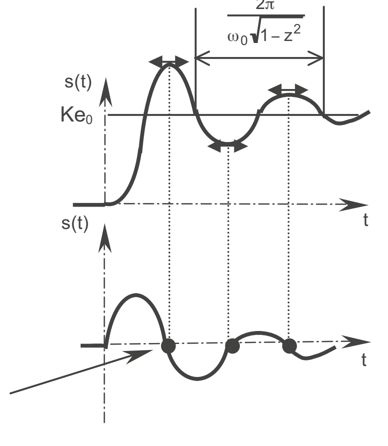
Si $z \neq 0$ (nécessité de stabilité) et sous réserve qu'elle ait un sens (cf. I-3), l'erreur statique de position est clairement $\varepsilon_{s\%} = 1 - K$. Ceci montre encore une fois un résultat attendu : un système asservi est précis si son gain est égal à 1.

III-4 Oscillations et rapidité de la réponse indicielle

Ce paragraphe a pour objet d'approfondir le comportement oscillatoire amorti. On se retreint donc aux systèmes sous amortis ($0 < z < 1$). La réponse à un échelon de niveau e_0 est :

$$s(t) = Ke_0[1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\omega_0 z t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-z^2}\, t + \varphi)]$$

où $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$





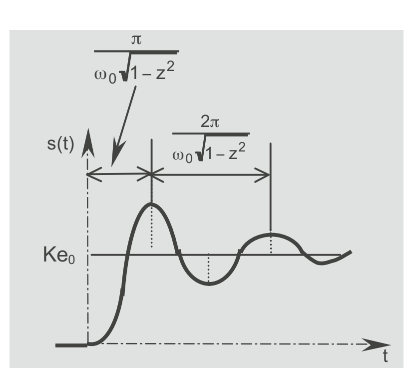
III-4-1 Instants et niveaux des extremums

Puisque la réponse impulsionnelle est la dérivée de la réponse indicielle, les extremums de la réponse indicielle ont lieu aux instants qui annulent la réponse impulsionnelle.

Or celle-ci est : $s(t) = \frac{K\alpha\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\omega_0 zt} \sin \omega_0 \sqrt{1-z^2}\, t$

qui s'annule donc pour les instants : $t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$

L'instant du premier dépassement est donc : $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$



ce qui correspond à la ***demi pseudo période*** de la réponse. Les extremums suivants ont lieu toutes les demi pseudo périodes, bien entendu.

Les dépassements D_k des différents extremums s'obtiennent alors en réinjectant leurs instants dans la relation donnant s(t), par :

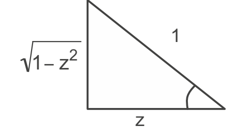
$D_k = \frac{s(t_k) - Ke_0}{Ke_0}$,

dépassement ***relatif*** (exprimé en % de la valeur asymptotique), compté positivement pour k impair et négativement pour k pair.

Soit $D_k = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\frac{k\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} \sin(k\pi + \varphi)$ avec $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$

où $\sin(k\pi + \varphi) = (-1)^k \sin\varphi = (-1)^k \sin\left[\arctan \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right] = (-1)^k \sqrt{1-z^2}$.

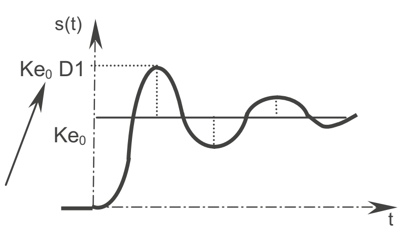
Puisque $\sin\left[\arctan \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right] = \sqrt{1-z^2}$.



Cette relation se démontre par exemple par simple application du théorème de Pythagore dans un triangle rectangle d'hypoténuse unité, comme ci-contre.

D'où $D_k = (-1)^{k+1} e^{-\frac{k\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$

Soit par exemple un premier dépassement : $D_1 = e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$



Attention de ne pas perdre de vue qu'il s'agit d'un dépassement ***relatif***. Le dépassement effectif est donc à multiplier par la valeur asymptotique, soit $Ke_0 D_1$.

Il est intéressant de noter que si les instants des extremums dépendent de la pulsation propre ω_0, le niveau relatif de ces dépassements n'en dépend pas et n'est ***fonction que du facteur d'amortissement z***.

■ **Méthodologie d'identification d'un système du second ordre sous amorti :**

Les développements qui précèdent permettent de définir une méthode d'identification d'un système à un système fondamental du second ordre sous amorti, à partir de sa réponse indicielle :

- la valeur asymptotique permet de connaître le gain K ;
- la mesure du premier dépassement, éventuellement confrontée à celle des suivants, permet de connaître le facteur d'amortissement z ;
- l'instant de ce premier dépassement permet alors, connaissant le facteur d'amortissement z, de connaître la pulsation propre ω_0. Cet instant peut par ailleurs être confronté à la pseudo période des oscillations, qui doit en être le double.

III-4-2 Cas particulier d'un dépassement maxi de 5%

On s'intéresse ici au cas particulier où le premier dépassement, qui est aussi le dépassement maximal, correspond à 5% de la valeur asymptotique. Ce cas est souvent rencontré comme un compromis correct entre une assez bonne rapidité et des oscillations raisonnables.

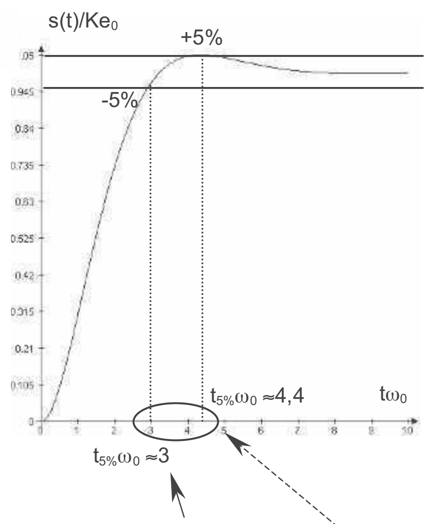
■ Facteur d'amortissement

Le dépassement maximal sera de 5% si $e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} = 0,05$.

Soit si $-\dfrac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}} = \ln 0,05 \approx -3$,

ou encore $z \approx \dfrac{3}{\sqrt{\pi^2+9}} \approx 0,69$.

Ce facteur d'amortissement particulier, qui réduit le dépassement maximal de la réponse indicielle à 5% de sa valeur asymptotique, est important à retenir. On l'approxime très couramment à ***0,7***.



Ce dépassement de 5% sera obtenu à l'instant :

$t_1 \approx \dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-0,69^2}} \approx \dfrac{4,4}{\omega_0}$.

Le graphe de la réponse est alors donné ci-contre où l'axe des temps est normalisé par ω_0.

■ Temps de réponse à 5%

Le temps de réponse à 5% est alors non pas cet instant t_1, mais l'instant $t_{5\%}$ pour lequel la sortie atteint 95% de sa valeur asymptotique. En effet, il faut se souvenir de la définition exacte du temps de réponse à 5% qui est l'instant à partir duquel la sortie reste dans l'intervalle ***fermé***, de ± 5% autour de la valeur asymptotique. Voir chapitre 2, V-5. Celui-ci est donc solution de :

$$0,95 \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{1-0,69^2}} e^{-\omega_0 0,69 t_{5\%}} \sin(\omega_0\sqrt{1-0,69^2}\, t_{5\%} + \varphi) \quad \text{où} \quad \varphi \approx \arctan\frac{\sqrt{1-0,69^2}}{0,69} \approx \frac{\pi}{4}$$

La résolution de cette équation doit se faire numériquement et permet d'en extraire :

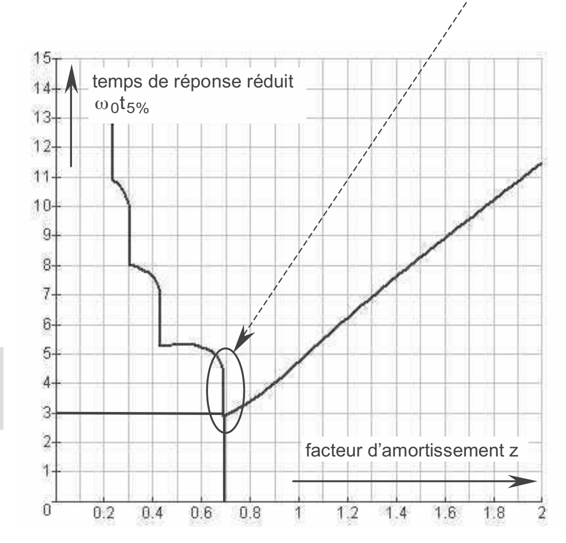
$t_{5\%} \approx \dfrac{2,86}{\omega_0} \approx \dfrac{3}{\omega_0}$ Cette valeur 3 est à retenir.

III-4-3 Rapidité d'un système du 2ème ordre

La démarche précédente peut être conduite pour rechercher le temps de réponse à 5% d'un système du deuxième ordre en fonction de son facteur d'amortissement. On aboutit alors, de la même manière, à la nécessité d'une résolution numérique pour tracer l'abaque ci-contre, qui donne le temps de réponse réduit $\omega_0 t_{5\%}$ en fonction du facteur d'amortissement z.

On peut y noter que la valeur de l'ordre de 3 obtenue précédemment pour z de l'ordre de 0,7 constitue un ***minimum***.

On y repère également la discontinuité (jusqu'à la valeur environ 4,4) précédemment établie.

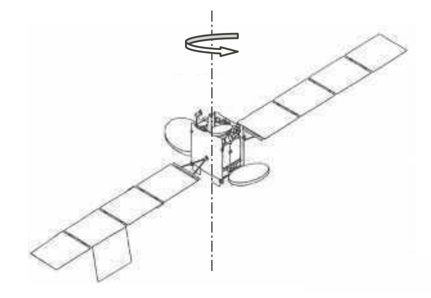


Cette courbe est l'occasion d'un récapitulatif et de dernières observations. Celles-ci sont à mettre en parallèle avec le réseau de courbes donné au paragraphe II-3-5.

- Pour z = 1 (système amorti critique), le temps de réponse à 5% est $t_{5\%} \approx 5/\omega_0$.
- Au delà de cette valeur, la réponse ne présente pas d'oscillations. Le temps de réponse à 5% est alors une fonction continûment croissante de z : plus le système est amorti, plus il est lent.
- En dessous de cette valeur, la réponse présente un dépassement qui atteint 5% lorsque z vaut sensiblement 0,7. Le temps de réponse à 5% pour cette valeur est minimal et vaut $t_{5\%} \approx 3/\omega_0$.
- Pour z inférieur à 0,7 les oscillations sont de plus en plus importantes quand z diminue. Pour toutes les valeurs de z pour lesquelles la réponse présente des extremums qui sont à ± 5% de la valeur asymptotique, le temps de réponse présente des sauts correspondant aux discontinuités de la courbe précédente.
- Globalement, à partir de la valeur 0,7 plus z est petit plus le système est rapide, ou plutôt « nerveux » au sens où le temps de montée, ou l'instant du premier dépassement, sont d'autant plus faibles. ***Mais le temps de réponse à 5% augmente alors du fait de l'importance des oscillations***. De ce point de vue, il est donc plus lent. On retrouve ici la difficulté de caractériser la rapidité d'un système oscillant, déjà signalée au chapitre 2, V-5.

III-4-4 Choix du facteur d'amortissement d'un système asservi du deuxième ordre

Lors de la conception d'un système asservi du second ordre, la maîtrise de certains paramètres permet de pouvoir choisir le facteur d'amortissement z. La question se pose alors souvent en termes de rapidité et de dépassement(s).



Si on prend, par exemple, l'asservissement de position angulaire d'un satellite avec correction tachymétrique, il a été établi (voir chapitre 3, exercice III) que la fonction de transfert de cet asservissement est de la forme :

$$\frac{\text{angle}(p)}{\text{consigne}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{b}{aC}p + \frac{J}{aCA}p^2}$$

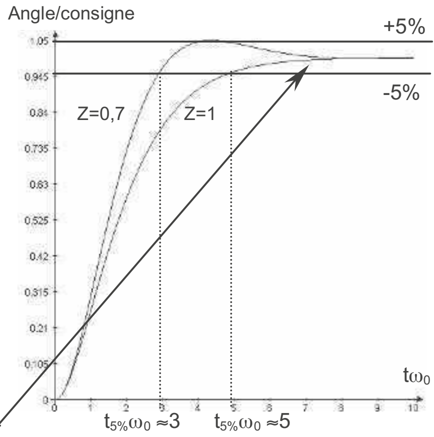
soit une fonction de transfert du deuxième ordre de gain 1, assurant la précision statique en échelon, et où :

$$\begin{cases} \frac{2z}{\omega_0} = \frac{b}{aC} \\ \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{J}{aCA} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{aCA}{J}} \\ z = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{A}{aCJ}} \end{cases}$$

Les constantes a, C et b étant choisies par le concepteur (gains du correcteur et des capteurs), celui-ci maîtrise donc complètement le facteur d'amortissement z.

Il pourra ainsi choisir z = 0,7 pour optimiser le temps de réponse à 5% de l'asservissement, en acceptant un léger dépassement, en l'occurrence de seulement 5%.

Mais, si aucun dépassement n'est toléré, il faudra choisir la valeur z = 1 pour optimiser la rapidité tout en respectant cette contrainte. On s'aperçoit, de plus, que finalement ces deux choix aboutissent, malgré des temps de réponse à 5% assez différents (rapport 3/5), à des rapidités de convergence fort comparables.

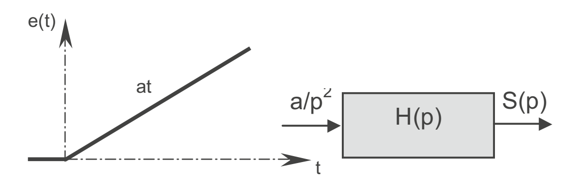


III-5 Réponse à une rampe

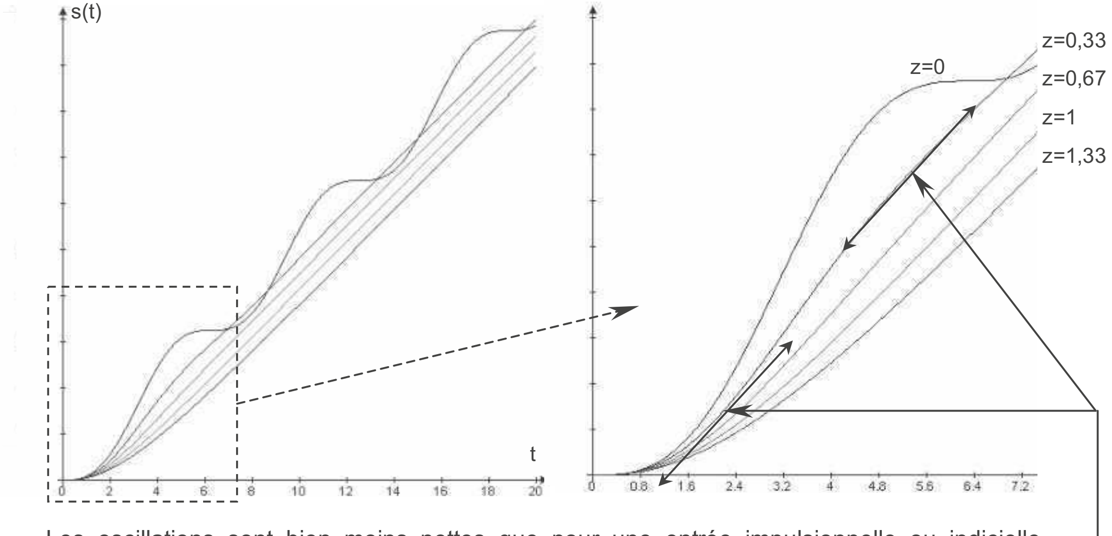
Si l'entrée est un rampe de pente a, la sortie sera, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p)\frac{a}{p^2} = \frac{Ka}{p^2[1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2]}$$

dont il conviendrait de chercher l'antécédent s(t).



On se contentera ici d'en fournir les résultats sous la forme du réseau de courbes suivant, où l'on retrouve les comportements, oscillatoires ou non, selon la valeur du facteur d'amortissement :



Les oscillations sont bien moins nettes que pour une entrée impulsionnelle ou indicielle. Toutefois, on note bien des inflexions de la réponse pour z < 1 qui n'existent pas pour z ≥ 1.

■ **Erreur statique de traînage**

On se place immédiatement dans ***le cas où z ≠ 0***, car sinon la réponse ne converge pas vers une valeur asymptotique. Alors, le théorème de la valeur finale permet d'écrire que :

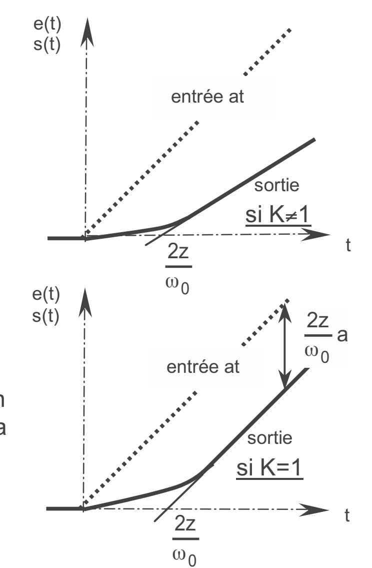
$$\varepsilon_v = \lim_{t\to\infty}(e(t)-s(t)) = \lim_{p\to 0} p(E(p)-S(p))$$

$$= \lim_{p\to 0} p\frac{a}{p^2}[1-\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}] = \lim_{p\to 0}\frac{\frac{a(1-K)}{p}+\frac{2z}{\omega_0}a+\frac{1}{\omega_0^2}ap}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

$$= \frac{2z}{\omega_0}a + \lim_{p\to 0}\frac{a(1-K)}{p}$$

qui diverge, sauf ***si K = 1*** et dans ce cas $\varepsilon_v = \frac{2z}{\omega_0}a$.

Le comportement asymptotique est donc analogue à celui d'un système du premier ordre, $2z/\omega_0$ jouant le même rôle que la constante de temps τ (voir II-4).



III-6 Asservissement de position du chariot filoguidé MP22

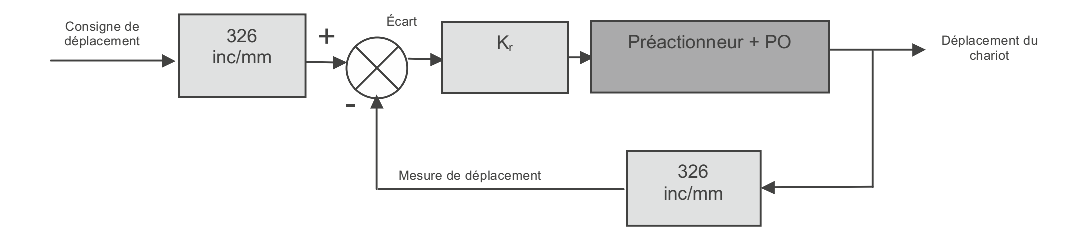
III-6-1 Présentation

Le chariot filoguidé MP22 (cf. paragraphe II-6) peut être asservi en position selon la chaîne fonctionnelle décrite par le schéma bloc ci-dessous :

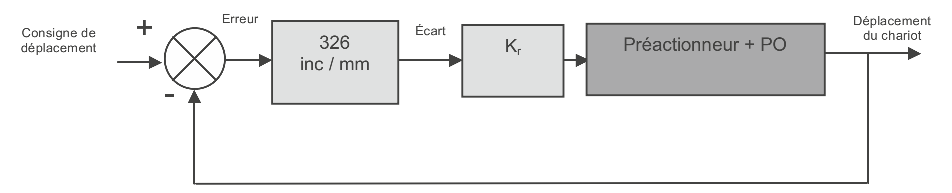
Consigne de déplacement
Adaptateur de consigne
+
-
Écart
Correcteur
Régulateur de vitesse + ampli
Tension de commande
Moteur à courant continu
Déplacement angulaire du rotor
Réducteur
Rotation de la roue
Chariot
Déplacement du chariot
Codeur incrémental
Mesure de déplacement

Mentor FIL
Déplacement chariot
Consigne(s)
Déplacement
C_{nd} = $007F58 inc
C_d = 100 mm
Consigne de déplacement
Régulateur de Déplacement
Commande en Position
Correcteur
K_r = 1.00
Sortie régulateur
IP
M
Réducteur
Codeur
Mesure de x
$000000 inc
0 inc
Roue
Déplacement Maxi
X_{maxi} = 150 mm
Condition de départ
Start
Condition d'arrêt
DEP_{maxi} + Stop

Cette chaîne permet un déplacement asservi en position du chariot selon une valeur de consigne. En fait, plus précisément, c'est l'angle de rotation de la roue qui est asservi. Comme pour l'asservissement de vitesse traité précédemment (paragraphe II-6), la suite de la chaîne, hors boucle, ne comporte que des éléments proportionnels (rapport du réducteur et rayon de la roue) et n'est soumise qu'à de faibles perturbations. Comme pour l'asservissement de vitesse, le traitement se fait sur des grandeurs numériques. Lorsque le correcteur est un correcteur proportionnel de gain K_r et une fois les différentes conversions traduites, la chaîne fonctionnelle peut être décrite par la représentation simplifiée suivante :



Ou encore :



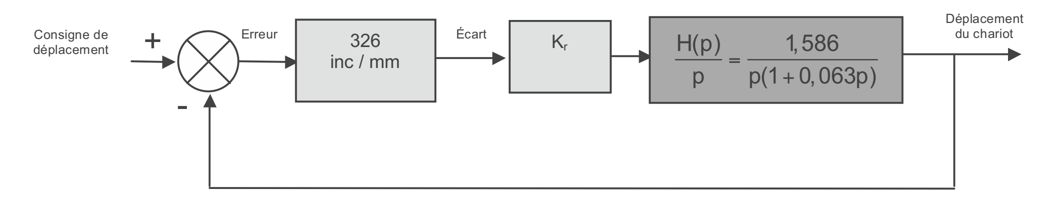
Le bloc {préactionneur + PO} a été décrit par un modèle de comportement au paragraphe II-6-2, à partir d'une commande en échelon en boucle ouverte pour une sortie en vitesse, selon la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1{,}586}{1 + 0{,}063p}$$

S'agissant dans le cas présent d'une sortie en position, il convient d'adjoindre un intégrateur. La fonction de transfert de ce bloc sera donc dans le cas présent :

$$\frac{H(p)}{p} = \frac{1{,}586}{p(1 + 0{,}063p)}$$

D'où le schéma bloc finalement retenu :



III-6-2 Fonction de transfert de l'asservissement

Le schéma précédent permet de calculer la fonction de transfert du modèle d'asservissement de position proposé, en fonction du gain K_r du correcteur :

$$G(p) = \frac{326\,K_r \dfrac{1{,}586}{p(1 + 0{,}063p)}}{1 + 326\,K_r \dfrac{1{,}586}{p(1 + 0{,}063p)}} \quad \text{soit} \quad \boxed{G(p) \approx \frac{1}{1 + \dfrac{1}{517\,K_r}p + \dfrac{0{,}063}{517\,K_r}p^2}}$$

L'asservissement de position se comporte donc comme un système fondamental du deuxième ordre :

- de gain K = 1 (sans dimension) quelle que soit la valeur du gain du correcteur K_r,
- de pulsation propre ω_0 et de facteur d'amortissement z dépendant de K_r selon :

$$\begin{cases} \dfrac{2z}{\omega_0} = \dfrac{1}{517\,K_r} \\ \dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{0{,}063}{517\,K_r} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{517\,K_r}{0{,}063}} = 90{,}6\sqrt{K_r} \\ z = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{517\,K_r}\sqrt{\dfrac{517\,K_r}{0{,}063}} = \dfrac{1}{11{,}4\sqrt{K_r}} \end{cases}$$

Le gain unité traduit la précision de l'asservissement : la position tend asymptotiquement vers la consigne en échelon.

Le comportement oscillatoire ou non, et donc la rapidité de l'asservissement, dépend du réglage du correcteur. Pour $K_r > (1/11{,}4)^2$, le système sera sous amorti (z < 1) et donc la réponse indicielle présentera des oscillations, d'autant plus importantes que K_r sera grand. Les résultats expérimentaux présentés dans la suite illustrent ces propos.

III-6-3 Influence du gain K_r du correcteur

Par exemple, d'après le modèle établi, si le correcteur est réglé à $K_r = 1$ ou $K_r = 0{,}25$, les caractéristiques z et ω_0 sont :

K_r	1	0,25
z	0,088	0,175
ω_0	90,6 rad/s	45,3 rad/s

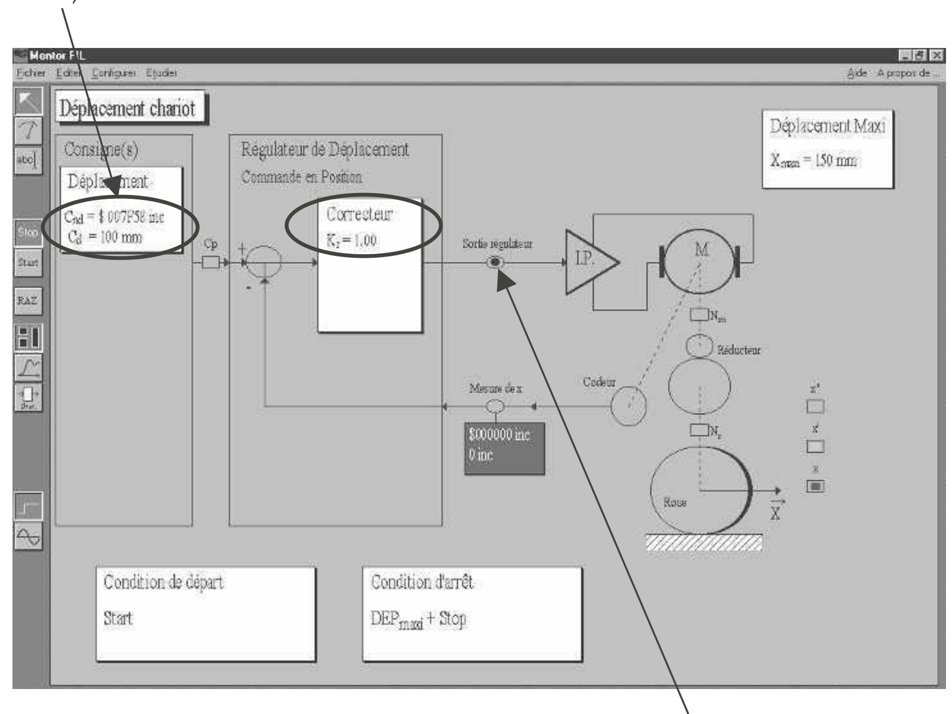
La réponse indicielle sera donc oscillante et on peut prévoir la pseudo période des oscillations ainsi que, par exemple, l'instant (moitié de la pseudo période) et le niveau du premier dépassement :

K_r	1	0,25
Pseudo période des oscillations $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$	0,07 s	0,14 s
Instant du premier dépassement $t_1 = \dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$	0,035 s	0,07 s
Premier dépassement relatif $D_1 = e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$	75,8%	57,2%

On peut alors procéder à un essai pour valider le modèle, pour chacun de ces deux réglages.

■ **Réglage $K_r = 1$**

On règle le gain $K_r = 1$.
Puis, on impose une consigne de déplacement par exemple de 100 mm (36000 inc = 7F58 en hexadécimal).



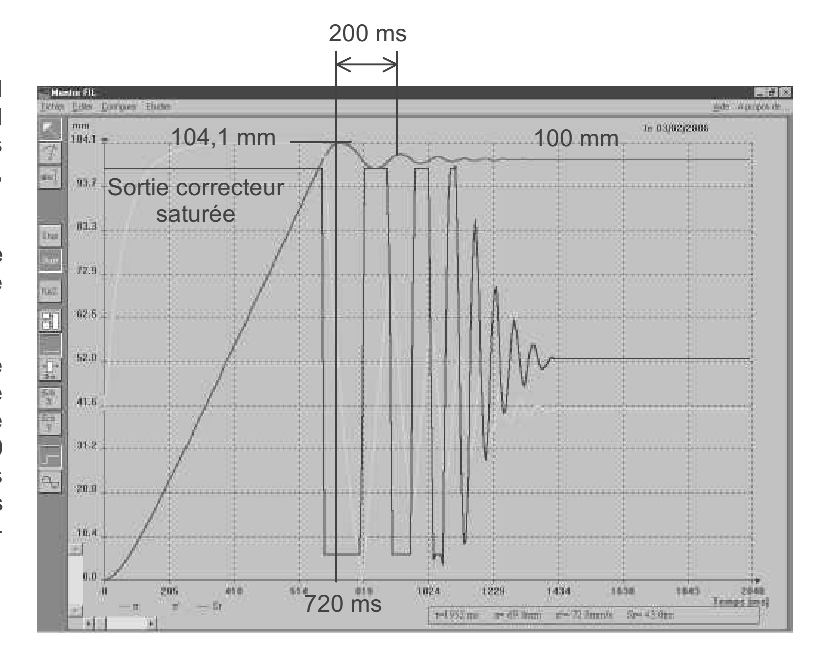
On relève l'évolution temporelle du déplacement, ainsi que celle de la sortie du correcteur.

Il vient le tracé suivant :

On observe tout d'abord que le déplacement tend bien sensiblement vers la consigne de 100 mm, ce qui valide K = 1.

Le système est précis, le chariot effectue bien le déplacement demandé.

Par ailleurs, le système est oscillant, comme attendu (z très faible) : le chariot dépasse les 100 mm (de 4,1 mm), puis recule, ce qui génère les oscillations de va-et-vient observées.



Mais ces oscillations ne correspondent pas aux oscillations attendues avec un modèle fondamental du deuxième ordre :

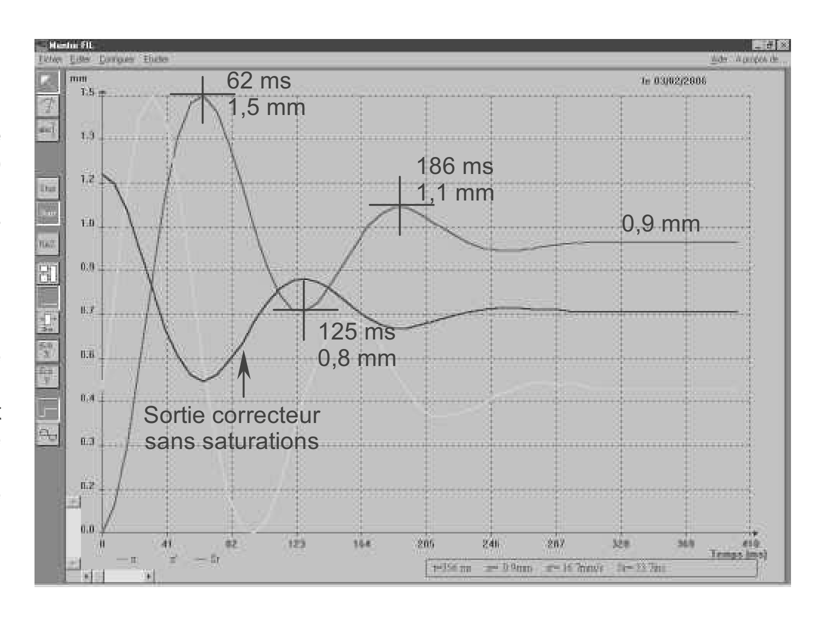
- Elles ne sont pas pseudo périodiques, puisque la durée entre deux extremums est de plus en plus courte : 200 ms entre les deux premiers et de moins en moins ensuite. Ceci alors que modèle prévoit des oscillations pseudo périodiques de pseudo période 70 ms.
- Le premier extremum arrive très tardivement au bout de 720 ms, alors qu'il devrait arriver après une durée égale à la moitié de la pseudo période, soit 35 ms seulement.

Ces phénomènes trouvent leur explication dans la saturation de la sortie du correcteur, non prévue par le modèle. Celle-ci est très claire dans la phase d'approche, puis lors des oscillations, tant que l'écart par rapport à la consigne de 100 mm demeure important : le correcteur fonctionne alors quasiment en tout ou rien. Lorsque l'écart est devenu suffisamment faible pour que la commande ne sature plus, le système fonctionne alors comme un système linéaire, mais il est alors difficile de l'observer tant les oscillations sont alors faibles.

■ **Réglage K_r = 0,25**

Pour éviter la saturation de la commande, on règle le gain à une valeur faible (K_r = 0,25) et on impose une consigne également très faible, par exemple seulement 1 mm. Il vient le tracé ci-contre.

On observe que le déplacement tend vers une valeur légèrement inférieure à la consigne (0,9 au lieu de 1 mm) : le système présente une erreur statique de 10%, ce qui est en désaccord avec le gain K = 1.



Cette légère erreur statique s'explique par la présence de frottements que le gain de correction réglé à $K_r = 0{,}25$, trop faible, ne permet pas de vaincre. Ceux-ci ne sont en effet pas pris en compte dans le modèle.

En ce qui concerne les oscillations, elles sont cette fois assez cohérentes avec le modèle :
- L'instant du premier dépassement, mesuré à t_1 = 62 ms est bien cohérent avec la pseudo période des oscillations, mesurée à T = 124 ms, soit exactement le double.
- Ces valeurs temporelles diffèrent malgré tout légèrement (de -11%) des valeurs prévues qui sont respectivement de 70 et 140 ms. Il est difficile d'interpréter une différence dans ce sens, hormis évoquer d'éventuelles incertitudes de mesure ou de codage d'un K_r si faible.
- Le niveau théorique du premier dépassement est de 57,2 %, soit un déplacement de 1,57 mm. Le déplacement maximal relevé de 1,5 mm est en accord avec cette prévision.

III-7 Approximation d'un système fondamental du 2ème ordre par un système fondamental du 1er ordre

Dans certaines situations, afin de simplifier un modèle dans une première approche, il peut être intéressant d'assimiler un système fondamental du deuxième ordre à un système fondamental du premier ordre. Il va de soi que ceci n'est possible que pour les systèmes amortis (facteur d'amortissement z > 1), dont la réponse aux signaux canoniques ne présente pas d'oscillations. Considérons un tel système, de fonction de transfert :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}=\frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}\ \text{avec}\ \tau_1=\frac{1}{\omega_0(z-\sqrt{z^2-1})}\ \text{et}\ \tau_2=\frac{1}{\omega_0(z+\sqrt{z^2-1})}.$$

Le rapport des constantes de temps s'écrit $\frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{z+\sqrt{z^2-1}}=\frac{1-\sqrt{1-1/z^2}}{1+\sqrt{1-1/z^2}}$

Si z est suffisamment grand, la racine carrée peut être approximée par : $\sqrt{1-1/z^2}=1-1/2z^2$.

Alors $\frac{\tau_2}{\tau_1}\approx\frac{1-1+1/2z^2}{1+1-1/2z^2}=\frac{1}{4z^2-1}$, rapport d'autant plus faible que z est grand.

Ainsi la constante de temps τ_2 peut être négligeable devant τ_1 et la fonction de transfert du système assimilée à la fonction du premier ordre :

$$H(p)\approx\frac{K}{1+\tau_1 p}$$

Par ailleurs, la constante de temps τ_1 de ce système du premier ordre approché peut alors s'écrire :

$$\tau_1=\frac{1}{\omega_0(z-\sqrt{z^2-1})}=\frac{1/z}{\omega_0(1-\sqrt{1-1/z^2})}\ \text{d'où l'approximation}\ \tau_1\approx\frac{1/z}{\omega_0(1-1-1/2z^2)}=\frac{2z}{\omega_0}$$

En conclusion, ***si z est suffisamment grand*** pour pouvoir accepter les deux approximations successives, la fonction de transfert du système du deuxième ordre peut être assimilée à :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}\approx\frac{K}{1+\tau_1 p}\approx\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p}$$

Un tel système du deuxième ordre peut être qualifié de ***très fortement amorti.***

■ Illustration sur la réponse indicielle

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre amorti s'écrit :

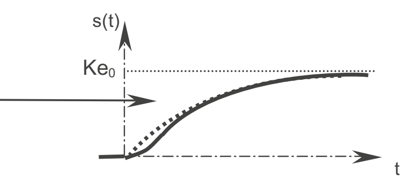
$$s(t)=Ke_0[1-\frac{1}{\tau_1-\tau_2}(\tau_1 e^{-t/\tau_1}-\tau_2 e^{-t/\tau_2})]$$

Lorsque le système du deuxième ordre est très fortement amorti, $\tau_2 << \tau_1$ et donc :

$$s(t) \approx Ke_0[1 - \frac{1}{\tau_1}(\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2})] \approx Ke_0[1 - e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1} e^{-t/\tau_2}] \approx Ke_0[1 - e^{-t/\tau_1}]$$

si t est suffisamment grand.

On reconnaît alors la réponse indicielle d'un système fondamental du premier ordre de constante de temps τ_1. Ainsi, pour des temps suffisamment éloignés de l'origine, le modèle du premier ordre décrit correctement la réponse indicielle du système du second ordre très fortement amorti.





IV - SYSTÈMES FONDAMENTAUX DU 1er ET 2ème ORDRE : ALGORITHMES ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES

IV-1 Introduction : notion d'échantillonnage

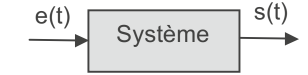
L'objet de ce paragraphe est de mettre au point un algorithme de résolution numérique des équations différentielles caractéristiques des systèmes fondamentaux du premier, puis du deuxième ordre. Ces algorithmes, pouvant être mis en œuvre à l'aide d'outils de programmation, constituent une première approche, modeste, des systèmes échantillonnés. Ici, l'outil de programmation retenu sera un simple tableur. Cela éloigne le propos de la réalité technologique des systèmes échantillonnés implémentés sur des microcontrôleurs, mais présente l'avantage pédagogique d'une mise en œuvre accessible immédiatement.

Pour cela la variable temps est discrétisée, c'est-à-dire que l'intervalle temporel de simulation est composé d'un nombre fini d'instants, définis à l'intervalle régulier T_e appelé ***période d'échantillonnage*** :

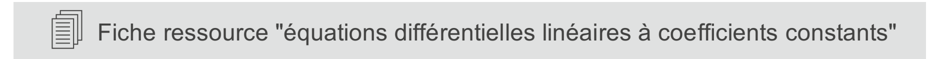
$T \in \{0, T_e, 2T_e, 3T_e, \ldots, nT_e\}$
si nT_e est la durée de la simulation

Des considérations qui dépassent le cadre de cet ouvrage (théorème de Shannon) permettent d'établir des conditions pour que la période d'échantillonnage soit « suffisamment petite » afin de garantir la validité de la discrétisation.

On ne s'intéresse alors qu'aux valeurs de la réponse du système à ces instants, connaissant l'entrée du système à ces mêmes instants, ainsi que les conditions initiales.



Ces conditions initiales dépendent de l'ordre du système. Ce sont classiquement la valeur initiale de la sortie pour le système du premier ordre, à laquelle il convient d'ajouter la valeur initiale de la dérivée première de la sortie pour le système du deuxième ordre. Voir V-2-2.


Fiche ressource "équations différentielles linéaires à coefficients constants"

On rappelle que sous les conditions dites de Heaviside, ces conditions initiales sont nulles.

IV-2 Algorithme de dérivation

IV-2-1 Approximations

Pour des raisons de causalité (voir chapitre 3, I-2), on assimilera la dérivée d'une fonction f à l'instant t à sa dérivée à gauche au même instant :

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

De même pour la dérivée seconde :

$$\frac{d^2f}{dt^2}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{df}{dt}(t) - \frac{df}{dt}(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

La durée la plus petite accessible étant la période d'échantillonnage T_e, les dérivées seront donc approximées par :

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{f(t) - f(t - T_e)}{T_e} \quad \text{et donc} \quad \frac{d^2f}{dt^2}(t) = \frac{f(t) - 2f(t - T_e) + f(t - 2T_e)}{T_e^2}$$

IV-2-2 Nécessité de conditions initiales

La nécessité de conditions initiales apparaît clairement dans les écritures précédentes.

Le calcul de la dérivée première à l'instant initial n'est pas possible pour des raisons de causalité : elle nécessiterait la connaissance de la valeur à l'instant $-T_e$ ce qui n'a pas de sens. Son calcul à l'instant suivant nécessite la connaissance de la valeur initiale f(0) de la fonction. Ensuite l'algorithme est initié et la dérivée première à chaque instant peut être calculée à partir de la valeur de la fonction à ce même instant et de sa valeur à l'instant précédent.

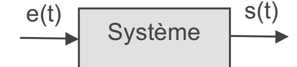
Concernant la dérivée seconde, il apparaît de la même manière que les valeurs de la fonction à l'instant initial f(0) et à l'instant suivant $f(T_e)$ doivent être connues. Cela peut aussi se traduire par la nécessité de connaître la valeur initiale de la fonction et de sa dérivée première puisque alors celle-ci donne accès à $f(T_e)$ par linéarisation (voir V-4-1). L'algorithme est alors initié à partir de l'instant $2T_e$ et permet de calculer la dérivée seconde à chaque instant à partir des valeurs de la fonction à ce même instant et aux deux instants précédents. On retrouve ici les résultats bien connus des équations différentielles : une équation différentielle d'ordre n > 1 nécessite n conditions initiales, celle de la fonction et celles de ses n - 1 dérivées d'ordre $i \in [1, n-1]$ à l'instant initial.

IV-3 Système fondamental du premier ordre

IV-3-1 Algorithme

On s'intéresse au système fondamental du premier ordre, de gain unitaire pour simplifier, qui est le système d'entrée e(t) et de sortie s(t), obéissant à l'équation différentielle :

$$s(t) + \tau \frac{ds}{dt}(t) = e(t)$$



où τ est la constante de temps.

L'entrée et la sortie étant échantillonnées à la période T_e, en utilisant l'approximation précédemment construite de la dérivée, cette équation différentielle se traduit par :

$$s(t) + \tau \frac{s(t) - s(t - T_e)}{T_e} = e(t)$$

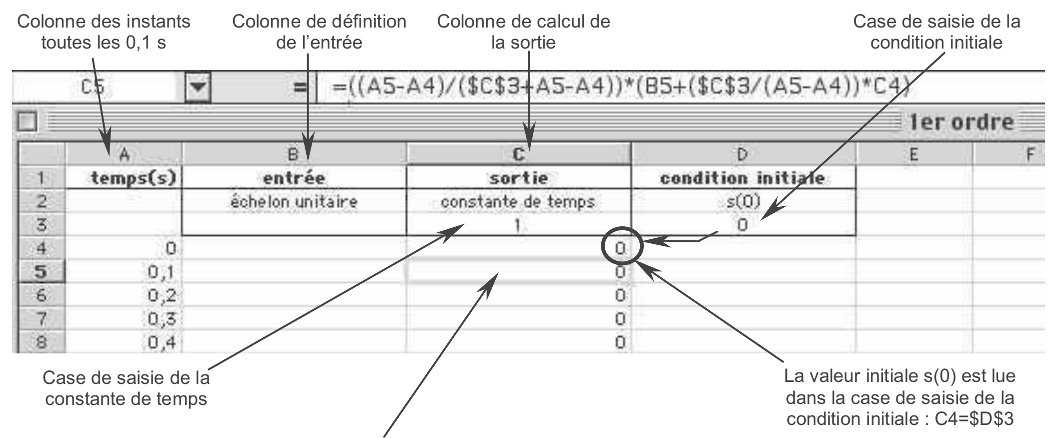
Ce qui permet d'exprimer la valeur de la sortie à l'instant t en fonction de sa valeur précédente et de la valeur de l'entrée au même instant :

$$\boxed{s(t) = \frac{T_e}{\tau + T_e}\left[e(t) + \frac{\tau}{T_e} s(t - T_e)\right]}$$

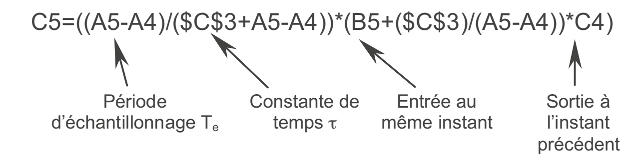
Cette relation, initiée par la valeur s(0) de la sortie à l'instant initial, constitue l'algorithme de calcul de s(t) pour t > 0.

IV-3-2 Mise en œuvre sur un tableur

Cet algorithme peut alors être mise en œuvre sur un tableur pour, par exemple, une période d'échantillonnage de 0,1 s :



À partir de l'instant T_e l'algorithme est programmé selon :



IV-3-3 Réponse à un échelon unitaire

On peut alors calculer la réponse du système, choisi par exemple avec une constante de temps $\tau = 1$ s, à un échelon unitaire, sous les conditions de Heaviside ($s(0) = 0$). Il faut pour cela compléter la colonne des entrées par la valeur 1 à chaque instant.

On relève alors :

- à l'instant $t = 1$ s $= \tau$: une sortie $s(1) \approx 61{,}4\%$;
- à l'instant $t = 3$ s $= 3\tau$: une sortie $s(3) \approx 94{,}2\%$.

Ces valeurs ne sont pas exactement les valeurs attendues de 63% et 95%. L'erreur est due à l'imprécision de l'échantillonnage.

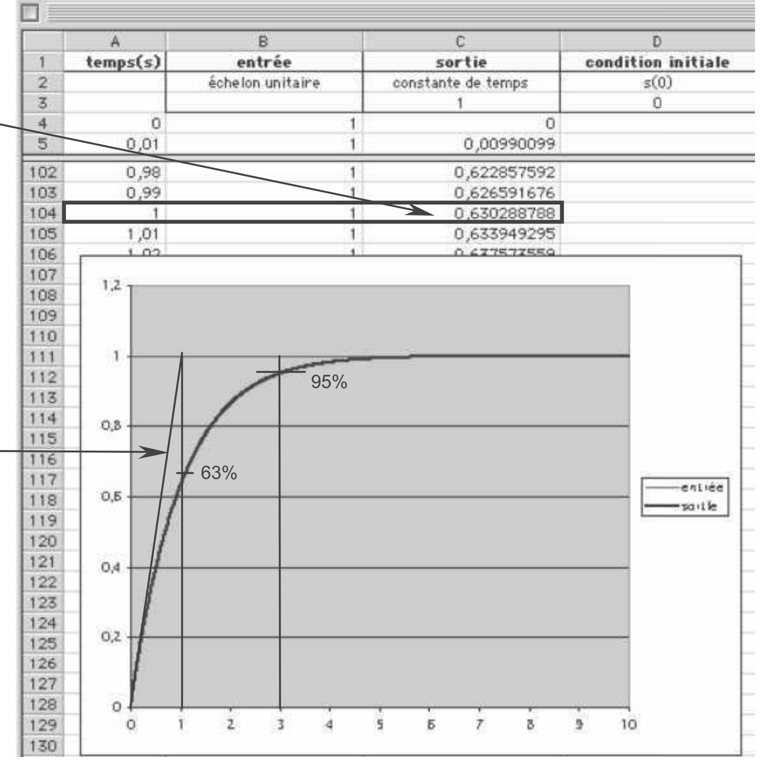
	A	B	C	D
1	temps(s)	entrée	sortie	condition initiale
2		échelon unitaire	constante de temps	s(0)
3			1	0
4	0	1	0	
5	0,1	1	0,090909091	
6	0,2	1	0,173553719	
7	0,3	1	0,248685199	
8	0,4	1	0,316986545	
9	0,5	1	0,379078677	
10	0,6	1	0,43552607	
11	0,7	1	0,486841882	
12	0,8	1	0,53349262	
13	0,9	1	0,575902382	
14	1	1	0,614456711	
15	1,1	1	0,649506101	
16	1,2	1	0,681369182	
17	1,3	1	0,71033562	
18	1,4	1	0,736668746	
19	1,5	1	0,760607951	
20	1,6	1	0,782370864	
21	1,7	1	0,802155331	
22	1,8	1	0,82014121	
23	1,9	1	0,836492009	
24	2	1	0,851356372	
25	2,1	1	0,864869429	
26	2,2	1	0,877154026	
27	2,3	1	0,888321842	
28	2,4	1	0,898474402	
29	2,5	1	0,907704002	
30	2,6	1	0,916094547	
31	2,7	1	0,923722316	
32	2,8	1	0,930656651	
33	2,9	1	0,936960591	
34	3	1	0,942691447	
35	3,1	1	0,947901315	

La précision peut être améliorée en prenant une période non plus de 0,1 s, mais par exemple de 0,01 s.

On relève alors :

- à l'instant t = 1 s= τ : une sortie s(1) ≈ 63% ;
- à l'instant t = 3 s = 3τ : une sortie s(3) ≈ 94,9% (non visible ci-contre).

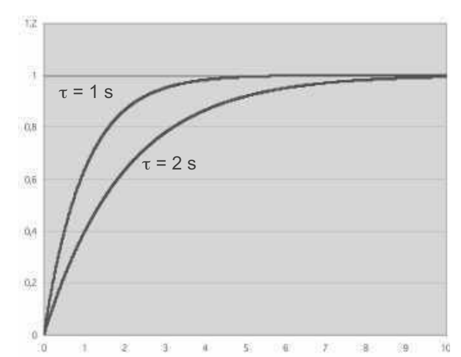
On peut alors utiliser les fonctionnalités de grapheur du tableur pour tracer l'évolution temporelle de la sortie et la compléter du tracé de la tangente à l'origine qui vérifie bien les propriétés attendues.



	A	B	C	D
1	temps(s)	entrée	sortie	condition initiale
2		échelon unitaire	constante de temps	s(0)
3			1	0
4	0	1	0	
5	0,01	1	0,00990099	
102	0,98	1	0,622857592	
103	0,99	1	0,626591676	
104	1	1	0,630288788	
105	1,01	1	0,633949295	

■ Influence de la constante de temps

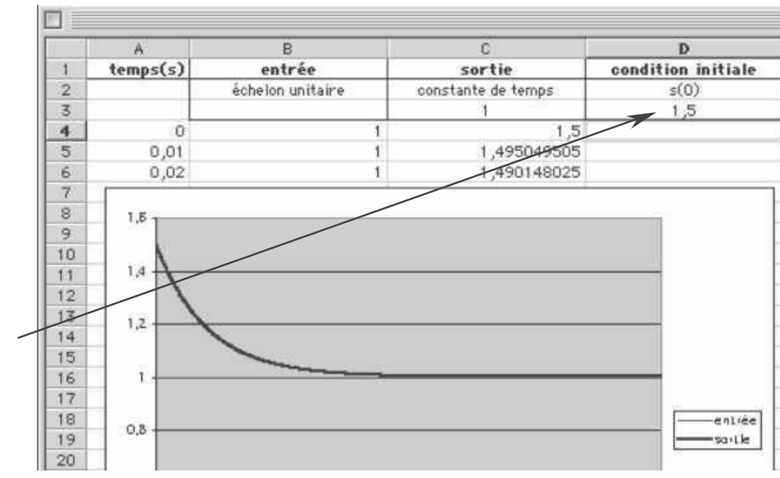
L'influence de la constante de temps s'observe clairement en traçant la réponse pour plusieurs valeurs de celle-ci, par exemple ci-contre pour les valeurs 1 et 2 secondes.



■ Modification de la condition initiale

L'algorithme programmé permet par ailleurs de simuler la réponse du système pour une condition initiale non nulle, par exemple ci-dessous pour s(0) = 1,5.

Il suffit pour cela de modifier la valeur dans la case correspondante pour que l'algorithme soit initié en conséquence.



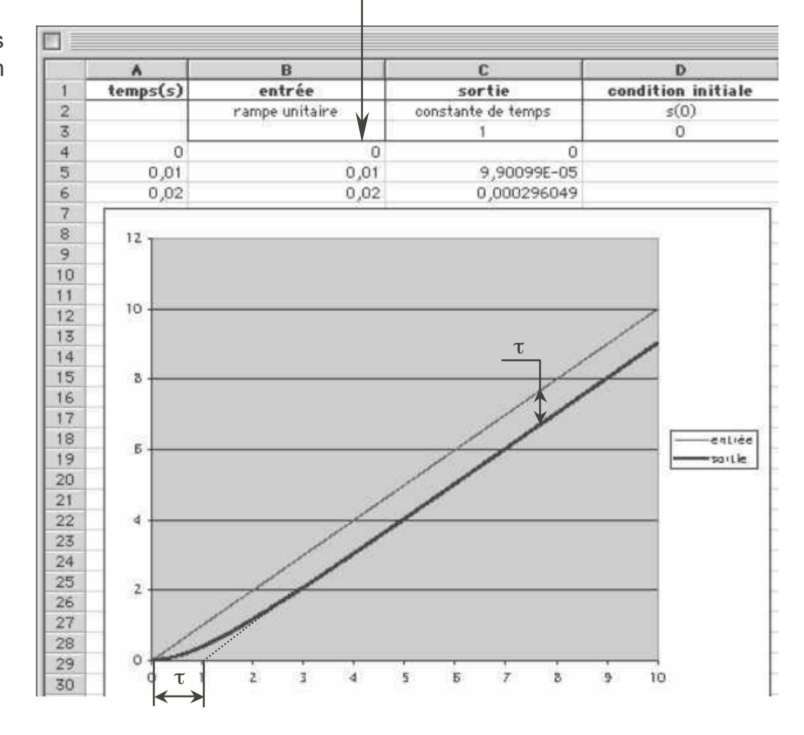
	A	B	C	D
1	temps(s)	entrée	sortie	condition initiale
2		échelon unitaire	constante de temps	s(0)
3			1	1,5
4	0	1	1,5	
5	0,01	1	1,495049505	
6	0,02	1	1,490148025	

IV-3-4 Réponse à une rampe unitaire

La modification de la colonne des entrées permet de solliciter le système à souhait. Par exemple selon une rampe unitaire.

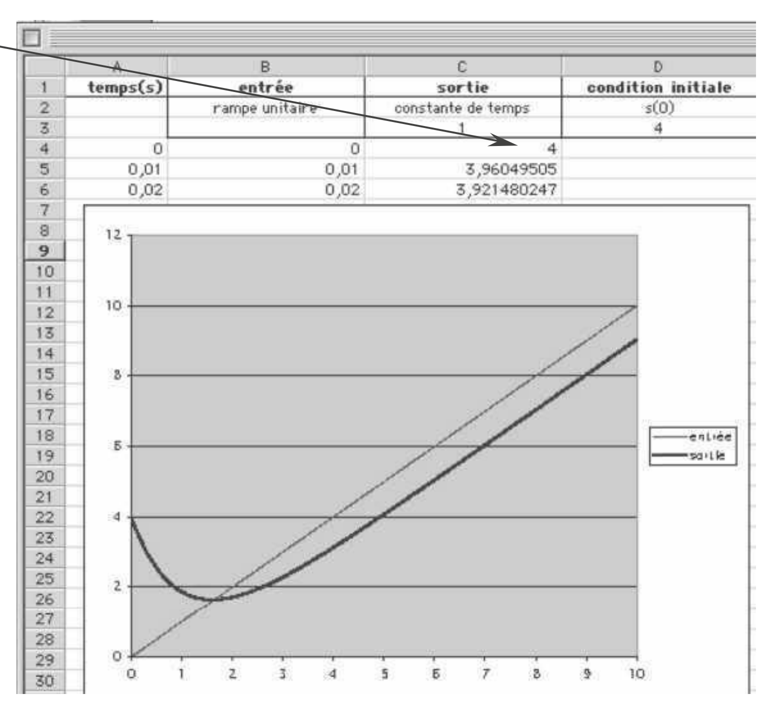
■ **Avec une condition initiale nulle**

On y vérifie les résultats attendus pour un gain unitaire (cf. II-4).



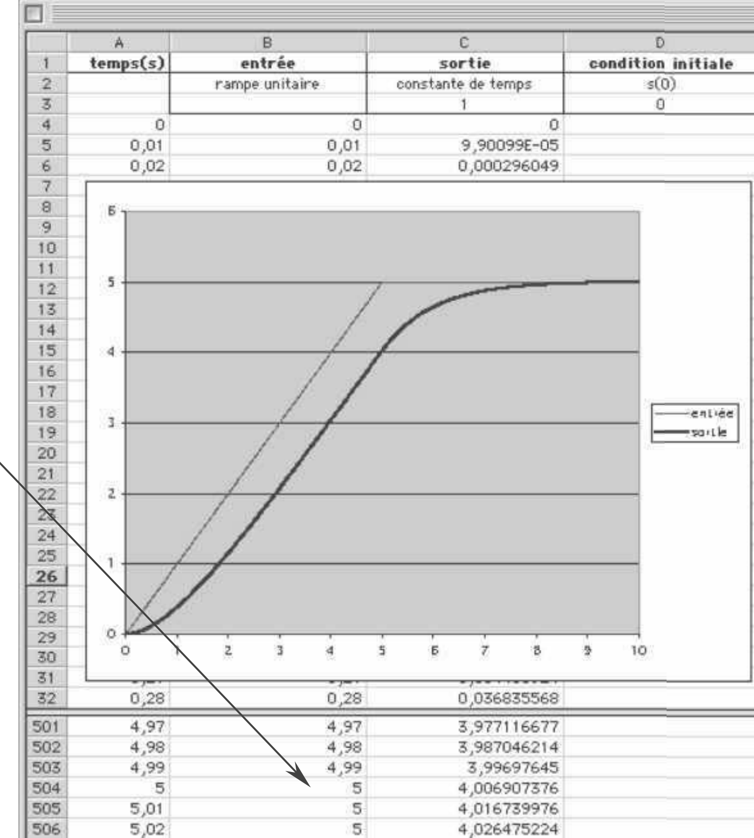
■ **Avec une condition initiale non nulle**

Par exemple pour s(0) = 4.



■ **Demi trapèze**

Il s'agit, à partir d'une condition initiale nulle, d'une sollicitation d'abord en rampe, par exemple unitaire, puis maintenue constante à partir d'un certain niveau atteint (ici la valeur 5).

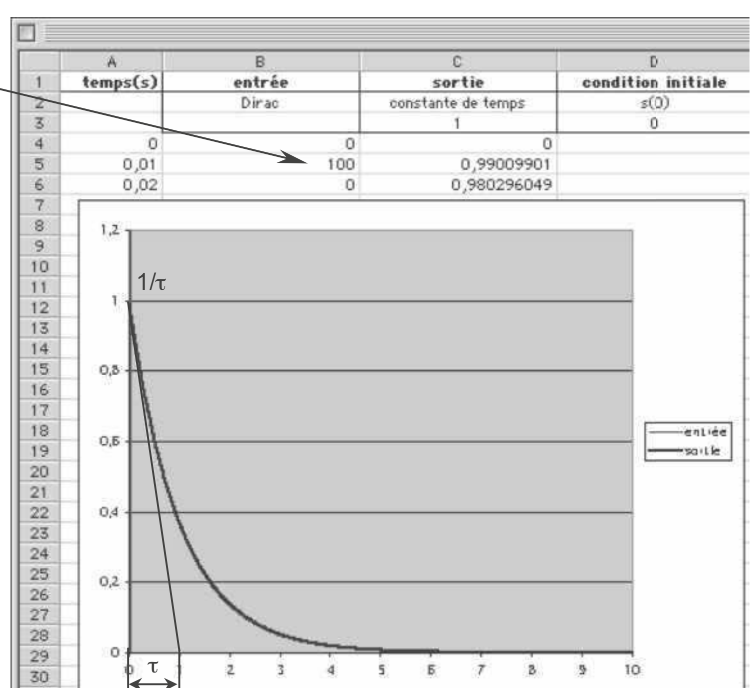


	A	B	C	D
1	temps(s)	entrée	sortie	condition initiale
2		rampe unitaire	constante de temps	s(0)
3			1	0
4	0	0	0	
5	0,01	0,01	9,90099E-05	
6	0,02	0,02	0,000296049	
32	0,28	0,28	0,036835568	
501	4,97	4,97	3,977116677	
502	4,98	4,98	3,987046214	
503	4,99	4,99	3,99697645	
504	5	5	4,006907376	
505	5,01	5	4,016739976	
506	5,02	5	4,026475224	

IV-3-5 Réponse impulsionnelle

Le signal de Dirac est assimilé à un créneau de durée (T_e) et de niveau $1/T_e$.

On y vérifie les résultats attendus pour un gain unitaire (cf. II-2).



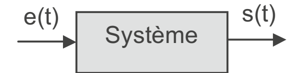
	A	B	C	D
1	temps(s)	entrée	sortie	condition initiale
2		Dirac	constante de temps	s(0)
3			1	0
4	0	0	0	
5	0,01	100	0,99009901	
6	0,02	0	0,980296049	

IV-4 Système fondamental du deuxième ordre

IV-4-1 Algorithme

On s'intéresse au système fondamental du deuxième ordre, de gain unitaire pour simplifier, qui est le système d'entrée e(t) et de sortie s(t), obéissant à l'équation différentielle :

$$s(t) + \frac{2z}{\omega_0}\frac{ds}{dt}(t) + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}(t) = e(t)$$



où z est le facteur d'amortissement et ω_0 la pulsation propre.

L'entrée et la sortie étant échantillonnées à la période T_e, en utilisant l'approximation précédemment construite des dérivées première et seconde, cette équation différentielle se traduit par :

$$s(t) + \frac{2z}{\omega_0}\frac{s(t)-s(t-T_e)}{T_e} + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{s(t)-2s(t-T_e)+s(t-2T_e)}{T_e^2} = e(t)$$

Ce qui permet d'exprimer la valeur de la sortie à l'instant t en fonction de ses deux valeurs précédentes et de la valeur de l'entrée au même instant :

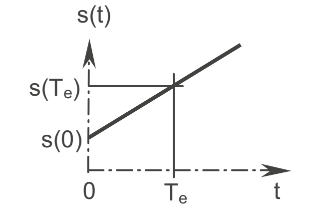
$$\boxed{s(t) = \frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_0 T_e}+\frac{1}{\omega_0^2 T_e^2}}\left[e(t) + \frac{2}{\omega_0 T_e}\left[z + \frac{1}{\omega_0 T_e}\right]s(t-T_e) - \frac{1}{\omega_0^2 T_e^2}s(t-2T_e)\right]}$$

Cette relation, initiée par les valeurs s(0) et $s(T_e)$ de la sortie, constitue l'algorithme de calcul de s(t) pour $t > T_e$.

Par ailleurs, puisque $\frac{ds}{dt}(t) = \frac{s(t)-s(t-T_e)}{T_e}$, il vient : $s(t) = s(t-T_e) + T_e\frac{ds}{dt}(t)$.

Donc $s(T_e) = s(0) + T_e\frac{ds}{dt}(T_e) \boxed{\approx s(0) + T_e\frac{ds}{dt}(0)}$

si T_e est <u>suffisamment faible</u>.



Ceci montre que l'on peut accéder à $s(T_e)$ à partir de s(0) et de $\frac{ds}{dt}(0)$.

Il s'agit en fait de la simple linéarisation figurée ci-contre, qui revient à confondre la dérivée à gauche en T_e avec la dérivée à droite en 0.

Ainsi l'algorithme peut également être classiquement initié par les valeurs de s(0) et de $\frac{ds}{dt}(0)$.

IV-4-2 Mise en œuvre sur un tableur

Mise à part la nécessité de deux conditions initiales, la mise en œuvre de cet algorithme sur un tableur se fait selon la même méthode que précédemment pour le système fondamental du premier ordre :

2ème ordre

	A	B	C	D	E
1	temps(s)	entrée	sortie	condition initiale 1	condition initiale 2
2		échelon unitaire	facteur d'amortissement	s(0)	s'(0)
3			0,2	0	0
4			pulsation propre		
5			2		
6	0		0		
7	0,01		0		
8	0,02		0		
9	0,03		0		

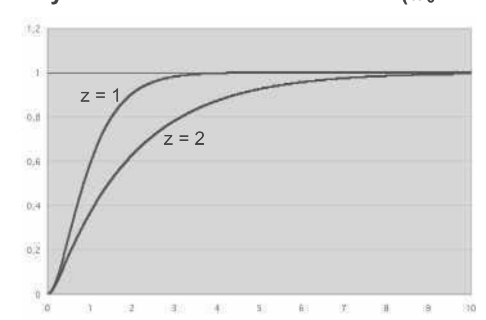
L'algorithme est programmé à partir de l'instant $2T_e$.

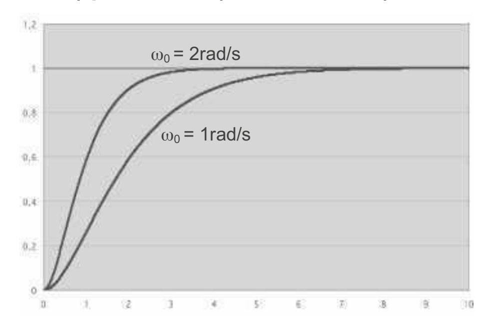
La valeur $s(T_e)$ est calculée à partir de s(0) et de s'(0).

IV-4-3 Réponse à un échelon unitaire

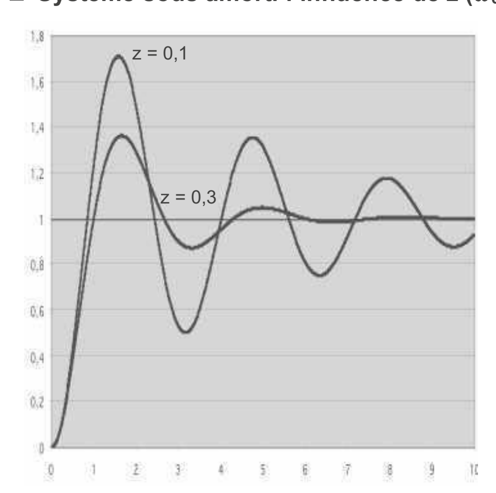
La simulation de la réponse à un échelon unitaire sous les conditions de Heaviside (conditions initiales nulles) permet d'observer l'influence du facteur d'amortissement et de la pulsation propre :

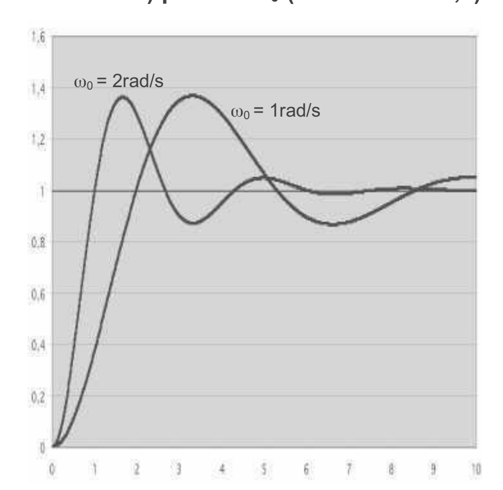
■ **Système amorti : influence de z (ω_0 constante = 2 rad/s) puis de ω_0 (z constant = 1)**





■ **Système sous amorti : influence de z (ω_0 constante = 2 rad/s) puis de ω_0 (z constant = 0,3)**





On vérifie que les niveaux des dépassements ne dépendent pas de la pulsation propre.

■ **Système sous amorti : étude quantitative des oscillations**

On peut vérifier :

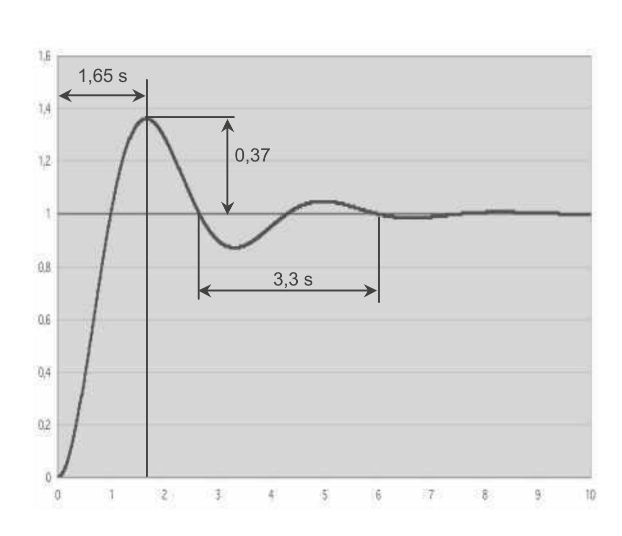
- la pseudo période : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$
- le niveau des dépassements k :

$$D_k = (-1)^{k+1} e^{-\frac{k\pi z}{\sqrt{1-z^2}}},$$

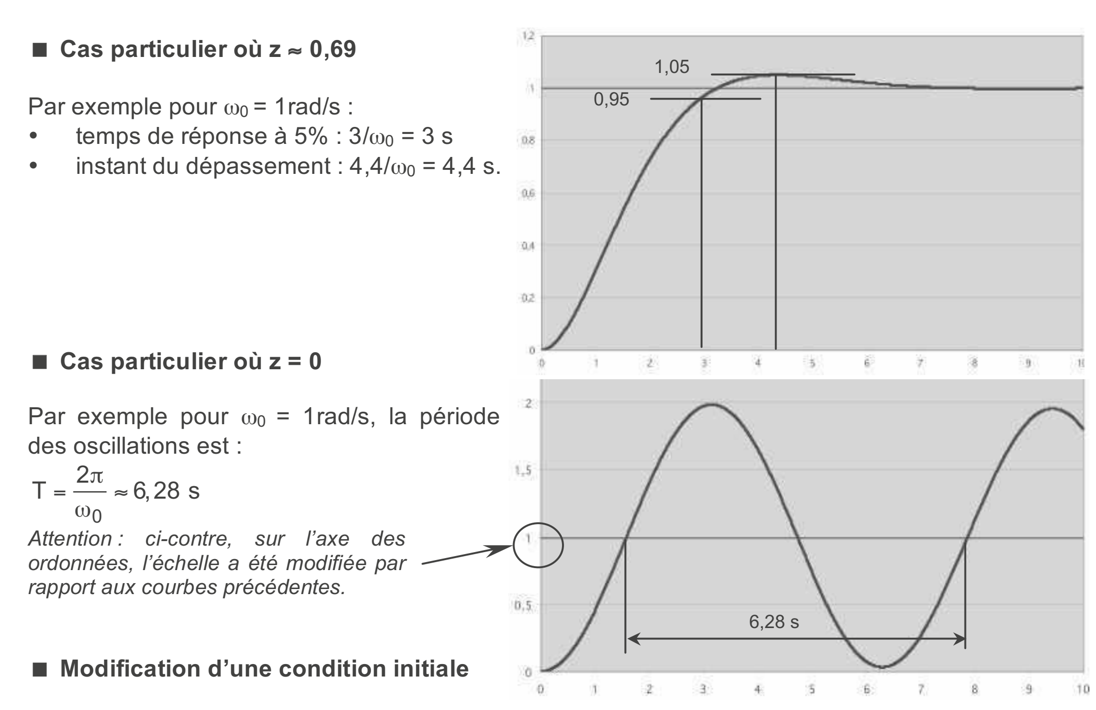
soit $D_1 = e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$

- l'instant du premier dépassement :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} = \frac{T}{2}$$



Par exemple pour z = 0,3 et ω_0 = 2 rad/s :
T = 3,3 s - D_1 = 0,37 - t_1 = 1,65 s



■ Cas particulier où z ≈ 0,69

Par exemple pour ω_0 = 1rad/s :

- temps de réponse à 5% : $3/\omega_0$ = 3 s
- instant du dépassement : $4{,}4/\omega_0$ = 4,4 s.

■ Cas particulier où z = 0

Par exemple pour ω_0 = 1rad/s, la période des oscillations est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 6{,}28 \text{ s}$$

Attention : ci-contre, sur l'axe des ordonnées, l'échelle a été modifiée par rapport aux courbes précédentes.

■ Modification d'une condition initiale

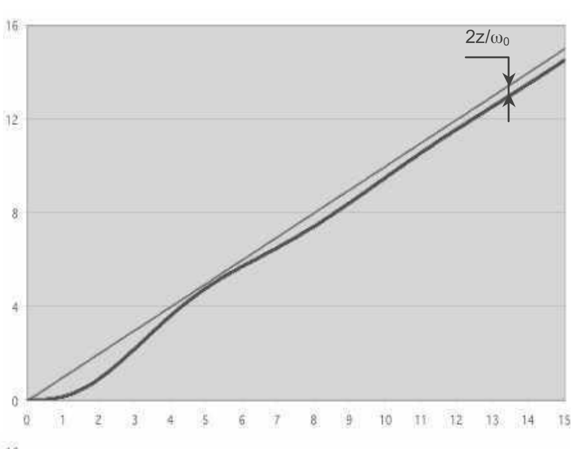
Si par exemple on modifie la condition initiale sur la dérivée (ici non nulle mais égale à 1), la réponse est modifiée. En particulier la tangente initiale à la courbe est évidemment en conséquence de pente 1, mais on observe également clairement un dépassement supérieur à celui obtenu avec une dérivée initiale nulle, ce qui satisfait le bon sens :

2ème ordre

	A	B	C	D	E	F
1	temps(s)	entrée	sortie	condition initiale 1	condition initiale 2	
2		échelon unitaire	facteur d'amortissement	s(0)	s'(0)	
3			0,3	0	1	
4			pulsation propre			
5			2			
6	0	1	0			
7	0,01	1	0,01			
8	0,02	1	0,020268669			
9	0,03	1	0,030798658			
10	0,04	1	0,041582606			
11	0,05	1	0,052613143			
37	0,31	1	0,401980487			

Légende du graphique : entrée, sortie. Axe des ordonnées : 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1 ; 1,2 ; 1,4 ; 1,6. Axe des abscisses : 0 à 10.

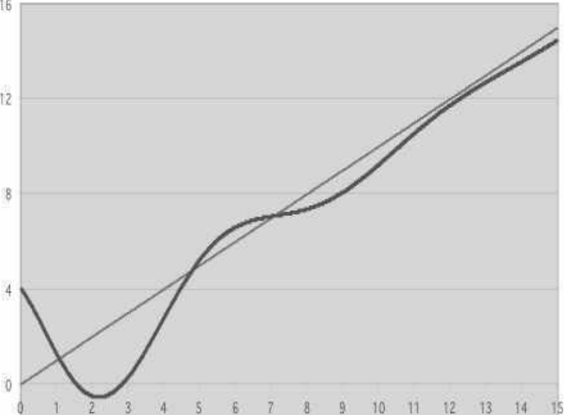
IV-4-4 Réponse à une rampe unitaire



■ Avec les conditions initiales nulles

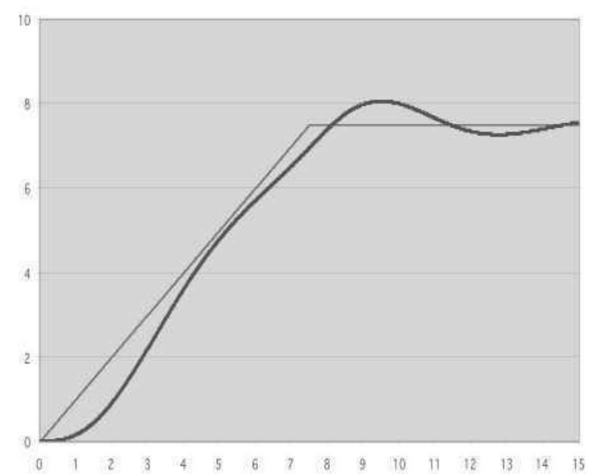
Par exemple ci-contre pour :
$z = 0{,}25$
$\omega_0 = 1\text{rad/s}$.

On y vérifie les résultats attendus :
- oscillations, puisque $z < 1$
- comportement asymptotique parallèle à la sollicitation, puisque le gain est unitaire.



■ Modification des conditions initiales

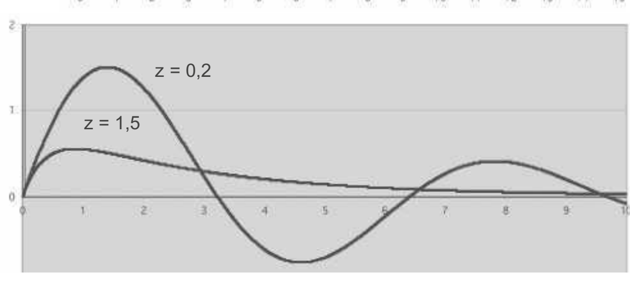
Par exemple pour $s(0) = 4$ et $s'(0) = -2$ on observe une forte modification du régime transitoire en conséquence. Par contre le régime permanent (droite asymptote) est bien entendu toujours le même.



■ Demi trapèze

Sous conditions initiales nulles, toujours par exemple pour :
$z = 0{,}25$
$\omega_0 = 1\text{rad/s}$.

IV-4-5 Réponse impulsionnelle

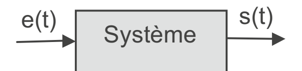


On rappelle ci-contre l'allure des réponses impulsionnelles d'un système amorti et d'un système sous amorti.

V - SYSTÈME À RETARD PUR

V-1 Définition

Le système à retard pur est le système monovariable ***non linéaire*** d'entrée e(t) et de sortie s(t), décrit par l'équation :



$$s(t) = e(t - R)$$

où R est une constante positive, bien évidemment homogène à un temps, appelée ***retard***. La valeur de la sortie est celle qu'avait l'entrée R secondes plus tôt.

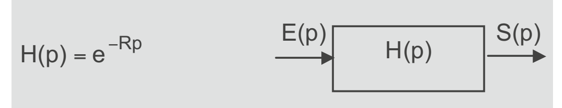
La non-linéarité de ce système se montre simplement en constatant par exemple que :

$$s(2t) = e(2t - R) \neq 2s(t)$$

Malgré sa non linéarité, on peut définir une fonction de transfert à ce système compte tenu du théorème du retard (relire le paragraphe III-2 du chapitre 3 si nécessaire). Celui-ci permet en effet d'écrire que :

$$S(p) = e^{-Rp}E(p)$$

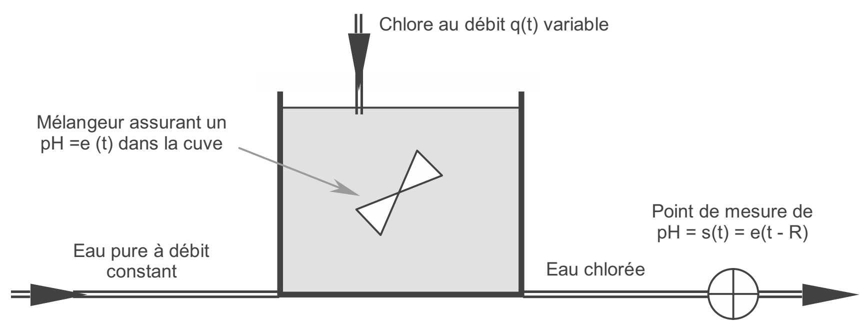
La fonction de transfert du système est donc :



Un tel système est ***stable*** puisque qu'il ne modifie pas la grandeur d'entrée, il opère seulement un décalage temporel.

■ **Exemple**

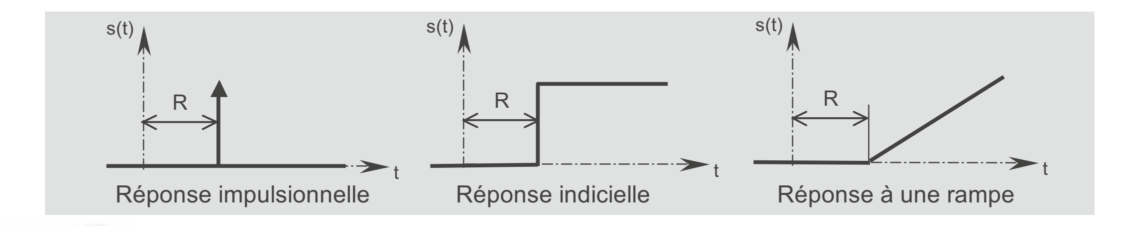
Ces modèles peuvent traduire la présence de jeux en mécanique. Ils se rencontrent également dans des chaînes de mesure, par exemple lorsqu'une prise d'information ne s'effectue pas à l'endroit précis où l'on désire effectuer le contrôle et que la grandeur mesurée met un certain temps à se propager. On peut citer l'exemple d'une ligne de mélange de deux fluides (ici de l'eau et du chlore dans une usine de traitement des eaux), où le pH dans la cuve est mesuré en aval avec un temps de retard dépendant du débit du mélange :



Si la mesure du pH effectuée avec un retard R sert d'information pour asservir le débit de chlore au pH attendu, la description de l'asservissement devra prendre en compte ce retard dans la boucle de retour.

V-2 Réponses aux entrées canoniques

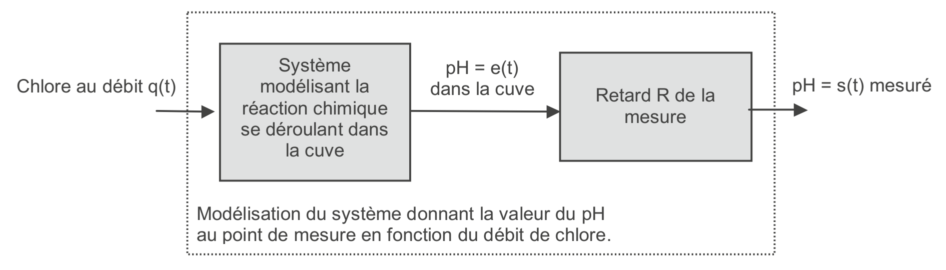
Celles-ci sont immédiates, puisqu'il s'agit d'un simple décalage temporel des entrées, sans modification :



V-3 Retard d'un processus

En pratique, un système à retard pur n'existe pas seul. Il apparaît toujours en série avec un autre système, signifiant que la sortie de celui-ci se trouve retardée.

Par exemple pour reprendre l'exemple ci-dessus :



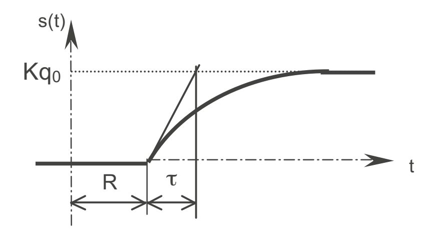
Si la cinétique de la réaction chimique permet de modéliser la relation donnant le pH dans la cuve en fonction du débit de chlore par une certaine fonction de transfert H(p), la fonction de transfert du système total est alors :

$$\frac{S(p)}{Q(p)} = H(p)e^{-Rp}$$

Par exemple, si la fonction H(p) est du premier ordre de type $H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$, alors : $\frac{S(p)}{Q(p)} = \frac{Ke^{-Rp}}{1+\tau p}$

Si on injecte soudainement un débit constant de chlore dans la cuve, c'est-à-dire si l'entrée est un échelon q_0, alors la mesure du pH en sortie sur la conduite fournira la grandeur définie dans le domaine de Laplace par :

$$S(p) = \frac{Kq_0.e^{-Rp}}{p(1+\tau p)}$$



dont la transformée inverse est $s(t) = Kq_0(1 - e^{-\frac{t-R}{\tau}})$.

Celle-ci s'obtient en considérant la transformée inverse de $\frac{Kq_0}{p(1+\tau p)}$ qui est classiquement $Kq_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ puis en retardant cette fonction de R.

V-4 Orientation de la roue directrice du chariot filoguidé MP22

V-4-1 Présentation

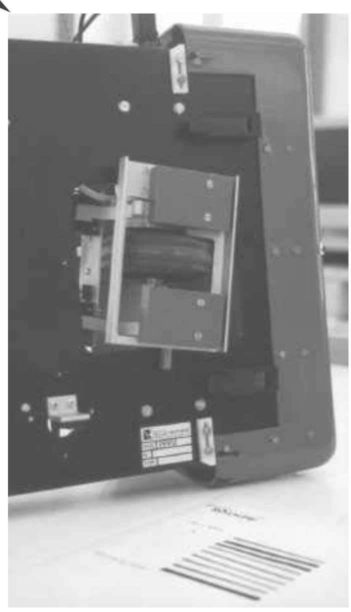


L'orientation de la roue directrice du chariot filoguidé se fait selon la chaîne fonctionnelle de direction déjà décrite au chapitre 2, paragraphe III-3 :

Consigne d'orientation de la roue
Adaptateur de consigne
+
Écart
Correcteur
Amplificateur
Tension de commande
Moteur à courant continu
Angle du rotor
Réducteur
Angle de rotation de la roue
-
Mesure de vitesse
Capteur de position angulaire (potentiomètre)

Orientation roue
Consigne numérique d'orientation roue
C_0 = $15 = 21 inc
Angle souhaité : 15 °
R_{PO} = $20 = 32
Zm = $00 = 0
$K_{PO} = \frac{R_{PO}}{8} = 4{,}00$
+128
N
A
LP
Moteur
Potentiomètre
C. gauche
C. droit

On rappelle, qu'en fonctionnement, la consigne provient de la mesure de l'écart du chariot par rapport au fil qu'il doit suivre, écart élaboré par deux capteurs électromagnétiques situés de part et d'autre de la roue. Revoir chapitre 2, III-3 si nécessaire.



Toutefois, à des fins expérimentales, il est possible d'imposer directement une consigne d'orientation angulaire à la roue à partir du logiciel de commande et d'acquisition de données associé au chariot dont l'écran de contrôle est donné ci-dessus.

On se propose ici de procéder à une modélisation du comportement global de cette chaîne asservie de position angulaire, à partir d'une commande angulaire en échelon, pour un réglage donné du correcteur qui est celui qui apparaît ci-dessus à l'écran de contrôle. Il n'est pas l'objet ici de détailler cette correction, ni même les autres constituants de la chaîne.

Le système présente un retard, sans doute dû aux jeux à rattraper, qui va être mis en évidence dans l'essai proposé.

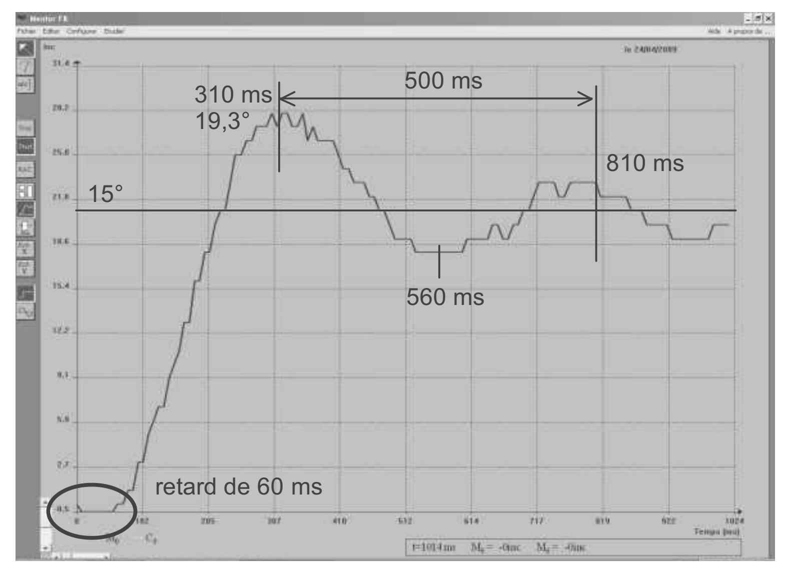
V-4-2 Réponse indicielle

On procède alors à la commande d'une rotation de 15° et on relève l'évolution temporelle de l'angle d'orientation de la roue qui est donnée ci-après :

On observe une évolution qui tend vers la consigne angulaire (précision) avec des oscillations qui peuvent conduire à une tentative de modélisation par un système du second ordre sous-amorti.

On relève alors (voir ci-contre) les instants des différents extremums que l'on peut observer, ainsi que le niveau du premier dépassement.

La pseudo période des oscillations est :
T ≈ 500 ms.



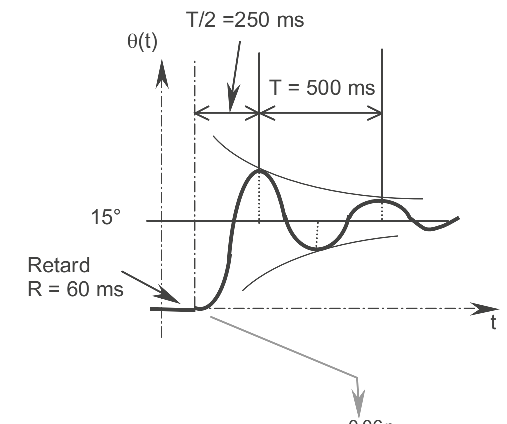
Cette pseudo période devrait conduire, pour un modèle fondamental du deuxième ordre, à un instant du premier dépassement égal à T/2 soit à 250 ms. Or celui-ci est d'environ 310 ms.

Une interprétation de cette observation est de considérer qu'à l'instant initial, la roue s'oriente avec un retard R = 310 - 250 = 60 ms.

Ce retard peut s'expliquer par les différents jeux à rattraper à l'instant initial dans les différents engrenages du réducteur inséré entre le moteur et la roue. Une fois le mouvement établi les contacts sont maintenus par les efforts.

Ceci est cohérent avec le comportement relevé aux courts instants.

On modélisera donc la réponse selon la courbe ci-contre.



V-4-3 Fonction de transfert

La fonction de transfert de l'asservissement sera alors identifiée à $H(p) = \dfrac{Ke^{-0,06p}}{1 + \dfrac{2z}{\omega_0}p + \dfrac{1}{\omega_0^2}p^2}$

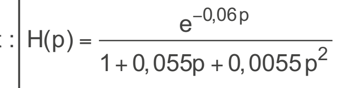
- Le gain est K = 1, sans dimension, puisque la valeur asymptotique de la réponse est égale à la consigne de 15°.
- La pseudo période des oscillations est : $\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} \approx 0,5\,s$
- Le niveau relatif du premier dépassement est : $e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} = \dfrac{19,3-15}{15} = 0,287$

On extrait la pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement z de ces deux dernières équations, soit :
z = 0,37
ω_0 = 13,5 rad/s.

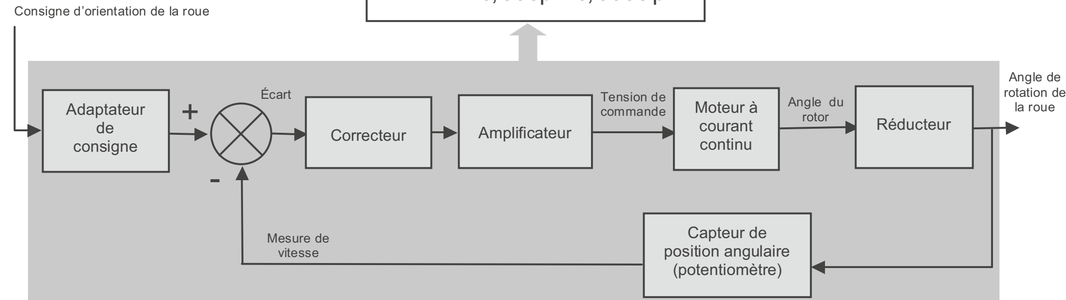
Alors, les constantes du dénominateur de la fonction de transfert sont :

$$\frac{2z}{\omega_0} = 0,055\,s \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = 0,0055\,s^2$$

D'où le modèle de comportement :



$$H(p) = \frac{e^{-0,06p}}{1 + 0,055p + 0,0055p^2}$$



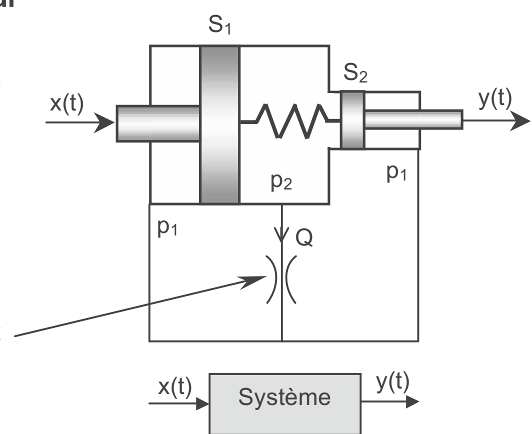
VI - SYSTÈMES DU 1ER ET DU 2ÈME ORDRE GÉNÉRALISÉS (OU À ZÉROS)

VI-1 Exemple introductif : écarecteur

Considérons le petit mécanisme hydraulique ci-contre. Il est rencontré comme correcteur dans certains asservissements purement mécaniques.

Il est constitué de deux pistons en série, de sections différentes, reliés par un ressort de raideur k, séparant deux chambres aux pressions p_1 et p_2 d'un fluide supposé incompressible.

Un orifice calibré met en communication les deux chambres en autorisant un débit de fuite proportionnel à la différence des pressions : $Q = f(p_2 - p_1)$.



Le mouvement d'entrée x(t) est commandé sur le piston 1 de grande section, de masse M. La sortie est la position y(t) du piston 2, dont la masse m est négligeable.

L'action de commande extérieure f_e sur le piston 1, ainsi que les actions de pression et du ressort, s'exerçant au sein du système, sont prépondérantes devant l'action extérieure sur le piston 2, les actions de pesanteur et de frottements, qui seront donc négligées. Par ailleurs, pour simplifier l'étude, on considérera les tiges des deux pistons de sections négligeables et donc chaque piston offrant la même surface au fluide sur chacune de ses faces (S_1 ou S_2, avec $S_1 > S_2$).

L'étude mécanique permet alors d'écrire les trois équations différentielles suivantes :

- dynamique du piston 1 : $M\frac{d^2x}{dt^2}(t) = [p_1(t) - p_2(t)]S_1 - k[x(t) - y(t)] + f_e(t)$
- dynamique du piston 2 : $m\frac{d^2y}{dt^2}(t) \approx 0 = [p_2(t) - p_1(t)]S_2 + k[x(t) - y(t)]$
- débit : $S_2\frac{dy}{dt}(t) - S_1\frac{dx}{dt}(t) = f[p_2(t) - p_1(t)]$

Sous les conditions de Heaviside, ces équations différentielles s'écrivent dans le domaine de Laplace et avec les notations habituelles des variables en majuscules :

$$\begin{cases} Mp^2X(p) = [P_1(p) - P_2(p)]S_1 - k[X(p) - Y(p)] + F_e(p) \\ 0 = [P_2(p) - P_1(p)]S_2 + k[X(p) - Y(p)] \\ p[S_2Y(p) - S_1X(p)] = f[P_2(p) - P_1(p)] \end{cases}$$

Les deux dernières équations permettent d'éliminer la différence de pression et donc d'exprimer la relation entre Y(p) et X(p) :

$$S_2p[S_2Y(p) - S_1X(p)] = fk[X(p) - Y(p)]$$

D'où l'on extrait la fonction de transfert du système : $H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = \dfrac{1 + \dfrac{S_1S_2}{fk}p}{1 + \dfrac{S_2^2}{fk}p}$

En posant : $\tau = \dfrac{S_2^2}{fk}$ et $a = \dfrac{S_1S_2}{fk}$, cette fonction s'écrit : $\boxed{H(p) = \dfrac{1 + ap}{1 + \tau p}}$

Une telle fonction de transfert est une fonction de transfert du premier ordre, de constante de temps τ (correspondant au pôle $-1/\tau$) et présentant un zéro $-1/a$. Elle est appelée fonction de transfert du premier ordre ***généralisée***. Il en va de même pour le système modélisé par cette fonction de transfert, qualifié de système du premier ordre généralisé.

VI-2 Définitions

On appelle système du premier ordre généralisé, tout système dont le comportement peut être modélisé par une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = K\frac{1 + ap}{1 + \tau p}$$

De même, on appelle système du deuxième ordre généralisé, tout système dont le comportement peut être modélisé par une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = K\frac{1 + ap + bp^2}{1 + \dfrac{2z}{\omega_0}p + \dfrac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Bien entendu, le numérateur et le dénominateur diffèrent, car sinon ces systèmes seraient de simples gains. Ils sont aussi appelés ***systèmes à zéros*** puisque la présence d'un numérateur à leurs fonctions de transfert permet de définir un ou deux zéros.

■ **Condition sur a et b ?**

La stabilité, qui ne dépend que du dénominateur des fonctions de transfert, impose toujours, comme pour les systèmes fondamentaux du premier et du deuxième ordre, que les constantes τ, z et ω_0 soient strictement positives (critère de Routh).

Par contre, aucune condition ne s'impose a priori aux constantes a et b des numérateurs : les zéros peuvent en effet être à partie réelle nulle ou positive sans que cela n'engendre d'instabilité, celle-ci ne dépendant que du dénominateur.
NB : On démontrera toutefois au paragraphe VI-4 que $b < 0$ est impossible.

Dans le cas ou les zéros sont à partie réelle nulle ou positive, le système est usuellement, mais improprement, qualifié de ***système « à zéros instables »***. Il est clair que cette désignation est impropre puisque seuls les pôles peuvent apporter de l'instabilité. Une désignation plus correcte est celle de ***système à réponse inverse***, en référence à une propriété qui va être établie plus loin. Ces systèmes sont complexes à piloter et leur commande sort du cadre de cet ouvrage.

VI-3 Comportement temporel

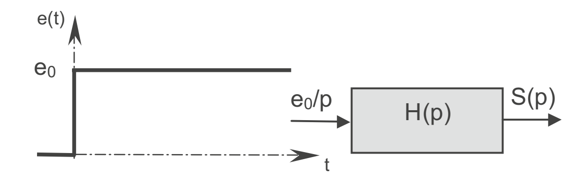
Les réponses de ces systèmes généralisés aux entrées canoniques de type impulsion, échelon et rampe sont influencées par la présence des zéros. La recherche de ces réponses se fait par les méthodes habituelles reposant sur la transformation de Laplace, avec quelques particularités illustrées sur les exemples qui suivent.

VI-3-1 Systèmes du premier ordre

Soit le système à zéro :

$$H(p) = K\frac{1+ap}{1+\tau p}$$

soumis par exemple à un échelon de niveau e_0.



Sa sortie sera, dans le domaine de Laplace : $S(p) = K\frac{1+ap}{1+\tau p} \text{ x } \frac{e_0}{p} = \frac{Ke_0}{p(1+\tau p)} + \frac{aKe_0}{1+\tau p}$

On y reconnaît :

- un premier terme $\frac{Ke_0}{p(1+\tau p)}$ qui est dû au système fondamental du premier ordre associé :

  sa transformée inverse est classiquement (cf. II-3) : $Ke_0[1-e^{-t/\tau}]$;
- un terme supplémentaire $\frac{aKe_0}{1+\tau p}$ qui est dû à la présence du numérateur :

  sa transformée inverse est : $\frac{aKe_0}{\tau}e^{-t/\tau}$.

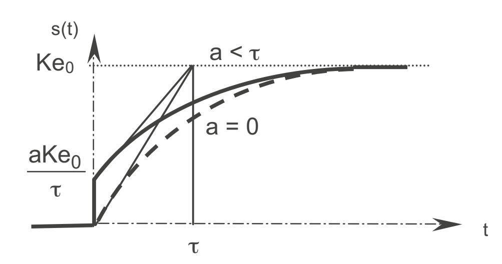
La sortie suivra donc l'évolution temporelle : $s(t) = Ke_0[1-e^{-t/\tau} + \frac{a}{\tau}e^{-t/\tau}]$

Le zéro n'a donc qu'une influence transitoire, puisque $\lim_{t\to\infty} \frac{a}{\tau}e^{-t/\tau} = 0$.

Cette influence s'estompera d'autant plus rapidement que la constante a du numérateur sera faible c'est-à-dire que le zéro -1/a sera grand (en valeur absolue). On trouve ici une influence comparable à celle des pôles, dont l'éloignement de l'axe des imaginaires purs se traduit par la rapidité du système. Revoir le paragraphe IV-4 du chapitre 3 si nécessaire. Bien évidemment, la rapidité de disparition de l'effet du zéro est à qualifier relativement à la constante τ (c'est-à-dire le pôle $-1/\tau$).

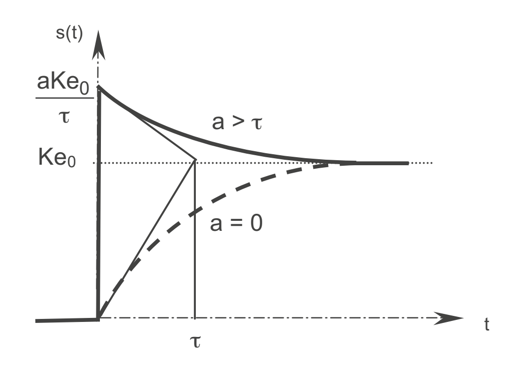
Aux temps courts, le zéro a une influence forte, en particulier il apporte une discontinuité initiale : $s(0) = \frac{aKe_0}{\tau}$.

Cette valeur peut être inférieure ou supérieure à la valeur finale, selon les valeurs relatives des constantes a et τ. L'évolution ci-contre est tracée pour $a < \tau$.



Un calcul de la dérivée à l'instant initial montre que la tangente initiale coupe toujours l'asymptote à l'instant τ.

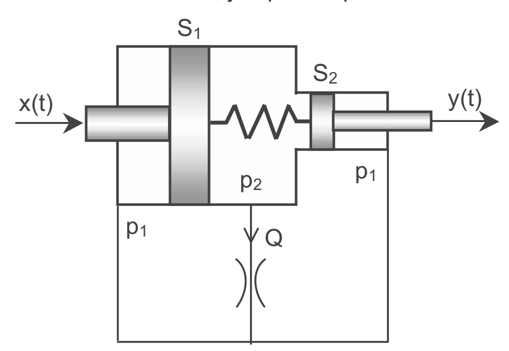
Si a > τ, l'évolution temporelle de la sortie est selon la figure ci-contre.

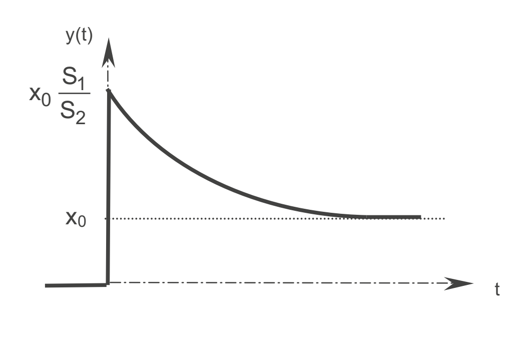


■ **Retour à l'exemple introductif**

$$H(p) = \frac{1+ap}{1+\tau p} \text{ avec } \tau = \frac{S_2^2}{fk} \text{ et } a = \frac{S_1S_2}{fk} > \tau$$

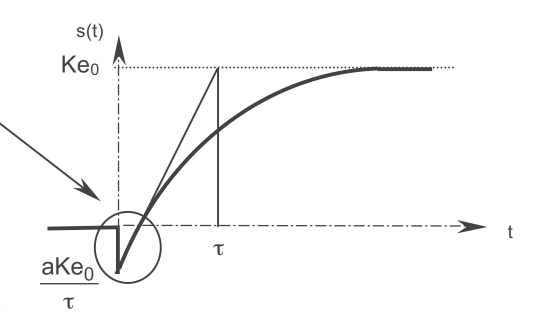
Une entrée en échelon x_0 sur le premier piston provoquera initialement un déplacement instantané du petit piston dans le rapport des sections, puis son recul dû au ressort et permis par la conduite de fuite, jusqu'à l'équilibre.



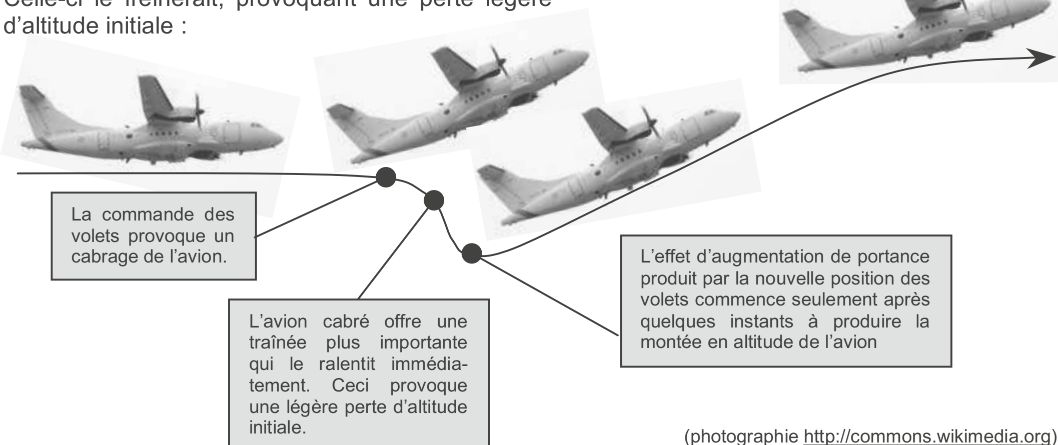


■ Dans le cas où le système est à « zéro instable » -1/a positif, soit lorsque a est négatif, on obtient un système dont la réponse à un échelon « démarre dans le mauvais sens ».

Ce type de réponse est caractéristique de tels systèmes et justifie leur appellation de ***systèmes à réponse inverse***.



Ceci peut être illustré par le comportement d'un avion pour lequel une commande non contrôlée (en boucle ouverte) des volets de profondeur, dans l'objectif de faire monter l'avion, engendrerait dans un premier temps une augmentation de la traînée. Celle-ci le freinerait, provoquant une perte légère d'altitude initiale :



(photographie http://commons.wikimedia.org)

Une commande classique, qui conclurait initialement en la nécessité d'augmenter l'angle d'incidence des volets face à la perte d'altitude, risquerait d'accentuer au contraire l'effet de cabrage et donc cette perte d'altitude : la commande de ces systèmes à réponse inverse est donc complexe. Les avions modernes, tels que celui photographié, intègrent une telle commande, adaptée à ce comportement.

■ **Remarque : théorème de la valeur initiale**

Ce théorème s'avère ici performant pour déterminer rapidement la valeur initiale de la réponse :

$$s(0) = \lim_{p\to\infty} pS(p) = \lim_{p\to\infty} pK\frac{1+ap}{1+\tau p} \times \frac{e_0}{p} = \lim_{p\to\infty} Ke_0\frac{1+ap}{1+\tau p} = \frac{aKe_0}{\tau}$$

VI-3-2 Généralisation phénoménologique du comportement

Les calculs qui précèdent permettent de mettre en évidence une caractéristique générale des systèmes à zéros. En effet, leurs fonctions de transfert peuvent être décomposées en sommes de fonctions de transfert en décomposant le polynôme du numérateur :

$$1^{er}\text{ ordre : } H(p) = K\frac{1+ap}{1+\tau p} = \frac{K}{1+\tau p} + a\frac{Kp}{1+\tau p}$$

$$2^{ème}\text{ ordre : } H(p) = K\frac{1+ap+bp^2}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2} + a\frac{Kp}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2} + b\frac{Kp^2}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

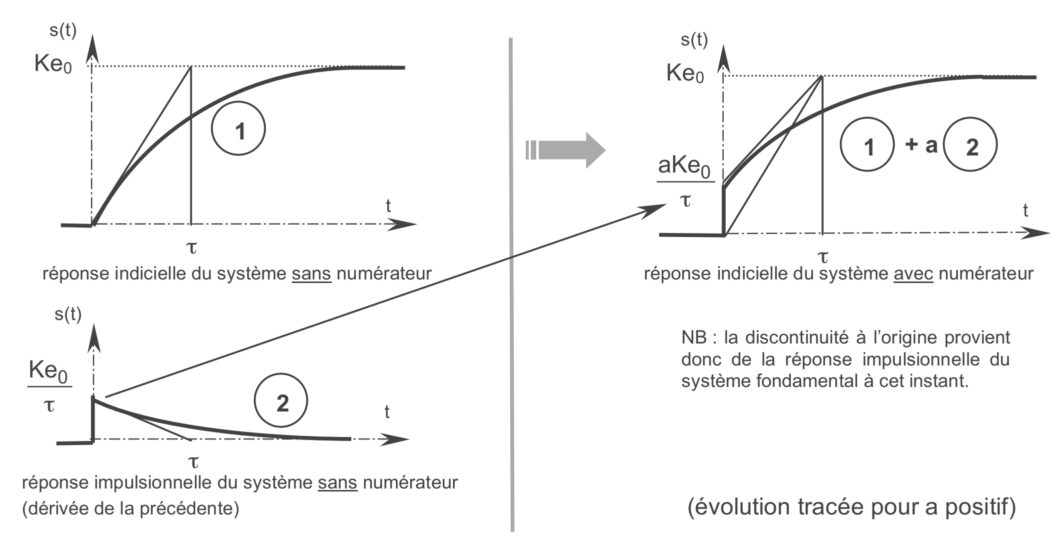
Cette décomposition fait apparaître les dérivées successives de la fonction de transfert (multiplication par p) affectées des coefficients a et éventuellement b.

Ainsi la réponse à une entrée donnée d'un système généralisé sera celle du système fondamental associé, à laquelle ***se superpose*** un terme proportionnel à sa dérivée première, plus éventuellement, dans le cas du deuxième ordre, un terme proportionnel à sa dérivée seconde.

Ceci se vérifie aisément sur la réponse indicielle du système premier ordre généralisé :

$$s(t) = Ke_0[1-e^{-t/\tau} + \frac{a}{\tau}e^{-t/\tau}] = Ke_0[1-e^{-t/\tau}] + a\frac{Ke_0}{\tau}e^{-t/\tau} \quad \text{où} \quad a\frac{Ke_0}{\tau}e^{-t/\tau} = a\frac{d}{dt}Ke_0[1-e^{-t/\tau}]$$

La dérivée par rapport au temps de la réponse indicielle étant la réponse impulsionnelle (cf. II-5), la réponse à une entrée en échelon e_0 du système généralisé est donc celle du système fondamental, augmentée d'un terme proportionnel (multiplié par a) à sa réponse à une impulsion de poids e_0 :



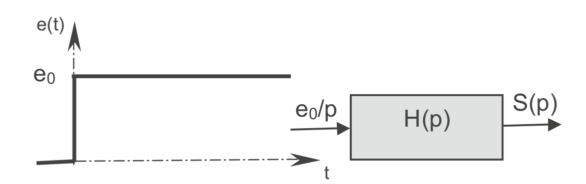
Ce raisonnement peut être conduit pour trouver rapidement de la même manière les réponses impulsionnelles (fonctions ci-dessus dérivées) ou à une rampe (fonctions ci-dessus intégrées). Par exemple, on comprend immédiatement que la réponse impulsionnelle du système du premier ordre à zéro possèdera une impulsion à l'instant initial, due à la dérivée de la réponse impulsionnelle du système fondamental, ce qui peut aussi se vérifier par le théorème de la valeur initiale.

VI-3-3 Systèmes du deuxième ordre

Comme pour le système fondamental du premier ordre, on limitera ici le propos à la réponse indicielle.

Soit donc le système à zéros :

$$H(p) = K\frac{1+ap+bp^2}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$



S'il est soumis à un échelon de niveau e_0, sa sortie sera, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{Ke_0}{p[1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2]} + a\frac{Ke_0}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2} + b\frac{Ke_0p}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Il s'agit, comme prévu, de la réponse du système fondamental du deuxième ordre au même échelon e_0, augmentée d'un terme proportionnel à sa réponse à une impulsion de poids e_0, plus un terme proportionnel à la dérivée de celle-ci.

On peut donc en déduire les trois propriétés qui suivent.

- Le caractère amorti ou non du système fondamental du deuxième ordre (caractérisé uniquement par le facteur z) se traduit par la présence ou l'absence d'oscillations ***sur toutes ses différentes réponses***. Ainsi, la présence de zéros ne modifie pas le caractère oscillant ou non de la réponse du système généralisé, seulement déterminé par le dénominateur.

- La réponse impulsionnelle du système fondamental du deuxième ordre ne présente pas de discontinuité à l'origine, mais présente à cet instant une dérivée non nulle. Ainsi, si $b = 0$, la réponse du système ne présente pas de discontinuité, contrairement au système du premier ordre, mais en présente par contre une si $b \neq 0$. Ceci se retrouve grâce au théorème de la valeur initiale :

$$s(0) = \lim_{p\to\infty} pS(p) = \lim_{p\to\infty} p\frac{Ke_0}{p[1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2]} + \lim_{p\to\infty} p\frac{aKe_0}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2} + \lim_{p\to\infty} p\frac{bKe_0p}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

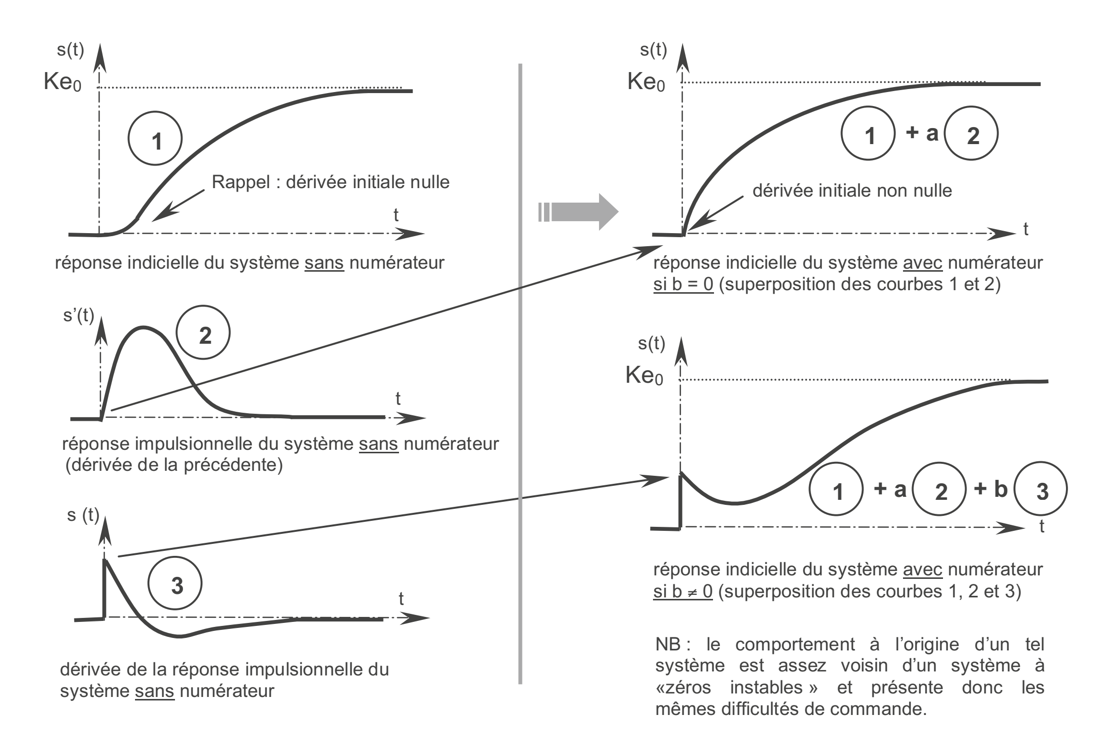
$$s(0) = \lim_{p\to\infty} pS(p) = 0+0+\lim_{p\to\infty}\frac{bKe_0p^2}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2} = bKe_0\omega_0^2$$

  cette valeur à l'origine est bien nulle si $b = 0$, mais non nulle (discontinuité à l'origine) si $b \neq 0$.

- De la même manière, la présence de la réponse impulsionnelle se traduit par une dérivée initiale non nulle de la réponse totale.

Par exemple, dans le cas d'un système amorti ($z > 1$), aucune oscillation (autour de l'asymptote) n'apparaît et on a les superpositions tracées page suivante, selon que b soit nul ou non.

(évolutions tracées pour a et b positifs)

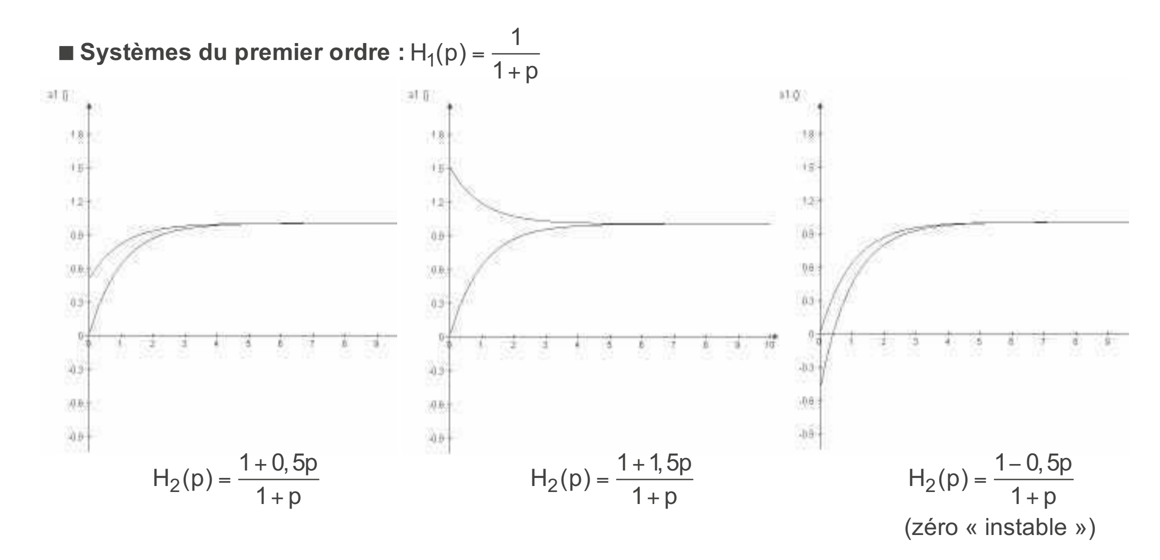


VI-3-4 Exemples de réponses

Les réponses indicielles de quelques systèmes généralisés, obtenues à l'aide d'un logiciel de simulation afin de les comparer aux réponses du système fondamental associé, sont rassemblées ci-après à titre de bilan.

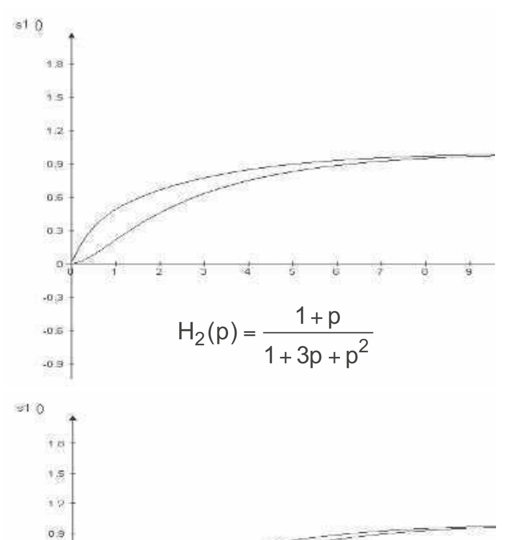
La fonction de transfert du système fondamental est notée $H_1(p)$.
Les systèmes généralisés, dont les réponses sont comparées à celle bien connue du système fondamental associé, ont une fonction de transfert $H_2(p)$, de même dénominateur.

■ **Systèmes du premier ordre :** $H_1(p) = \dfrac{1}{1+p}$

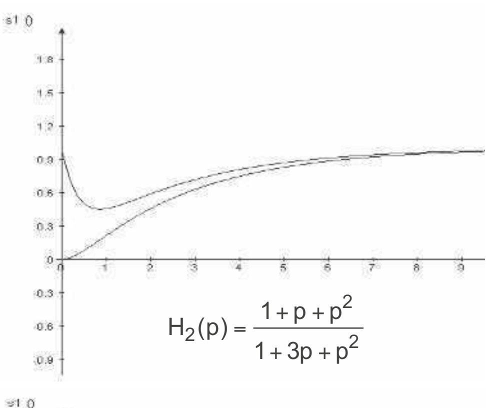


$H_2(p) = \dfrac{1+0,5p}{1+p}$ $\quad$ $H_2(p) = \dfrac{1+1,5p}{1+p}$ $\quad$ $H_2(p) = \dfrac{1-0,5p}{1+p}$ (zéro « instable »)

■ **Systèmes du deuxième ordre amortis (z = 1,5) :** $H_1(p) = \dfrac{1}{1 + 3p + p^2}$



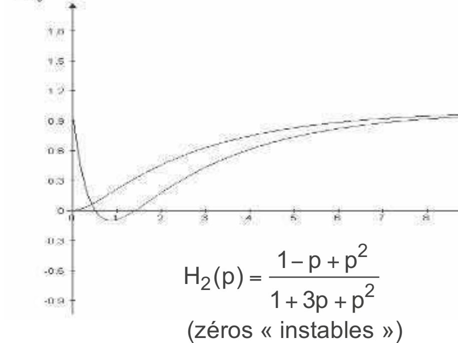
$$H_2(p) = \frac{1 + p}{1 + 3p + p^2}$$



$$H_2(p) = \frac{1 + p + p^2}{1 + 3p + p^2}$$

$$H_2(p) = \frac{1 - p}{1 + 3p + p^2}$$

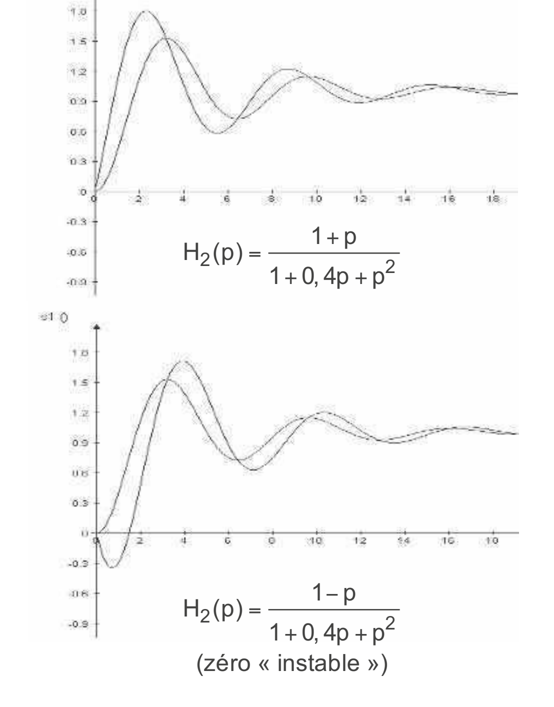
(zéro « instable »)



$$H_2(p) = \frac{1 - p + p^2}{1 + 3p + p^2}$$

(zéros « instables »)

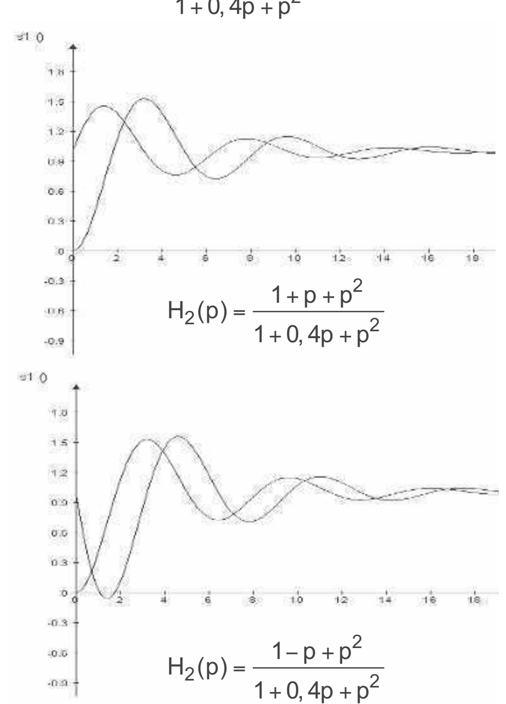
■ **Systèmes du deuxième ordre sous-amortis (z = 0,2) :** $H_1(p) = \dfrac{1}{1 + 0,4p + p^2}$



$$H_2(p) = \frac{1 + p}{1 + 0,4p + p^2}$$

$$H_2(p) = \frac{1 - p}{1 + 0,4p + p^2}$$

(zéro « instable »)



$$H_2(p) = \frac{1 + p + p^2}{1 + 0,4p + p^2}$$

$$H_2(p) = \frac{1 - p + p^2}{1 + 0,4p + p^2}$$

(zéros « instables »)

VI-4 Universalité de la description

Voir chapitre 3, paragraphe IV.

Un système linéaire quelconque possède une fonction de transfert H(p) qui peut être écrite sous diverses formes :

- La forme issue directement de l'équation différentielle : $H(p) = \dfrac{b_0 + b_1 p + ... + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n}$ $(n \geq m)$.
- La forme canonique : $H(p) = \dfrac{K}{p^\alpha}\dfrac{n(p)}{d(p)}$, avec n(0)=d(0)=1.

  Cette forme permet de définir le gain K et la classe α, comptabilisant les pôles et les zéros nuls.
- La forme faisant apparaître les pôles et les zéros : $H(p) = k\dfrac{(p - z_1)(p - z_2)...(p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2)...(p - p_n)}$

  ou encore $H(p) = \dfrac{k}{p^\alpha}\dfrac{(p - z_1)(p - z_2)...(p - z_{m'})}{(p - p_1)(p - p_2)...(p - p_{n'})}$ après extraction des pôles et zéros nuls.

On ne s'intéresse qu'aux systèmes pour lesquels d(p) vérifie le critère de Routh, c'est-à-dire dont tous les pôles non nuls sont à partie réelle strictement négative.

Les zéros ne présentent par contre aucune condition. On rappelle toutefois que les systèmes à « zéros instables », complexes à commander, sont présentés uniquement à titre anecdotique dans cet ouvrage. Ces pôles et zéros peuvent être soit réels, éventuellement nuls, soit complexes, éventuellement imaginaires purs.


Fiche ressource "équations différentielles linéaires à coefficients constants"

- Les pôles et zéros réels non nuls apportent donc des termes de la forme :

  $(1 + a_i p)$ avec $a_i = -\dfrac{1}{z_i}$, sans condition sur a_i ;

  $\dfrac{1}{(1 + \tau_i p)}$ avec $\tau_i = -\dfrac{1}{p_i}$, avec $\tau_i > 0$.

  Soit donc ***un produit de termes du premier ordre généralisés***, certains termes pouvant être identiques si des pôles ou des zéros sont multiples.

- Les pôles et zéros complexes le sont par paires, puisque si un nombre complexe est racine d'un polynôme, son conjugué l'est aussi. En les regroupant alors deux à deux, on obtient des termes de la forme :

  $[p - (\sigma_i + j\omega_i)][p - (\sigma_i - j\omega_i)]$ avec $\sigma_i \pm j\omega_i = z_i$ ou son conjugué, sans condition sur σ_i ;

  $\dfrac{1}{[p - (\sigma_i + j\omega_i)][p - (\sigma_i - j\omega_i)]}$ avec $\sigma_i \pm j\omega_i = p_i$ ou son conjugué, avec $\sigma_i < 0$.

  Soit donc ***un produit de termes du deuxième ordre généralisés***, certains termes pouvant encore une fois être identiques si des pôles ou des zéros sont multiples.

  Usuellement le polynôme est présenté développé sous la forme :

  $[p - (\sigma_i + j\omega_i)][p - (\sigma_i - j\omega_i)] = (\sigma_i^2 + \omega_i^2) - 2\sigma_i p + p^2 = (\sigma_i^2 + \omega_i^2)[1 - \dfrac{2\sigma_i}{\sigma_i^2 + \omega_i^2}p + \dfrac{1}{\sigma_i^2 + \omega_i^2}p^2]$

  Ainsi, tous les termes $(\sigma_i^2 + \omega_i^2)$ étant rassemblés dans la constante multiplicative, les pôles et les zéros complexes se traduisent dans la fonction de transfert par des termes en :

- $(1+a_i p+b_i p^2)$, sans condition sur a_i et avec finalement ***b_i nécessairement positif*** ;
- $\dfrac{1}{1+\dfrac{2z_i}{\omega_{0i}}p+\dfrac{1}{\omega_{0i}}p^2}$, avec z_i et ω_{0i} ***positifs*** en posant : $\omega_{0i}=\sqrt{\sigma_i^2+\omega_i^2}$ et $z_i=\dfrac{\sigma_i}{\omega_{0i}}$.

Ainsi, ***toute*** fonction de transfert d'un système linéaire stable peut être décrite à l'aide d'un produit de termes du premier et du deuxième ordre généralisés :

$$H(p)=\frac{b_0+b_1p+\ldots+b_mp^m}{a_0+a_1p+\ldots+a_np^n}=\frac{K}{p^\alpha}\text{x}\prod\frac{1+a_ip}{1+\tau_ip}\text{x}\prod\frac{1+a_ip+b_ip^2}{1+\dfrac{2z_i}{\omega_{0i}}p+\dfrac{1}{\omega_{0i}^2}p^2}$$

Ceci montre l'importance de ces systèmes du premier et du deuxième ordre : tout système linéaire peut être ainsi décrit à partir de ceux-ci.

Toutefois, la réponse temporelle d'un système décrit par la mise en série de systèmes (produit de fonctions de transferts) n'étant pas le produit des réponses des différents systèmes, cette description n'est pas utile pour la détermination de la réponse temporelle d'une fonction de transfert quelconque. Cette réponse sera déterminée par l'utilisation adaptée des méthodes liées à la transformation de Laplace, ou, bien souvent, par l'utilisation de logiciels de simulation.

En revanche, cette description sera fondamentale pour l'analyse fréquentielle de ces systèmes, abordée dans le chapitre suivant.

EXERCICES



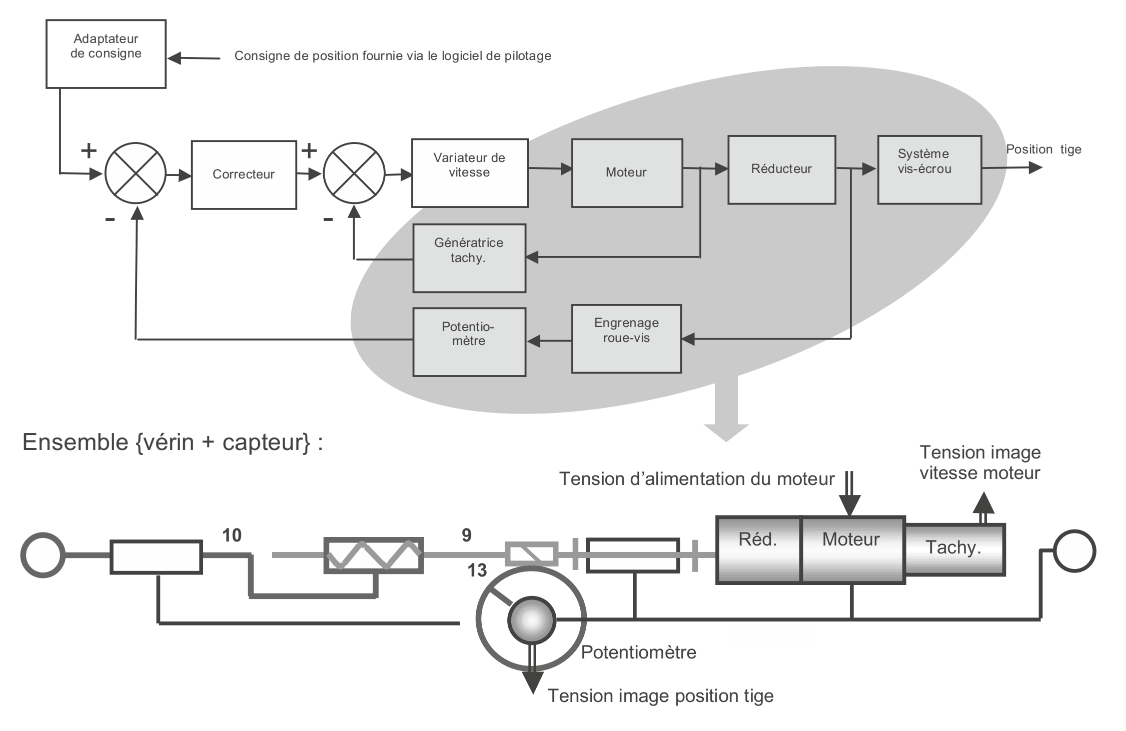
I - VÉRIN ÉLECTRIQUE DU ROBOT PARALLÈLE EX800

I-1 Présentation



Le système EX800 a déjà été présenté.
On s'intéresse ici à la chaîne fonctionnelle d'un de ses vérins électriques à vis, dont on se propose de procéder à l'élaboration d'un modèle de comportement à partir de sa réponse à un échelon de consigne.

Cette chaîne fonctionnelle peut-être décrite par le schéma bloc suivant :



Le correcteur permet des réglages à partir de boutons manuels situés en façade de la plate-forme. L'objet n'est pas ici d'évaluer l'influence de ces réglages : dans les résultats présentés, ceux-ci étaient en position moyenne.

Le logiciel de pilotage de la plate-forme permet de solliciter un vérin isolé selon une loi de commande choisie : ici, une commande en échelon de déplacement. Il permet également de recevoir en retour la position de la tige, via le potentiomètre et la carte de commande, pour en tracer l'évolution temporelle. Cf. exercice III du chapitre 2.

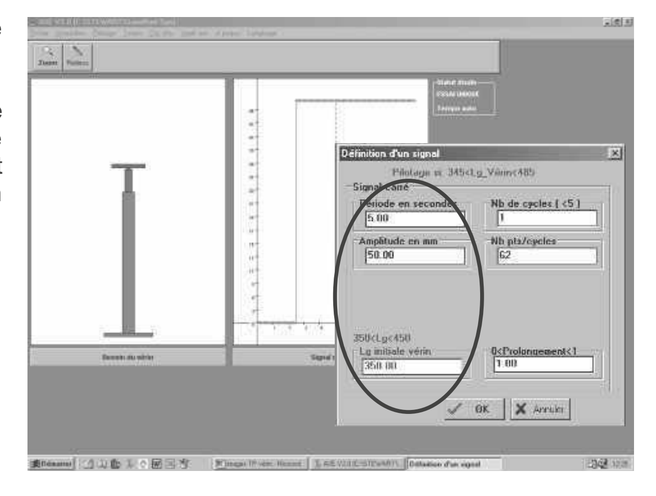
Cet exercice va montrer que, sous certaines conditions de sollicitation et malgré sa relative complexité structurelle, cette chaîne asservie peut être correctement identifiée à un modèle fondamental du premier ordre.

I-2 Travail demandé

<u>Question 1 :</u> réponse à un échelon de 50 mm

L'échelon est défini comme une entrée en signal carré particulière.

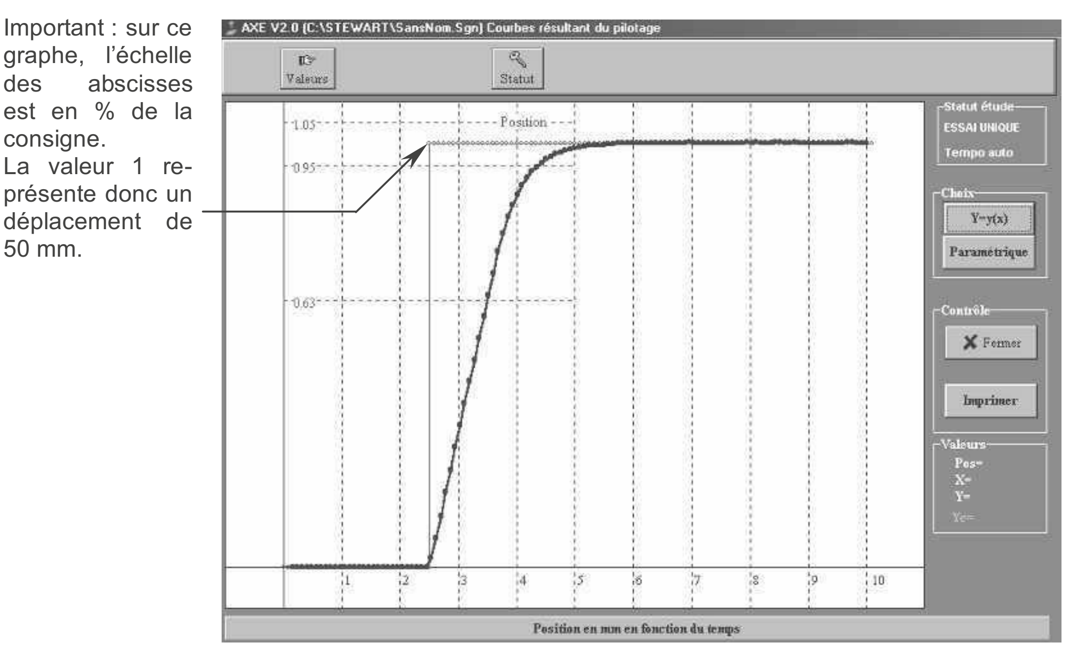
Soit ci-contre une consigne de position, sous forme d'un échelon de 50 mm, à partir de l'instant 2,5 s et d'une longueur de référence du vérin de 350 mm.



<u>1-1 :</u> allure générale

La loi d'évolution temporelle de la position de la tige est donnée par la courbe ci-dessous. Donner les éléments de l'allure générale de cette réponse qui peuvent conduire à proposer un modèle fondamental du premier ordre pour le système.

Important : sur ce graphe, l'échelle des abscisses est en % de la consigne.
La valeur 1 représente donc un déplacement de 50 mm.



<u>1-2 :</u> aspects quantitatifs

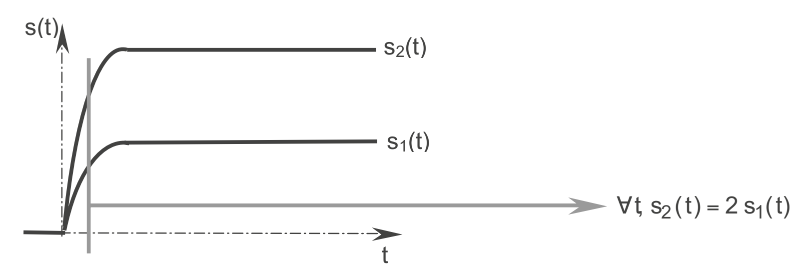
Évaluer graphiquement :

- le temps de montée à 63%
- le temps de réponse à 5%.

Ces valeurs corroborent-elles une modélisation par un système fondamental du premier ordre ?

Question 2 : mise en évidence d'une non linéarité

Les observations précédentes laissent à penser qu'une non linéarité est présente dans le système. On rappelle qu'un système est linéaire si toute combinaison linéaire d'entrées se traduit par une sortie qui est la même combinaison linéaire des sorties qui seraient obtenues avec les entrées prises une à une (superposition). En particulier si l'entrée est doublée, la sortie est doublée à chaque instant :



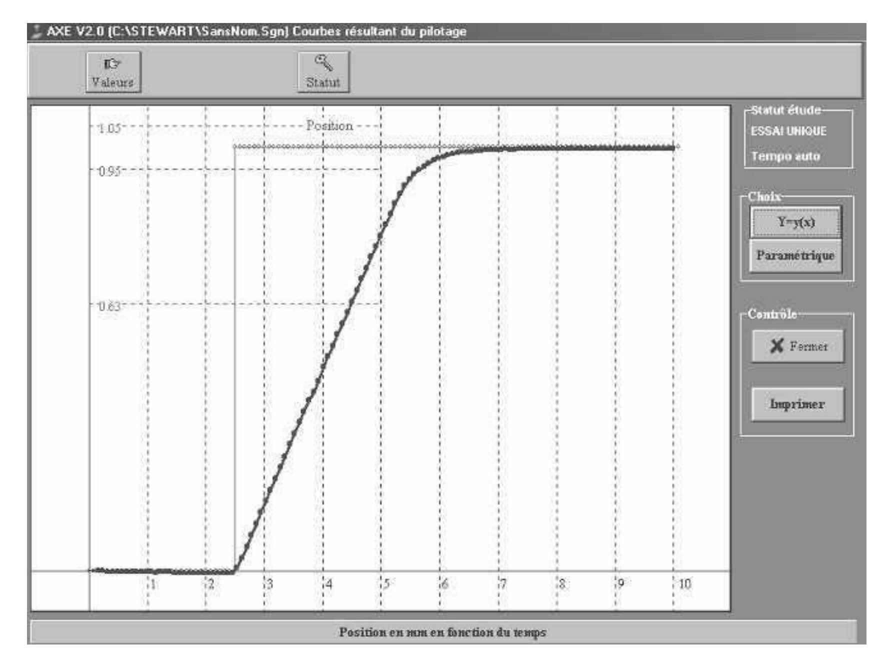
2-1 : relevé du déplacement à un instant donné

Sur la réponse précédente, relever le déplacement à un certain instant de la zone transitoire.

2-2 : essai pour un dépassement de 100 mm

On sollicite le vérin avec cette fois une entrée, de 100 mm (le double donc).

La réponse est donnée ci-contre.



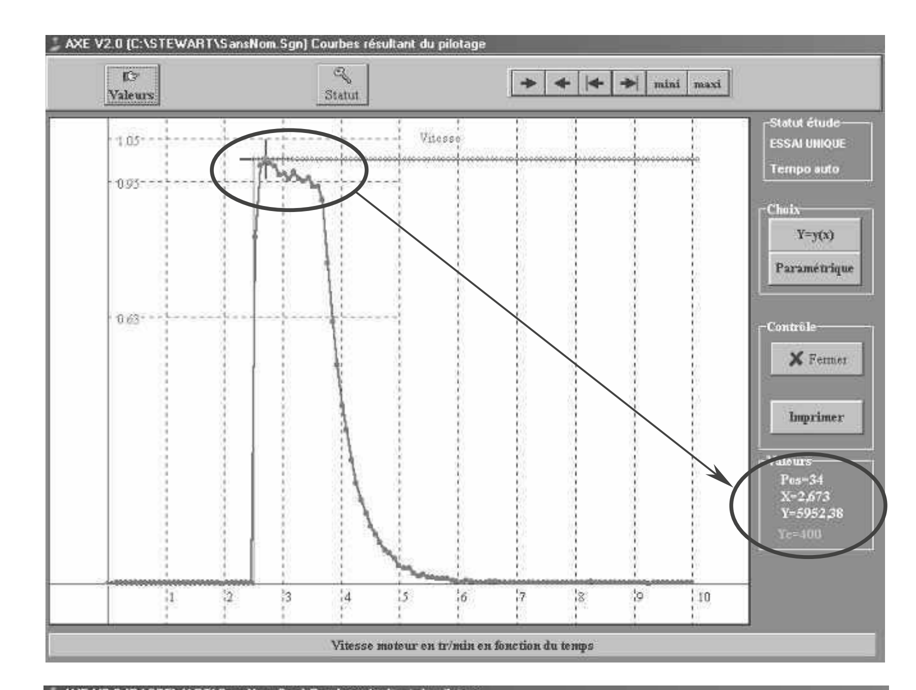
Relever le déplacement au même instant que précédemment pour une consigne de 50 mm. Attention, on rappelle que l'échelle des abscisses est en % de la consigne, donc de 100 mm ici alors que de 50 mm précédemment.

Que peut-on en conclure ?

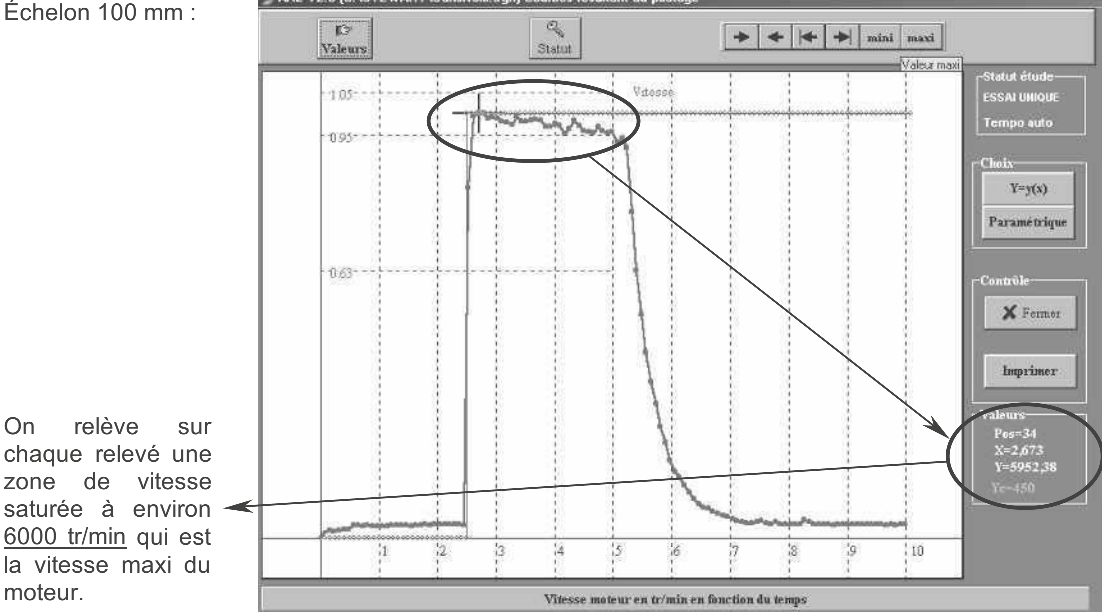
Question 3 : limitation de la vitesse

La non linéarité observée provient d'une limitation (ou saturation) de la vitesse. Celle-ci s'observe aisément si on trace l'évolution de la vitesse de rotation du moteur lors des deux essais précédents :

Échelon 50 mm :




Échelon 100 mm :



On relève sur chaque relevé une zone de vitesse saturée à environ <u>6000 tr/min</u> qui est la vitesse maxi du moteur.

<u>3-1 :</u> cohérence avec les courbes de déplacement

Quelle caractéristique des relevés de l'évolution temporelle aurait pu permettre de déceler plus tôt cette saturation en vitesse ?
Vérifier alors la cohérence entre la durée des saturations relevées sur les courbes de vitesse et l'observation des courbes de position.

<u>3-2 :</u> cinématique

Le pas du système vis-écrou est de 6,35 mm/tr.
Le rapport de réduction du réducteur placé entre le moteur et la vis est de 19,4.
Vérifier la cohérence de ces valeurs.

<u>Question 4 :</u> situation sans saturation

La limitation de la vitesse est obtenue par une limitation de la tension en sortie du variateur de vitesse. Cette tension dépend de l'écart de position. Ainsi, si on commande un déplacement selon un échelon d'amplitude suffisamment faible, la limitation n'est pas atteinte.

Cela s'observe sur la courbe de vitesse ci-contre, obtenue pour <u>une consigne de 10 mm.</u>

On relève à l'instant initial une vitesse de rotation du moteur d'environ <u>3850 tr/min</u> qui est bien inférieure à sa vitesse maxi.

L'évolution de la position est alors donnée ci-contre.

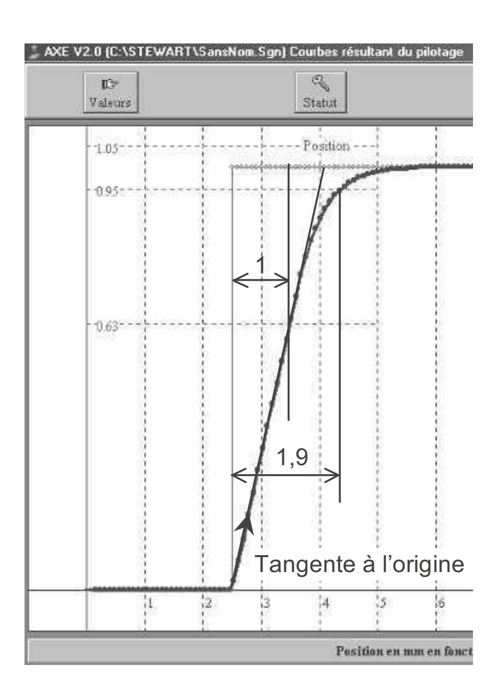
<u>4-1 :</u> modélisation

Montrer que dans ce cas sans saturation, un modèle fondamental du premier ordre est acceptable. Donner quantitativement la fonction de transfert de ce modèle.

<u>4-2 :</u> cinématique

Vérifier la cohérence de la vitesse initiale du moteur mesurée à 3850 tr/min avec la courbe de déplacement.

I-3 Correction



<u>Question 1 :</u> réponse à un échelon de 50 mm

<u>1-1 :</u> allure générale

L'absence de dépassement et d'oscillations est caractéristique d'un système du premier ordre ou d'ordre supérieur suffisamment amorti, ce qui ne permet pas de conclure.
En revanche, parmi les systèmes linéaires, seul le système fondamental du premier ordre fournit, sous les conditions de Heaviside, une réponse indicielle, ayant, comme ici, une tangente à l'origine qui n'est pas horizontale.
Ces éléments peuvent conduire à proposer un modèle fondamental du premier ordre.

<u>1-2 :</u> aspects quantitatifs

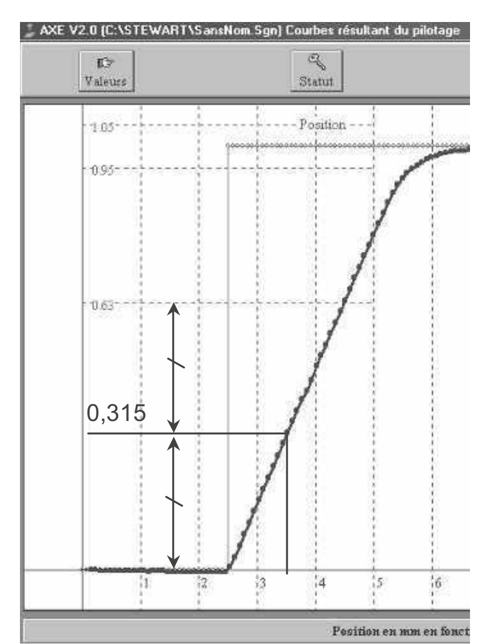
On relève :

- un temps de montée à 63% de l'ordre de 1 s,
- un temps de réponse à 5% (temps de montée à 95%) de l'ordre de 1,9 s

On constate que le temps de réponse à 5% n'est pas le triple du temps de montée à 63%.
Par ailleurs, la tangente à l'origine devrait rencontrer l'asymptote horizontale à l'instant correspondant au temps de montée à 63%, ce qui n'est pas le cas.

Cette analyse quantitative montre que le modèle fondamental du premier ordre ne convient finalement pas pour décrire ce système.

La tangente initiale interdisant un modèle d'ordre supérieur, il faut donc chercher l'origine de ce comportement dans une non-linéarité.



<u>Question 2 :</u> mise en évidence d'une non linéarité

<u>2-1:</u> relevé du déplacement à un instant donné

À l'instant 3,5 s, soit 1 s après le début de la sollicitation, on relève un déplacement de 63% comme déjà signalé, c'est-à-dire :

0,63x50 = <u>31,5 mm</u>.

<u>2-2:</u> essai pour une consigne de 100 mm

Si l'entrée est doublée, soit 100 mm, au même instant on relève (cf. ci-contre) un déplacement de 31,5%, c'est-à-dire :

0,315x100 = <u>31,5 mm</u>.

Ainsi, alors qu'un système linéaire devrait conduire à un déplacement double, on obtient strictement le même déplacement. Il est clair que l'on est en présence d'un phénomène non linéaire.

<u>Question 3 :</u> limitation de la vitesse

<u>3-1:</u> cohérence avec les courbes de déplacement

Une observation attentive des courbes de déplacement, montre que celles-ci sont sensiblement des droites dans une bonne partie de leurs premiers instants, cette droite se confondant clairement avec la tangente à l'origine.

Ceci montre bien que le déplacement s'effectue alors à vitesse constante, pratiquement dès le début de la sollicitation.

On constate de plus, que l'infléchissement des courbes de déplacement correspond bien à la fin de la saturation sur les courbes de vitesse. La durée des saturations est donc bien cohérente avec les courbes de déplacement.

Cf. ci-contre par exemple pour la consigne de 50 mm.

Déplacement à vitesse constante

Durée de la saturation

<u>3-2:</u> cinématique

La pente de cette droite est la même pour les deux essais et n'est autre que <u>31,5 mm/s</u> d'après les mesures effectuées à la question 2. Cette valeur correspond à la valeur limite maximale de la vitesse de sortie de tige du vérin.

Pour cette valeur, la vitesse de rotation du moteur est, d'après les relevés, d'environ <u>6000 tr/min</u>.

Ces deux valeurs permettent de vérifier le rapport du réducteur. En effet, le pas du système vis-écrou étant de 6,35 mm/tr, la vitesse de sortie de tige de 31,5 mm/s correspond à une vitesse de rotation de la vis de 31,5 / 6,35 $\approx$ 5 tr/s, soit d'environ <u>300 tr/min</u>.

Le rapport 20 entre ces deux vitesses est donc bien cohérent, aux incertitudes des mesures près, avec le rapport <u>19,4</u> du réducteur.

<u>Question 4 :</u> situation sans saturation

<u>4-1 :</u> modélisation

Lorsqu'il n'y a pas de saturation, le relevé du déplacement (cf. courbe suivante) permet de mesurer :

- un temps de montée à 63% de l'ordre de 0,45 s,
- un temps de réponse à 5% (temps de montée à 95%) de l'ordre de 1,3 s

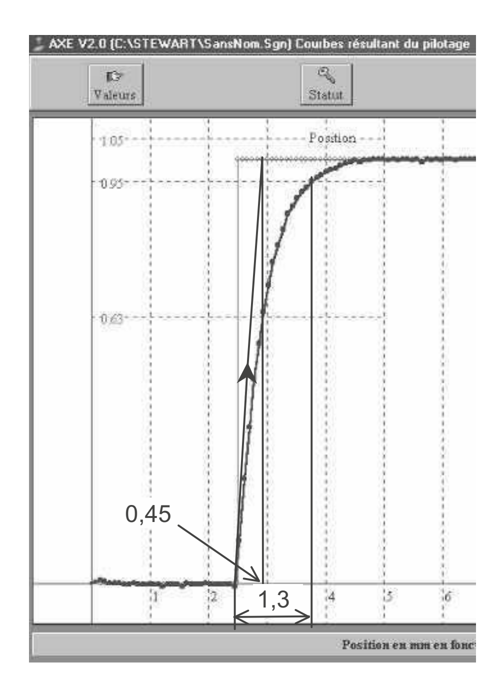
On constate que le temps de réponse à 5% est bien sensiblement le triple du temps de montée à 63%, comme prévu par un modèle fondamental du premier ordre. Par ailleurs, la tangente à l'origine rencontre bien l'asymptote horizontale à l'instant correspondant au temps de montée à 63%, également comme prévu par un modèle fondamental du premier ordre.

De plus, on constate que la position tend vers la consigne, ce qui montre que le gain du système est unitaire.

En conclusion, le modèle du premier ordre de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{1+0,45p}$$

est donc tout à fait acceptable pour ce système, tant qu'il n'y a pas saturation de la vitesse.



4-2 : cinématique

À l'instant initial, si la vitesse de rotation du moteur est de 3850 tr/mìn, la vitesse de déplacement de la tige est de :

$$\frac{3850}{60} \times \frac{1}{19,4} \times 6,35 = 21 \text{ mm/s}$$

(on rappelle que le rapport du réducteur est 19,4 et le pas du système vis-écrou 6,35 mm/tr)

Cette vitesse doit correspondre à la pente à l'origine qui est :

$$\frac{\text{déplacement maxi}}{0,45} = \frac{10}{0,45} = 22,2 \text{ mm/s}$$

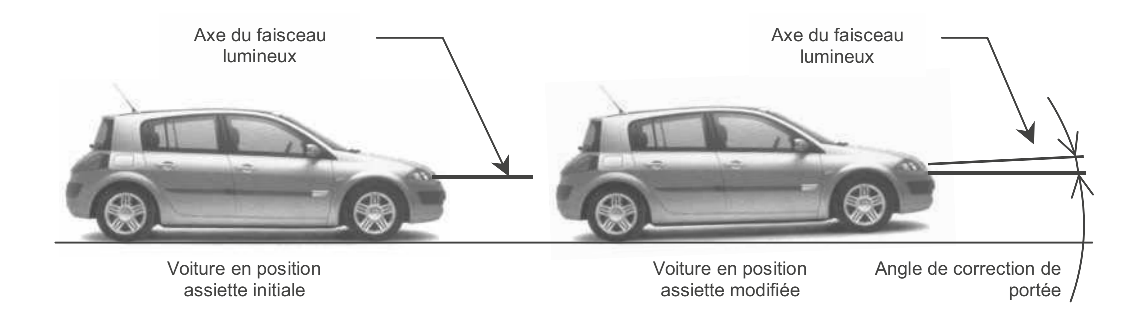
Compte tenu des différentes incertitudes de mesures, en particulier temporelles, on peut considérer ce résultat comme cohérent avec la mesure de vitesse du moteur.

II - SYSTÈME DE CORRECTION DE PORTÉE DE PHARE

D'après une épreuve du concours CCP PSI.

II-1 Présentation

L'assiette d'un véhicule se modifie avec la charge, le profil de la route ou les conditions de conduite (phase de freinage ou d'accélération). Cette modification entraîne une variation d'inclinaison du faisceau lumineux produit par les phares du véhicule. Ceux-ci peuvent alors éblouir d'autres conducteurs ou mal éclairer la chaussée.

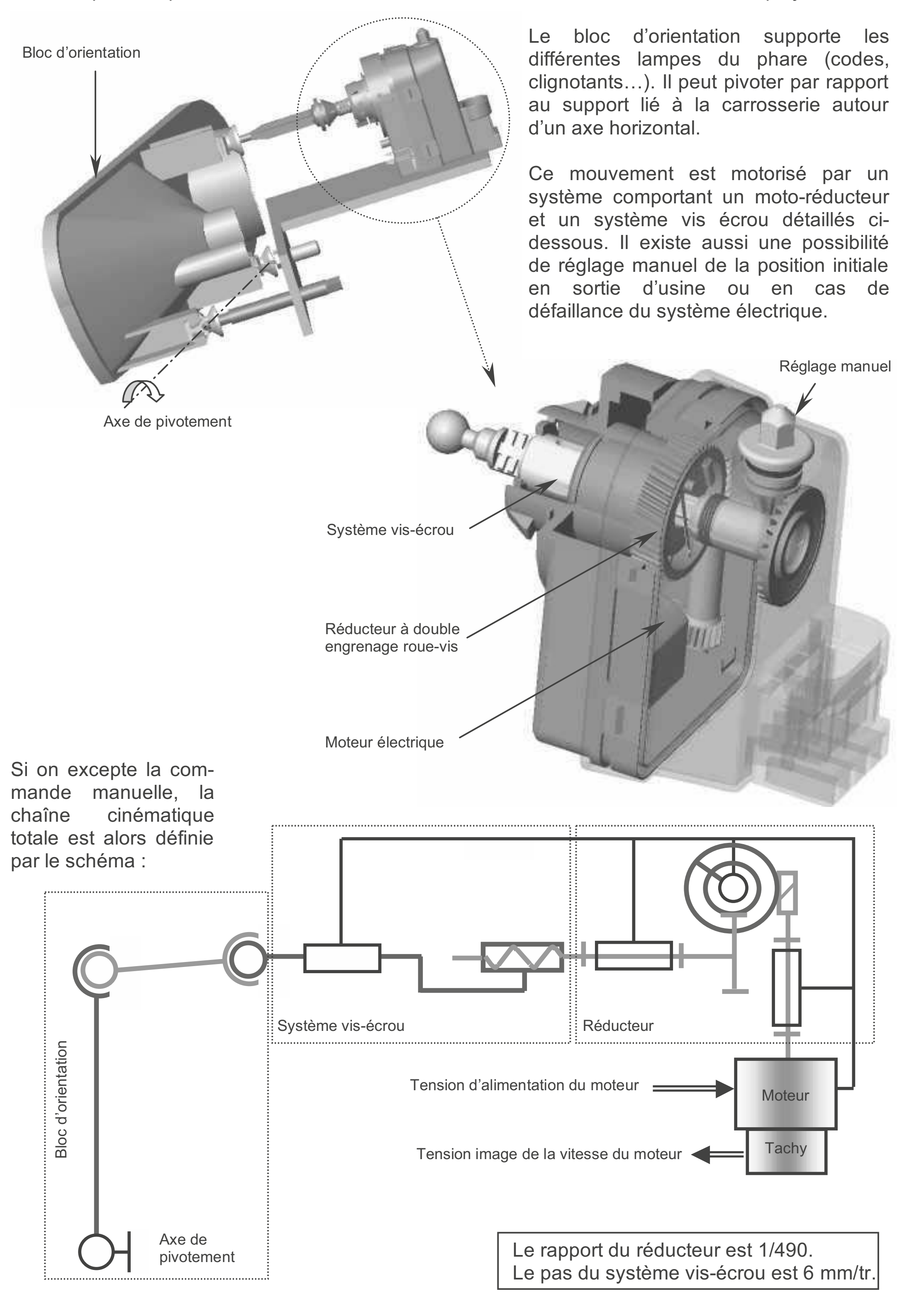


Certaines voitures sont équipées d'un système de correction de portée. Ce système fait appel à des capteurs d'assiette reliés aux essieux avant et arrière du véhicule. Les données sont traitées électroniquement par un calculateur et transmises aux actionneurs situés derrière les projecteurs.

Le bloc d'orientation supporte les différentes lampes du phare (codes, clignotants…). Il peut pivoter par rapport au support lié à la carrosserie autour d'un axe horizontal.

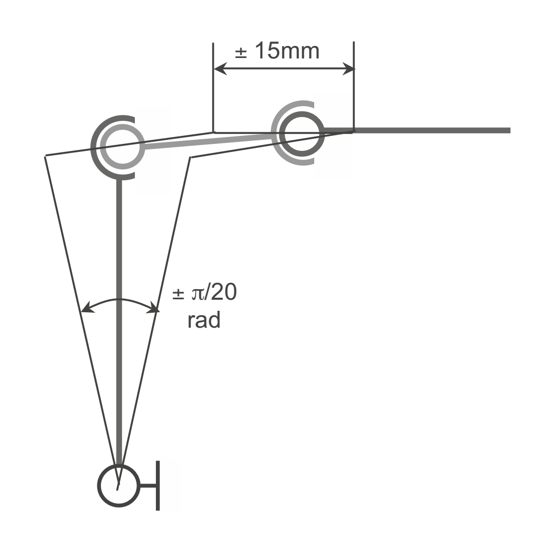
Ce mouvement est motorisé par un système comportant un moto-réducteur et un système vis écrou détaillés ci-dessous. Il existe aussi une possibilité de réglage manuel de la position initiale en sortie d'usine ou en cas de défaillance du système électrique.

Si on excepte la commande manuelle, la chaîne cinématique totale est alors définie par le schéma :



Le rapport du réducteur est 1/490.
Le pas du système vis-écrou est 6 mm/tr.

Le pivotement du bloc d'orientation étant faible, on peut en linéariser la loi entrée sortie sur le domaine d'utilisation : l'angle de pivotement sera donc considéré comme proportionnel au déplacement de la tige du système vis écrou. Il varie entre de ± $\pi/20$ rad lorsque la tige se déplace de ± 15 mm autour de sa position initiale.



Le moteur est un moteur électrique à courant continu, de fonction de transfert M(p) donnant sa vitesse de sortie en fonction de sa tension d'alimentation.

Sa vitesse de sortie est contrôlée par une génératrice tachymétrique de gain :
$K_{tachy} = 1/3\ 10^{-2}$ V /rad.s^{-1}

II-2 Travail demandé

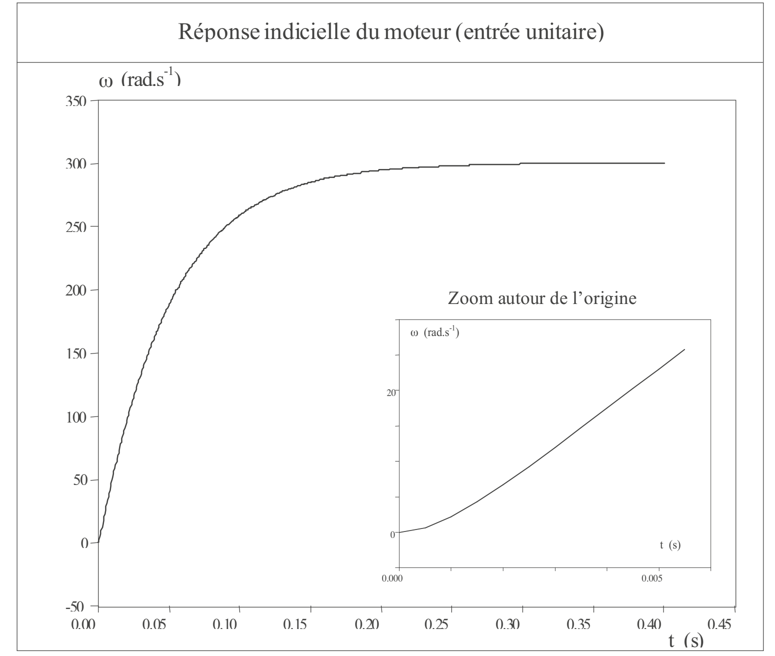
Question 1 : schéma bloc de la chaîne d'action

L'ensemble {capteur d'assiette, calculateur, amplificateur} qui mesure l'angle de tangage β du véhicule et commande le système de correction est assimilable à un gain pur noté K_c. Cet ensemble élabore la tension de commande U, qui est comparée à la tension en retour de la génératrice tachymétrique pour élaborer, par différence, la tension d'alimentation U_m du moteur.

Tracer le schéma bloc de la chaîne d'action d'entrée l'angle de tangage $\beta(t)$, de transformée de Laplace B(p) et de sortie l'angle de pivotement du bloc d'orientation que l'on notera $\theta(t)$, de transformée de Laplace $\Theta(p)$. Bien préciser toutes les variables intermédiaires et leurs unités.

Question 2 : fonction de transfert du moteur

Pour déterminer la fonction de transfert du moteur, on dispose ci-contre de sa réponse à un échelon de tension de 1 V.



21) Justifier qu'un modèle du premier ordre peut être retenu pour M(p).

22) Proposer une fonction de transfert du premier ordre pour M(p).

23) En déduire la fonction de transfert du moteur équipé du retour tachymétrique.

<u>Question 3 :</u> fonction de transfert et comportement de la chaîne d'action

31) Montrer que la fonction de transfert de la chaîne d'action complète est donnée approximativement par :

$$H(p) = K_c \frac{0,003}{(1+0,025p)p}$$

Ceci si les angles β et θ sont exprimés dans la même unité.

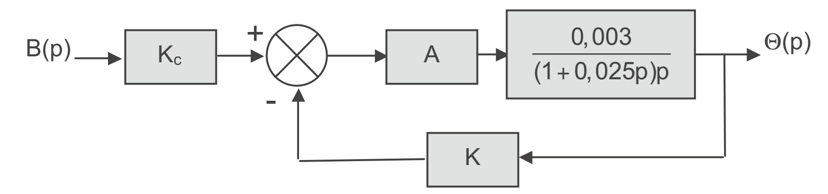
32) Le véhicule est brusquement chargé à l'arrière : donner l'allure de la loi d'entrée.

33) Tracer l'allure de la réponse. Est-ce satisfaisant ?

<u>Question 4 :</u> asservissement de position

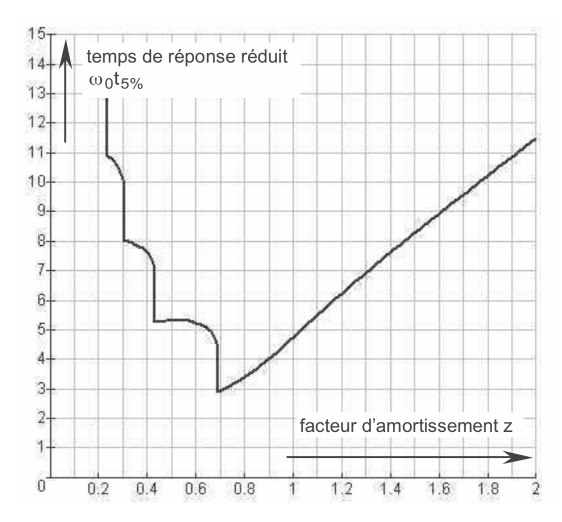
Pour remédier à ce problème on asservit le système en position en plaçant :

- un capteur de position de gain K, qui mesure l'angle θ ;
- un amplificateur de gain A dans la boucle :



41) Quel est l'écart en position du système ?

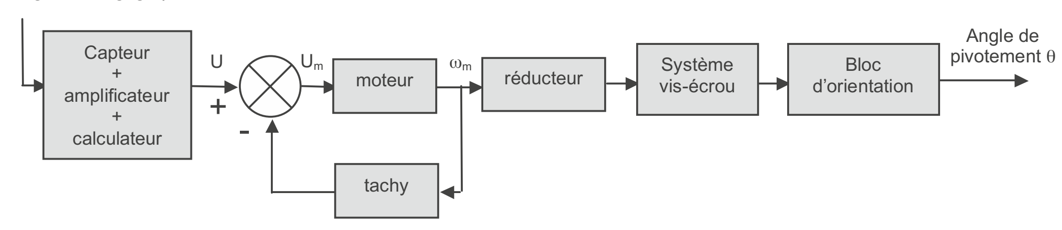
42) À partir de la courbe ci-contre, déterminer la quantité AK qui permet d'avoir le système le plus rapide. Calculer alors le temps de réponse à 5% du système.



II-3 Correction

<u>Question 1 :</u> schéma bloc de la chaîne d'action

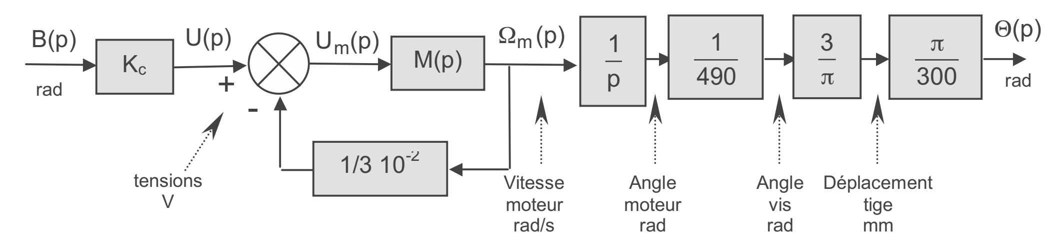
La description fournie permet d'élaborer dans un premier temps le schéma fonctionnel :



Les fonctions de transfert des différents blocs sont :

- Ensemble {capteur, amplificateur, calculateur} : gain K_c V/rad
- Moteur : M(p)
- Génératrice tachymétrique : gain $K_{tachy} = 1/3\ 10^{-2}$ V /rad.s^{-1}
- Réducteur : gain 1/490
- Système vis-écrou : gain 6 mm/tr = 6/2π mm/rad = 3/π mm/rad
- Bloc d'orientation linéarisé : gain π/20x15 = π/300 rad/mm

Par ailleurs, il y a une intégration dans la chaîne comprise entre la vitesse du moteur ω(t) et l'angle de pivotement du bloc d'orientation θ(t). Ces considérations permettent d'élaborer le schéma bloc suivant dont on vérifie la cohérence des unités :



Question 2 : fonction de transfert du moteur

21) Compte tenu du zoom autour de l'origine montrant une tangente initiale horizontale et de l'allure globale de la courbe ne présentant pas d'oscillations, la forme de la fonction de transfert semble être celle d'un système d'ordre au moins deux, fortement amorti, comme par exemple un système fondamental du second ordre à deux constantes de temps dont la fonction de transfert serait du type :

$$M(p) = \frac{K_m}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

Mais :

- puisque la tangente horizontale à l'origine ne s'observe que pour des instants très courts de l'ordre de la milliseconde et est totalement imperceptible aux échelles de temps d'usage (dès quelques centièmes de seconde),
- puisque les constructions ci-dessous montrent des caractéristiques très proches de celles d'un système du premier ordre,

l'une des constantes de temps est manifestement suffisamment faible par rapport à l'autre pour que l'on puisse approximer très raisonnablement M(p) par :

$$M(p) = \frac{K_m}{1+\tau_m p}$$

où $\tau_m = \max\{\tau_1, \tau_2\}$

ceci si les sollicitations du moteur ne sont pas trop rapides.

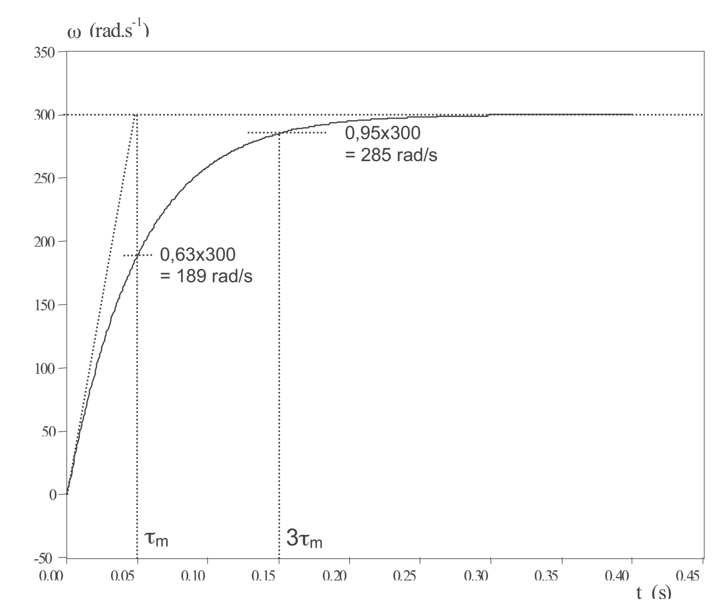
22) On mesure :

- τ_m = <u>0,05 s</u>
- une valeur asymptotique de 300 rad/s

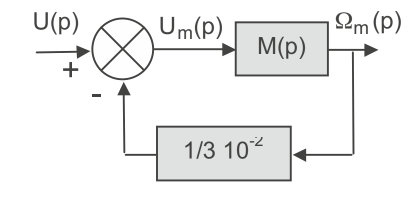
La sollicitation étant de 1V, le gain K_m est donc :
K_m = <u>300 rad.s^{-1}/V</u>

On adoptera donc :

$$\boxed{M(p) = \frac{300}{1+0,05p}}$$



23) La fonction de transfert du moteur équipé de la boucle tachymétrique est donc :



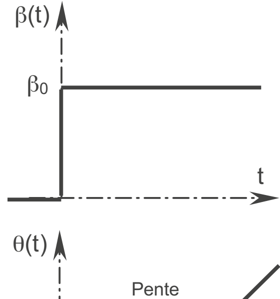
$$M_t(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{M(p)}{1 + \frac{1}{3}10^{-2}M(p)} = \frac{\frac{300}{1+0,05p}}{1 + \frac{1}{1+0,05p}} = \boxed{\frac{150}{1+0,025p}}$$

NB : on constate que l'effet essentiel du retour tachymétrique est de diminuer la constante de temps donc d'augmenter la rapidité du moteur. Accessoirement cela diminue aussi son gain.

<u>Question 3 :</u> fonction de transfert de la chaîne d'action

31) D'après ce qui précède la fonction de transfert de la chaîne d'action est :

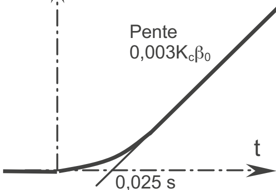
$$H(p) = \frac{\Theta(p)}{B(p)} = K_c \frac{150}{1+0,025p} \frac{1}{p} \frac{1}{490} \frac{3}{\pi} \frac{\pi}{300} \approx \boxed{K_c \frac{0,003}{(1+0,025p)p}}$$



32) Si le véhicule est brusquement chargé à l'arrière, l'angle de tangage passe brusquement de sa valeur de référence nulle à une valeur sensiblement constante. L'entrée du système peut donc être assimilée à un échelon de niveau β_0.

33) Dans le domaine de Laplace, l'entrée est donc : $B(p) = \frac{\beta_0}{p}$

et la sortie alors : $\Theta(p) = \frac{K_c\beta_0}{p^2} \frac{0,003}{1+0,025p}$



On reconnaît une réponse identique à celle d'un premier ordre à une rampe dont l'allure dans le domaine temporel est rappelée ci-contre.

Ceci pouvait se percevoir plus tôt. En effet, la fonction de transfert H(p) s'écrit comme le produit d'un système du premier ordre et d'un intégrateur. Ainsi sa réponse à un échelon sera l'intégrale de la réponse d'un système du premier ordre à un échelon, c'est-à-dire sa réponse à une rampe.

Ce n'est bien entendu pas satisfaisant puisque θ(t) ne tend pas vers une valeur constante : le bloc d'orientation pivote indéfiniment !

<u>Question 4 :</u> asservissement de position

41) L'écart statique de position s'écrit : $\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+FTBO(p)}$

L'utilisation de cette relation utilise implicitement le théorème de la valeur finale qui n'est vrai que si cette limite converge. Ceci peut se vérifier a posteriori à la question suivante. Une vérification immédiate consiste à s'assurer que les pôles de la fonction sont bien tous à partie réelle strictement négative.

Or, la fonction est : $\frac{1}{1+FTBO(p)} = \frac{1}{1 + AK\frac{0,003}{(1+0,025p)p}} = \frac{(1+0,025p)p}{(1+0,025p)p + 0,003AK}$

dont les pôles sont bien à partie réelle strictement négative puisque le dénominateur est clairement un polynôme de degré deux à coefficients réels positifs.

Ainsi $\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+FTBO(p)} = \lim_{p\to 0} \frac{(1+0,025p)p}{(1+0,025p)p + 0,003AK} = 0$

L'écart statique de position est <u>nul</u>. Résultat prévisible, puisque <u>la FTBO est de classe 1</u>.

Ainsi, en régime permanent, l'analyse du schéma bloc montre que l'angle de pivotement tend vers une valeur constante qui est :

$$\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \frac{K_c}{K}\beta_0$$

β_0 → K_c → $K_c\beta_0$ (+) → ⊗ → 0 → A → $\frac{0,003}{(1+0,025p)p}$ → $\theta = \frac{K_c}{K}\beta_0$

retour : K → $K_c\beta_0$ (-)

■ **Remarque importante :**

Cela n'aurait aucun sens de parler d'erreur statique ici puisque les angles θ et β ne sont pas comparables. Le système n'a pas pour fonction de générer un angle de pivotement du bloc de rotation égal à l'angle de tangage : le choix du rapport K_c/K définit la loi qui doit lier θ à β, sans être pour autant nécessairement une égalité.

42) La fonction de transfert de l'asservissement (FTBF) est :

$$\frac{\Theta(p)}{B(p)} = K_c \frac{A\dfrac{0,003}{(1+0,025p)p}}{1+AK\dfrac{0,003}{(1+0,025p)p}} = \frac{0,003AK_c}{(1+0,025p)p+0,003AK} = \boxed{\frac{\dfrac{K_c}{K}}{1+\dfrac{1}{0,003AK}p+\dfrac{0,025}{0,003AK}p^2}}$$

Il s'agit de la fonction de transfert d'un système fondamental du 2ème ordre que l'on identifie à :

$$\frac{\Theta(p)}{B(p)} = \frac{\dfrac{K_c}{K}}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

La valeur K_c/K du gain permet de retrouver le résultat énoncé à partir de l'écart statique : soumis à un échelon de tangage β_0 le système réagit en provoquant un angle de pivotement du bloc optique qui tend vers $(K_c/K)\beta_0$.

Par ailleurs, on identifie :

- la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{0,003AK}{0,025}}$
- le facteur d'amortissement $z = \dfrac{1}{2x0,003AK}\sqrt{\dfrac{0,003AK}{0,025}}$

D'où $z^2 = \dfrac{1}{4x(0,003AK)^2}\dfrac{0,003AK}{0,025} = \dfrac{1}{3.10^{-4}AK}$ et donc $AK = \dfrac{1}{3.10^{-4}z^2}$

La rapidité du système sera classiquement maximale pour un facteur d'amortissement z = 0,69, ce que confirme la courbe fournie par l'énoncé.

Ceci suppose d'accepter un dépassement de 5% avant la convergence vers la valeur asymptotique attendue $(K_c/K)\beta_0$. Ceci semble raisonnable pour ce système. Si aucun dépassement n'était toléré, le système le plus rapide serait pour z = 1.

Il faut donc choisir $\boxed{AK \approx 7000 \text{ V/rad}}$

Le temps de réponse à 5% du système est alors (résultat connu) sensiblement $t_{5\%} \approx \dfrac{3}{\omega_0}$.

La courbe proposée donne une valeur plus précise : $t_{5\%} = \dfrac{2,86}{\omega_0}$.

Ceci avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{0,003AK}{0,025}} = \sqrt{\dfrac{0,003x7000}{0,025}} \approx 29\ \text{rad/s}$, d'où $\boxed{t_{5\%} \approx 0,1\ \text{s}}$



III - ASSERVISSEMENT DE POSITION DU FÛT D'UN ROBOT

D'après une épreuve du Concours Banque PT.

III-1 Présentation

Le robot étudié est un robot série ou anthropomorphe, c'est-à-dire un robot dont la structure articulaire rappelle celle du bras humain. On s'intéresse ici à l'articulation du fût par rapport à la base, qui fait l'objet d'un asservissement de position angulaire autour d'un axe vertical.



III-2 Travail demandé

III-2-1 Modèle de la motorisation

Le moteur retenu à l'issue d'une étude dynamique est un moteur à courant continu à induit plat qui présente l'avantage de posséder une très faible inertie et une très faible inductance.

Le comportement dynamique de ce type de moteur, dans l'hypothèse où l'inductance est quasi nulle, est donné par les équations suivantes :

- L'équation électrique liant la tension d'alimentation u(t) à l'intensité du courant de commande i(t), en modélisant l'induit comme une simple résistance R (inductance nulle) en série avec une force électromotrice e(t) :
  $u(t) - e(t) = Ri(t)$
- L'équation mécanique liant la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du rotor soumis à un couple électromagnétique $c_m(t)$ et un couple résistant $c_{re}(t)$:
  $$c_m(t) - c_{re}(t) = J\,\frac{d\omega_m}{dt}(t)$$
  où J est l'inertie de l'ensemble des parties mobiles, ramenée sur le rotor.
- Les équations de couplage électromécanique qui s'écrivent :
  $c_m(t) = K_t\ i(t)$
  $e(t) = K_e\ \omega_m(t)$
  où K_t et K_e sont des constantes, appelées respectivement constante de couple et constante de vitesse.

<u>Question 1 :</u> étude du moteur seul

On se propose, tout d'abord, d'étudier le modèle du moteur à vide, c'est-à-dire du moteur seul, dans un premier temps par un modèle de connaissance issu des équations précédentes puis, dans un second temps, par une étude expérimentale de validation.

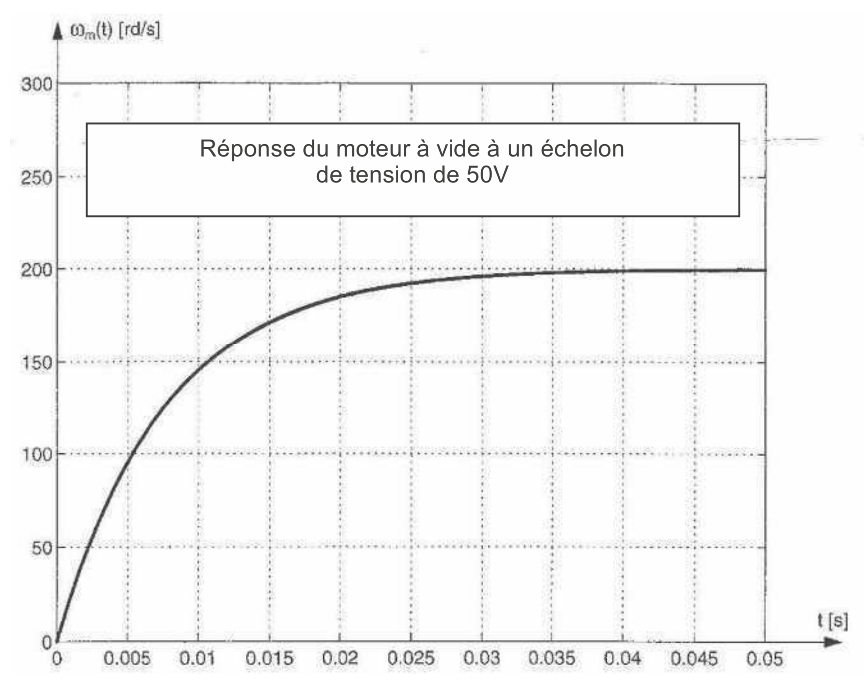
À vide, l'inertie totale entraînée par le moteur n'est que $J = J_m$, inertie de son rotor, et le couple résistant est nul. On sait par ailleurs, d'après la documentation du moteur, que :

$K_e = 25{,}5\ V/(1000\ tr/min)$
$K_t = 0{,}244\ Nm/A$
$R = 0{,}46\ \Omega$

11) Après avoir appliqué la transformation de Laplace à chacune des équations précédentes, sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, exprimer la transformée $\Omega_m(p)$ de la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ en fonction de la transformée U(p) de la tension u(t).

12) Mettre le résultat sous la forme $\Omega_m(p) = M(p).U(p)$ avec $M(p) = \dfrac{K_m}{1+T_m p}$ en précisant K_m et T_m.

13) Afin de valider le modèle précédent, en particulier le fait d'avoir considéré l'inductance comme nulle, et de déterminer l'inertie J_m du rotor, on effectue une étude expérimentale sous forme de l'observation de la réponse indicielle du moteur seul soumis à un échelon de tension u_0 = 50 V. La figure ci-dessous donne le résultat de cet essai :



a) Cette réponse correspond-elle bien au modèle proposé ? Marquer sur cette courbe les éléments caractéristiques de cette réponse : constante de temps, comportement à l'origine, valeurs remarquables, etc.

b) Donner la valeur expérimentale de K_m et T_m. En déduire la valeur de J_m.

c) Commenter la valeur expérimentale de K_m par rapport à sa valeur issue du modèle de connaissance. Pour la suite de l'étude, on prendra $K_m = 4\ rad.s^{-1}.V^{-1}$.

<u>Question 2 :</u> Modèle de la motorisation complète

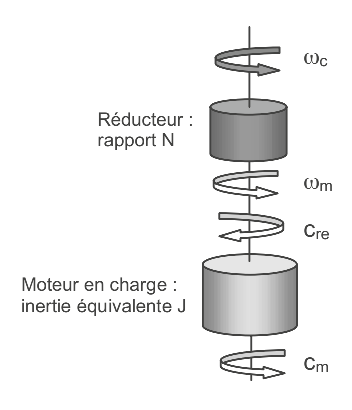
Le réducteur retenu pour cette motorisation possède un rapport de réduction N = 200.

L'inertie ***totale*** J de l'ensemble des parties mobiles, ramenée sur l'axe du moteur, dépend de la posture du robot et de la masse manipulée.

 Fiche ressource "inertie équivalente"

Une étude cinétique permet de définir :

- une valeur « moyenne » de J autour du point de fonctionnement : $J_{me} = 6,5.10^{-3} kg.m^2$
- un intervalle $[5,7.10^{-3} ; 8,4.10^{-3}] kg.m^2$ de variation pour J.

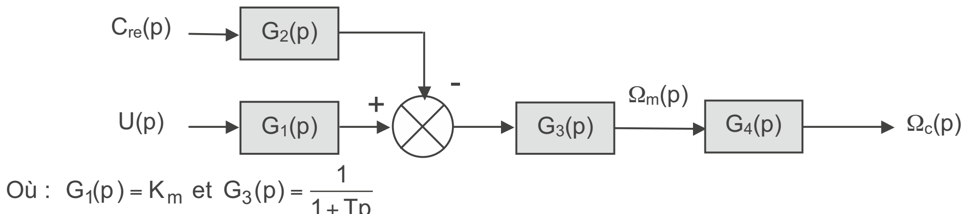


Modèle équivalent

21) À partir des équations fournies, exprimer la transformée $\Omega_m(p)$ de la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en charge en fonction de la transformée U(p) de la tension u(t) et de la transformée $C_{re}(p)$ du couple résistant $c_{re}(t)$ sous la forme :

$$\Omega_m(p) = F_1(p).U(p) - F_2(p).C_{re}(p)$$

22) Montrer que le modèle du système {moteur + réducteur + charge} peut se mettre sous la forme du schéma bloc :



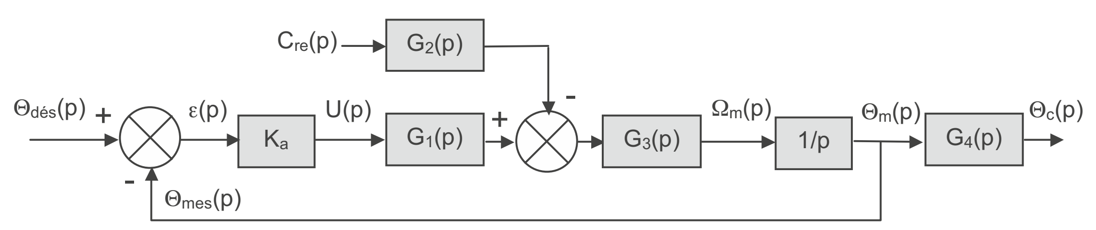
Où : $G_1(p) = K_m$ et $G_3(p) = \dfrac{1}{1+Tp}$

$\Omega_c(p)$ étant la transformée de la vitesse de rotation $\omega_c(t)$ de la charge.

23) En déduire la relation entre la constante de temps du moteur à vide T_m et la constante de temps du moteur en charge T. Faire l'application numérique pour la valeur moyenne J_{me} de J.

III-2-2 Asservissement de position

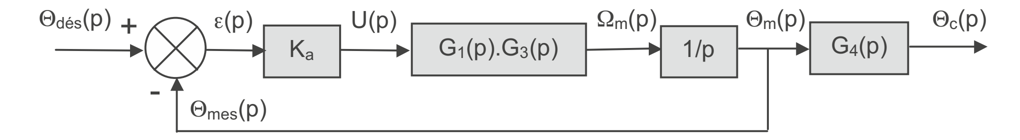
Pour assurer l'asservissement de position angulaire du fût du robot, on associe au moteur un variateur modélisé par un amplificateur de gain pur K_a et on met en place un capteur de position angulaire en bout du moteur, permettant la description par retour unitaire :



NB : Ceci n'est classiquement qu'une représentation, dans laquelle le gain K_a incorpore le gain, en réalité non unitaire, du capteur et celui, identique, du transducteur de consigne angulaire.

$\Theta_c(p)$ est la transformée de l'angle $\theta_c(t)$ de la charge (position angulaire asservie du fût).
$\Theta_m(p)$ est la transformée de l'angle $\theta_m(t)$ du moteur.
$\Theta_{dés}(p)$ est la transformée de l'angle $\theta_{dés}(t)$ de consigne (valeur attendue de $\theta_m(t)$ et non de $\theta_c(t)$).
$\Theta_{mes}(p)$ est la transformée de l'angle $\theta_{mes}(t)$ mesuré qui n'est autre que $\theta_m(t)$, grandeur asservie.

Pour la suite de l'étude, on considérera, que le couple résistant $c_{re}(t)$ est nul : on étudie les performances de l'asservissement en tant que ***système suiveur***. D'où le schéma de travail :



Question 3 : Étude en boucle ouverte

Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $F(p) = \dfrac{\Theta_{mes}(p)}{\varepsilon(p)}$.

Question 4 : Étude en boucle fermée

41) Exprimer la fonction $H(p) = \dfrac{\Theta_m(p)}{\Theta_{dés}(p)}$.

Préciser les expressions du gain K_s, du facteur d'amortissement z et de la pulsation propre ω_0 de cette fonction de transfert du deuxième ordre.

42) On règle le gain K_a à la valeur 15 V/rad.
Tracer alors l'allure de la réponse indicielle pour une consigne $\theta_{dés}(t) = \theta_0$ pour t > 0, (avec θ_0 = 100 rad), pour la valeur moyenne J_{me} de l'inertie J.
Calculer les valeurs limites de z et ω_0, en fonction des variations de J.
Conclure quant à l'influence des variations de J.
Conclure quant à la qualité du comportement de l'asservissement.

43) On souhaite limiter les oscillations. Quelle valeur du gain K_a permet d'avoir un facteur d'amortissement de 0,7 au minimum ? Quelle en est la conséquence en termes de rapidité ?

44) Quel doit être le réglage maximal du gain K_a si aucun dépassement n'est toléré ? Même question concernant la rapidité.

45) Quelle condition sur le réducteur permet de conclure que la précision de l'asservissement se répercute sur l'angle θ_c du fût ?



III-3 Correction

III-3-1 Modèle de la motorisation

Question 1 : étude du moteur seul

11) Des relations fournies, avec un couple résistant $c_{re}(t)$ nul et pour seule inertie $J=J_m$ puisque le moteur est à vide, il vient classiquement, sous les conditions de Heaviside :

$$\begin{cases} U(p) - E(p) = RI(p) \\ C_m(p) = J_m p\Omega_m(p) \\ C_m(p) = K_t\, I(p) \\ E(p) = K_e\, \Omega_m(p) \end{cases}$$

D'où il vient $\boxed{\Omega_m(p) = \dfrac{1/K_e}{1 + \dfrac{RJ_m}{K_eK_t}p}U(p)}$.

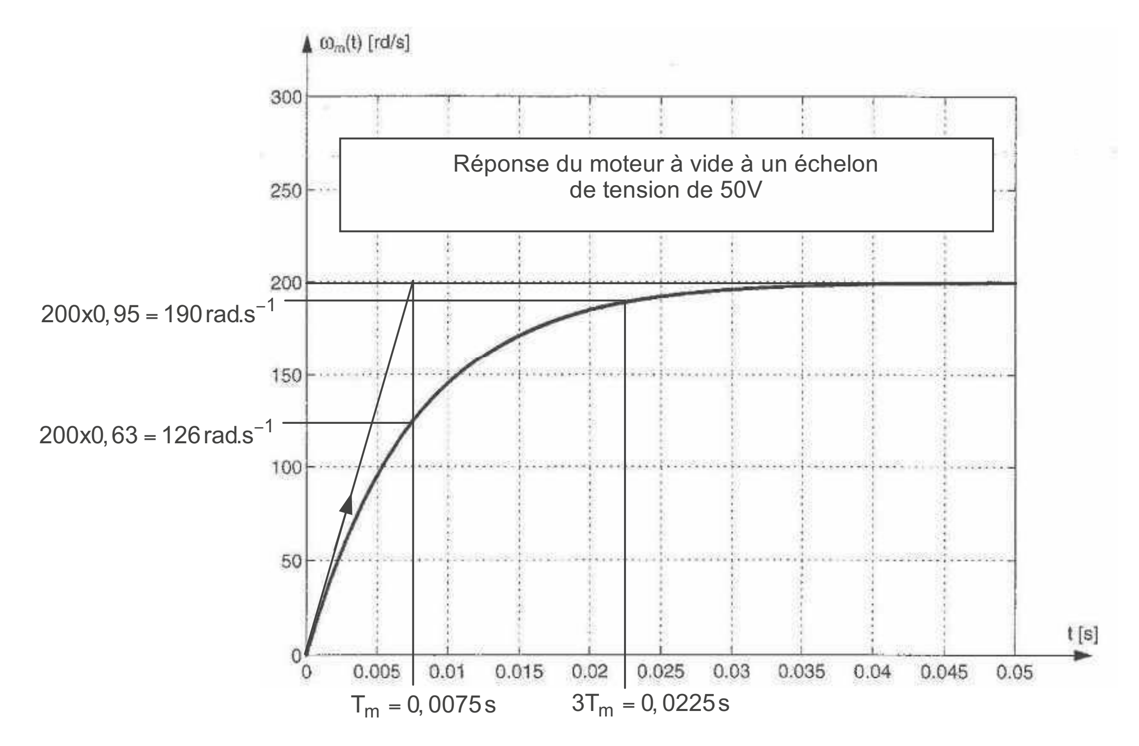
12) On a donc bien $\Omega_m(p) = M(p).U(p)$ avec $M(p) = \dfrac{K_m}{1+T_m p}$.

Il s'agit d'une fonction de transfert du premier ordre avec :

- un gain $\boxed{K_m = \dfrac{1}{K_e}}$
- une constante de temps $\boxed{T_m = \dfrac{RJ_m}{K_eK_t}}$

13a) L'allure globale de la réponse indicielle correspond bien à celle d'un système fondamental du premier ordre :
- absence d'oscillations,
- tangente à l'origine non horizontale.

Une analyse quantitative des points remarquables confirme la validité du modèle :



- La tangente à l'origine intercepte bien l'asymptote horizontale à l'instant où la valeur est 63% de la valeur asymptotique.
- Au triple de cet instant, la valeur atteinte est 95% de la valeur asymptotique.

Ces observations valident le modèle du premier ordre et donc les hypothèses qui y ont conduit, en particulier le fait de ne pas avoir tenu compte de l'inductance.

13b) D'après ce qui précède :

$K_m u_0 = 200\,\text{rad.s}^{-1}$ d'où, puisque l'échelon est $u_0 = 50\,\text{V}$, $\boxed{K_m = 4\,\text{rad.s}^{-1}/\text{V}}$

et immédiatement $\boxed{T_m = 0,0075\,\text{s}}$

On déduit de cette dernière valeur $T_m = \dfrac{RJ_m}{K_e K_t}$, l'inertie du rotor : $J_m = \dfrac{K_e K_t}{R} T_m$

Soit, puisque le constructeur donne les valeurs :

$$\begin{cases} K_e = 25,5\ \text{V}/(1000\,\text{tr}/\text{min}) = 25,5.10^{-3}\,\dfrac{60}{2\pi} = 0,244\ \text{V}/\text{rad.s}^{-1} \\ K_t = 0,244\ \text{Nm}/\text{A} \\ R = 0,46\,\Omega, \end{cases}$$

$J_m = \dfrac{0,244 \text{x} 0,244}{0,46} \text{x} 0,0075$ soit $\boxed{J_m = 9,7.10^{-4}\,\text{kg.m}^2}$

Remarque : ayant réécrit ci dessus K_e avec des unités convenables, on peut vérifier que $K_e = K_t$, ce qui correspond à un moteur où toute la puissance électromagnétique est transformée en puissance mécanique.

13c) La valeur théorique de K_m est $K_m = \dfrac{1}{K_e}$ d'après la question 12.

Soit, compte tenu de la valeur de $K_e = 0,244\,\text{V}/\text{rad.s}^{-1}$, $\boxed{K_m = 4,1\,\text{rad.s}^{-1}/\text{V}}$

Si on compare cette valeur à la valeur expérimentale de $4\,\text{rad.s}^{-1}/\text{V}$, cela fait une erreur 2,5%, ce qui est tout à fait raisonnable.

Question 2 : Modèle de la motorisation complète

21) Cette fois le moteur entraîne une charge, donc l'inertie est modifiée et est notée J. De plus il s'exerce un couple résistant $c_{re}(t)$. Il vient alors, sous les conditions de Heaviside :

$$\begin{cases} U(p) - E(p) = RI(p) \\ C_m(p) - C_{re}(p) = Jp\Omega_m(p) \\ C_m(p) = K_t\, I(p) \\ E(p) = K_e\, \Omega_m(p) \end{cases}$$

Ce qui permet d'exprimer : $\boxed{\Omega_m(p) = \dfrac{\dfrac{1}{K_e}}{1+\dfrac{RJ}{K_eK_t}p}U(p) - \dfrac{\dfrac{R}{K_eK_t}}{1+\dfrac{RJ}{K_eK_t}p}C_{re}(p)}$

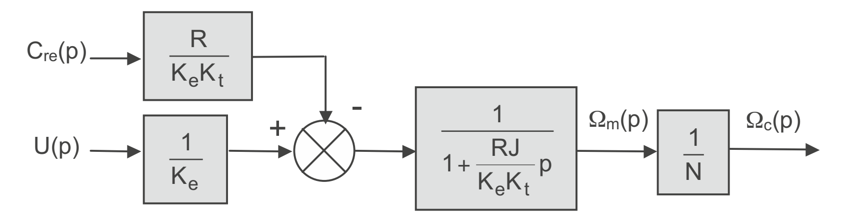
qui est donc bien de la forme demandée si on pose : $F_1(p) = \dfrac{\dfrac{1}{K_e}}{1+\dfrac{RJ}{K_eK_t}p}$ et $F_2(p) = \dfrac{\dfrac{R}{K_eK_t}}{1+\dfrac{RJ}{K_eK_t}p}$

22) Alors il est clair que l'on peut décrire le modèle sous la forme du schéma bloc proposé. Il suffit pour cela de constater que les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont le même dénominateur, qui peut donc être mis en facteur :

$$\Omega_m(p) = \frac{\dfrac{1}{K_e}}{1+\dfrac{RJ}{K_eK_t}p}U(p) - \frac{\dfrac{R}{K_eK_t}}{1+\dfrac{RJ}{K_eK_t}p}C_{re}(p) = \frac{1}{1+\dfrac{RJ}{K_eK_t}p}\left[\frac{1}{K_e}U(p) - \frac{R}{K_eK_t}C_{re}(p)\right]$$

Par ailleurs $\Omega_c(p)$ et $\Omega_m(p)$ sont liés par le rapport de réduction soit : $\Omega_c(p) = \dfrac{1}{N}\Omega_m(p)$.

D'où le schéma :



qui est donc bien de la forme demandée si on pose :

$$\boxed{G_1(p) = \frac{1}{K_e} = K_m \quad ; \quad G_2(p) = \frac{R}{K_eK_t} \quad ; \quad G_3(p) = \frac{1}{1+Tp}\text{, avec } T = \frac{RJ}{K_eK_t} \quad ; \quad \text{et } G_4(p) = \frac{1}{N}}$$

23) Les constantes de temps à vide et en charge du moteur sont respectivement :

$$T_m = \frac{RJ_m}{K_eK_t} \text{ et } T = \frac{RJ}{K_eK_t}$$

Leur rapport est donc tout simplement $\boxed{\dfrac{T}{T_m} = \dfrac{J}{J_m}}$, c'est-à-dire le rapport des inerties entraînées.

Plus la charge inertielle est importante, <u>plus le système est lent</u>.

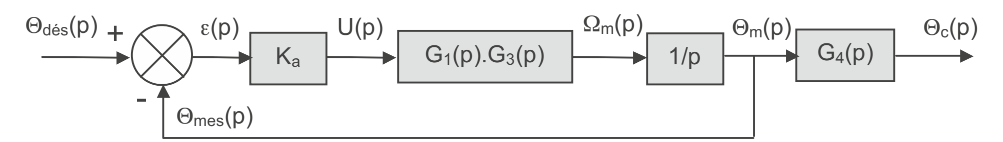
Pour la valeur moyenne $J_{me} = 6,5.10^{-3}\text{kg.m}^2$ de l'inertie, le rapport est :

$$\frac{T_{me}}{T_m} = \frac{J_{me}}{J_m} = \frac{6,5.10^{-3}}{9,7.10^{-4}} = 6,7$$

Soit, en moyenne, une <u>multiplication par 6,7</u> de la constante de temps par rapport à celle du moteur à vide.

III-3-2 Asservissement de position

Le système maintenant étudié est modélisé selon le schéma :



<u>Question 3 :</u> Étude en boucle ouverte

La fonction de transfert en boucle ouverte est : $F(p)=\frac{K_aG_1(p)G_3(p)}{p}$.

Soit, compte tenu des expressions des fonctions de transfert $G_1(p)$ et $G_3(p)$: $\boxed{F(p)=\frac{K_aK_m}{p(1+Tp)}}$

<u>Question 4 :</u> Étude en boucle fermée

41) $H(p)=\frac{\Theta_m(p)}{\Theta_{dés}(p)}=\frac{F(p)}{1+F(p)}=\frac{\frac{K_aK_m}{p(1+Tp)}}{1+\frac{K_aK_m}{p(1+Tp)}}=\frac{K_aK_m}{K_aK_m+p(1+Tp)}$, soit, sous forme canonique :

$$\boxed{H(p)=\frac{1}{1+\frac{1}{K_aK_m}p+\frac{T}{K_aK_m}p^2}}$$

On reconnaît un système fondamental du second ordre de gain $K_s=1$ et on identifie :

$$\begin{cases}\frac{2z}{\omega_0}=\frac{1}{K_aK_m}\\ \frac{1}{\omega_0^2}=\frac{T}{K_aK_m}\end{cases}\quad \text{soit}\quad \begin{cases}\omega_0=\sqrt{\frac{K_aK_m}{T}}\\ z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{K_aK_mT}}\end{cases}$$

42) Le gain est toujours unitaire, indépendamment de l'inertie. Par contre, la pulsation propre et le facteur d'amortissement en dépendent, puisqu'ils dépendent de la constante de temps T.
On a vu, question 23, que pour l'inertie moyenne cette constante de temps est 6,7 fois celle du moteur à vide, soit T_{me} = 6,7xT_m ≈ <u>0,05 s</u>.

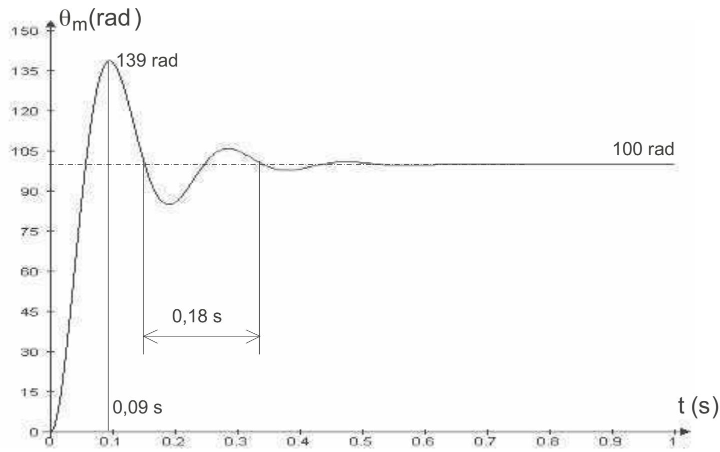
On rappelle par ailleurs que $K_m=4\ rad.s^{-1}/V$ et que le gain du correcteur est réglé à $K_a=15V/rad$

D'où, pour la posture « moyenne » du robot :

$$\omega_0\approx\sqrt{\frac{15x4}{0,05}}\approx 34,64\ rad/s$$

$$z\approx\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{15x4x0,05}}\approx 0,29$$

ce qui permet de tracer ci-contre la réponse de l'asservissement à un échelon de 100 rad à l'aide d'un logiciel de simulation.



On peut lire sur cette réponse:

- la valeur relative du premier dépassement : $D_1 = e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} = e^{-\frac{\pi x 0,29}{\sqrt{1-0,29^2}}} \approx 0,39$ (soit 39%)
- l'instant du premier dépassement : $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} = \dfrac{\pi}{36,64\sqrt{1-0,29^2}} \approx 0,09$ s
- la pseudo période des oscillations : $2t_1 \approx 0,18$ s

Pour apprécier, comme il est demandé, les variations de la pulsation propre du facteur d'amortissement en fonction de l'inertie, il faut revenir à l'expression de la constante de temps T en fonction de l'inertie J :

$$T = \frac{T_m}{J_m} J$$

avec $T_m = 0,0075$ s et $J_m = 9,7.10^{-4}$ kg.m^2, voir question 23.

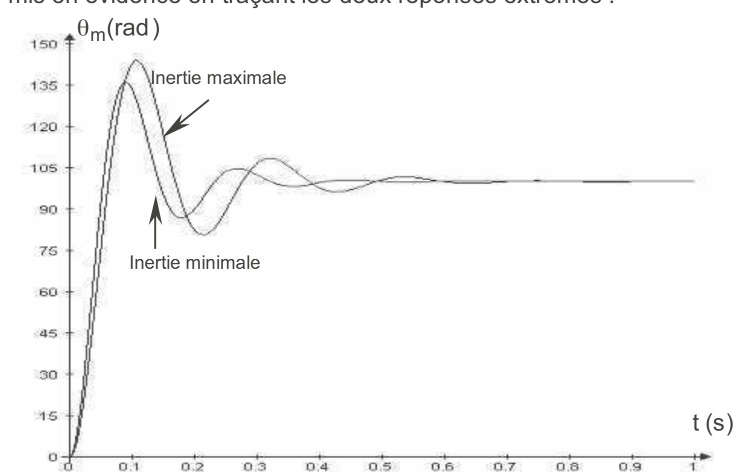
Donc, si l'inertie J varie dans l'intervalle $[5,7.10^{-3} ; 8,4.10^{-3}]$ kg.m^2, la constante de temps T varie dans l'intervalle [0,044 ; 0,065] s.

Alors la pulsation propre et le facteur d'amortissement sont donc respectivement dans les intervalles :

$$\boxed{\omega_0 \in [30,4;\ 36,9] \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad z \in [0,25;\ 0,31]}$$

On observe que l'inertie influence les deux paramètres caractéristiques des oscillations (z < 1) de la réponse temporelle de l'asservissement, mais dans une mesure relativement faible (variations de l'ordre de 20%), ceci peut être mis en évidence en traçant les deux réponses extrêmes :

- l'une pour l'inertie minimale soit :
  $J_m = 5,7.10^{-3}$ kg.m^2
  T = 0,044 s
  $\omega_0 = 36,9$ rad / s
  $z = 0,31$
- l'autre pour l'inertie maximale soit :
  $J_m = 8,4.10^{-3}$ kg.m^2
  T = 0,065 s
  $\omega_0 = 30,4$ rad / s
  $z = 0,25$



L'asservissement est donc précis, puisque la réponse tend bien vers la consigne. Mais il présente des oscillations relativement importantes dans toutes les postures du robot.

43) On souhaite limiter les oscillations en imposant un facteur d'amortissement supérieur à 0,7.

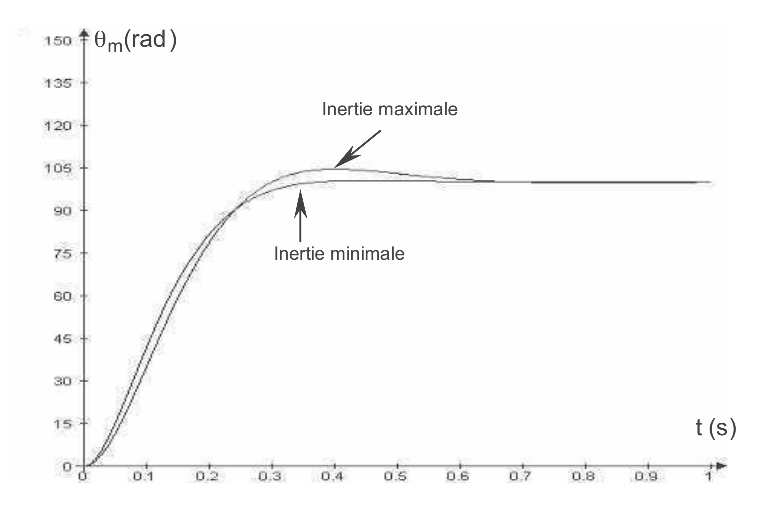
Soit $z = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{K_a K_m T}} = 0,7$ d'où $K_a = \dfrac{1}{4x0,7^2 K_m T}$

Il convient de se placer dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire dans la posture du robot où l'inertie est maximale, soit lorsque la constante de temps T vaut 0,065 s.

On en déduit la valeur de réglage du gain du correcteur : $K_a = \dfrac{1}{4x0,7^2 x4x0,065} \approx \boxed{1,96 \text{ V / rad}}$

La validité de ce réglage peut être vérifiée sur les courbes qui suivent qui sont tracées, l'une pour l'inertie maximale, l'autre pour l'inertie minimale.

Pour l'inertie maximale, on reconnaît l'allure de la réponse indicielle d'un système fondamental du second ordre avec un facteur d'amortissement de 0,7 (dépassement de 5%).



Pour l'inertie minimale, le facteur d'amortissement vaut alors :

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1,96x4x0,044}} \approx 0,85$$

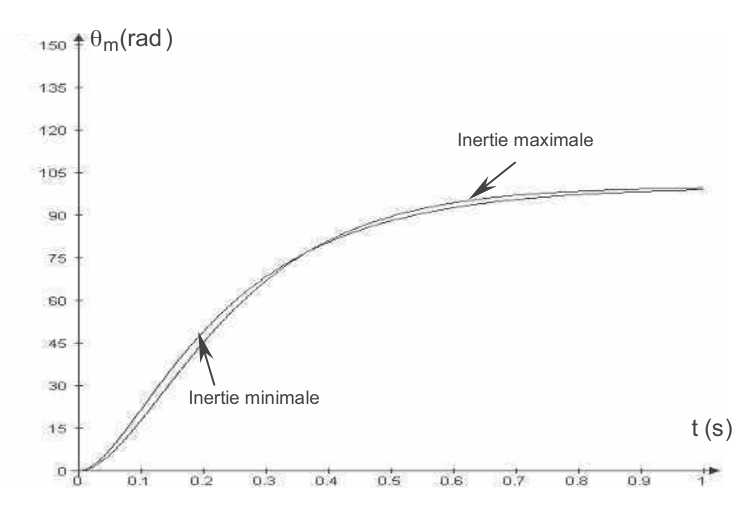
soit une valeur très proche de 1, pour laquelle la réponse présente donc un dépassement quasiment imperceptible.

On observe que la réduction des oscillations s'accompagne d'un ralentissement du système, du moins si le critère retenu est le temps de montée. Celui-ci était de l'ordre de 0,05 s pour le réglage initial du gain (voir courbes précédentes). Il est ici de l'ordre de 0,3 s.

44) Si aucun dépassement ne peut être toléré, il faut que dans le cas le plus défavorable, z reste supérieur à 1, soit donc :

$$K_a < \frac{1}{4x1^2x4x0,065} \approx \boxed{0,96\ V/rad}$$

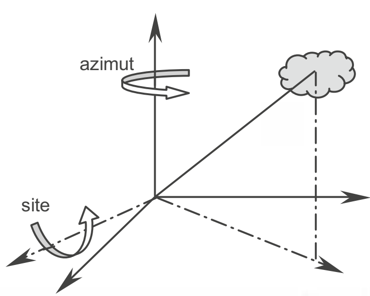
Ceci a pour effet, bien entendu, de ralentir encore plus le système :



45) L'asservissement est dans tous les cas précis, puisque la FTBO est de classe 1 et donc le gain de la FTBF unitaire. Toutefois, la grandeur asservie est l'angle du moteur. L'angle du fût se trouve réduit par le réducteur de rapport N (fonction de transfert $G_4(p)=1/N$). Il convient donc que ce réducteur soit un réducteur sans jeu et que les perturbations dues aux déformations des pièces soient négligeables dans la chaîne mécanique.

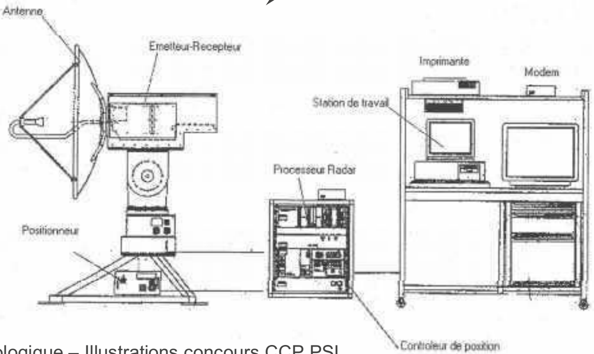
IV - COMMANDE EN POURSUITE D'UNE ANTENNE DE RADAR

IV-1 Présentation



L'antenne d'un radar doit balayer l'espace selon deux axes perpendiculaires afin de localiser un objectif (ci-contre un nuage pour un radar météorologique) et de le poursuivre : une rotation d'axe vertical permet de définir la position dite « en azimut » et une rotation d'axe horizontal permet de définir la position dite « en site » de la cible.



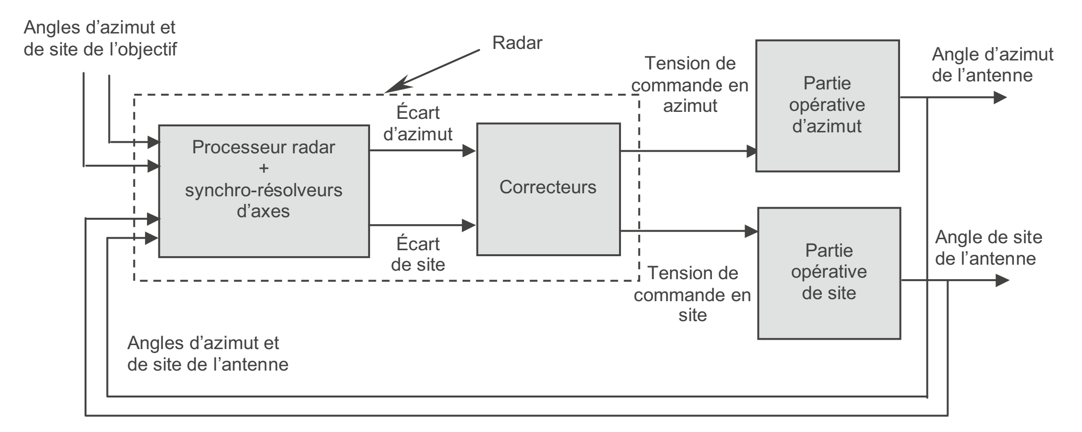


Exemple : radar météorologique – Illustrations concours CCP PSI

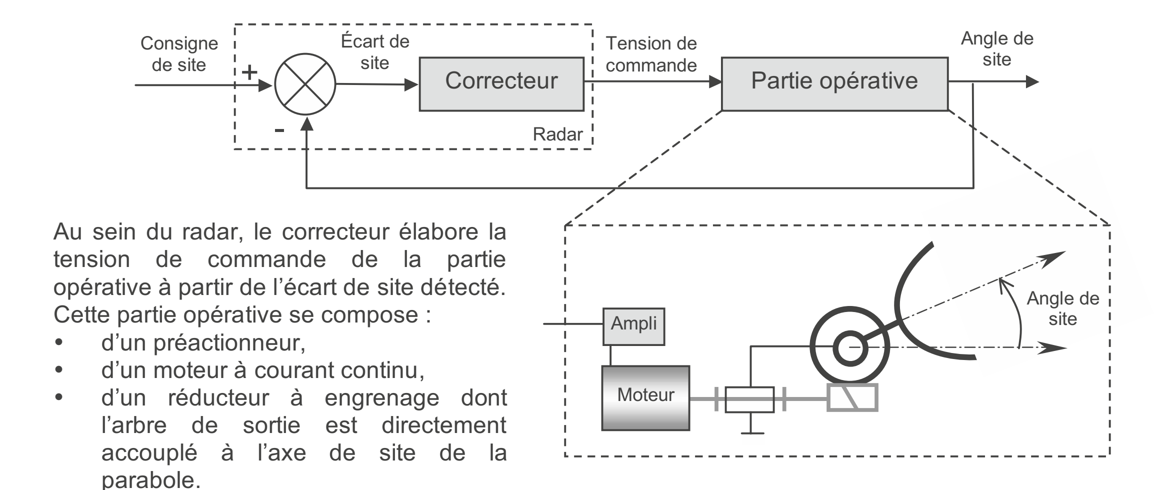
Le processeur radar d'une telle antenne fonctionne en comparateur et délivre en continu deux tensions proportionnelles aux écarts angulaires d'azimut et de site entre :

- la direction de l'objectif, connue par réflexion d'une onde hyperfréquence, principe même du radar ;
- la direction de l'axe de l'antenne, connue par deux capteurs implantés dans les axes d'azimut et de site.

Ceci permet d'asservir les deux angles de l'antenne à ceux de l'objectif, l'asservissement ayant pour fonction de minimiser (idéalement d'annuler) ces écarts, selon le schéma :



Si les inerties peuvent être considérées comme sensiblement constantes et donc en particulier si le mouvement d'un axe ne modifie pas l'inertie de l'autre axe, les effets de couplage entre la commande de l'angle d'azimut et la commande de l'angle de site peuvent être considérés comme négligeables. Les deux chaînes fonctionnelles peuvent alors être totalement indépendantes. On s'intéressera alors, par exemple, dans cet exercice, à l'asservissement de l'angle de site, qui est réalisé selon le schéma bloc :



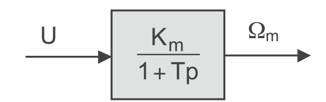
Au sein du radar, le correcteur élabore la tension de commande de la partie opérative à partir de l'écart de site détecté. Cette partie opérative se compose :

- d'un préactionneur,
- d'un moteur à courant continu,
- d'un réducteur à engrenage dont l'arbre de sortie est directement accouplé à l'axe de site de la parabole.

Le préactionneur, relié au réseau, est un amplificateur de gain A = 10.

Le rapport du réducteur est r = 1/100.

Un essai en boucle ouverte, soumettant le moteur à un échelon de tension U (en situation, donc entraînant l'inertie de toutes les pièces mobiles) permet, en relevant l'évolution de sa vitesse de rotation Ω_m, de lui associer un modèle du premier ordre :



- de gain $K_m = 38\ rad.s^{-1}.V^{-1}$.
- de constante de temps : T = 0,2 s.

Le cahier des charges impose les performances suivantes :

- le système doit être le plus rapide possible, sans que sa réponse ne présente d'oscillations ;
- lors de la poursuite d'un objectif évoluant à la vitesse angulaire de 10°/s, l'erreur de traînage ne doit pas dépasser 0,5°.

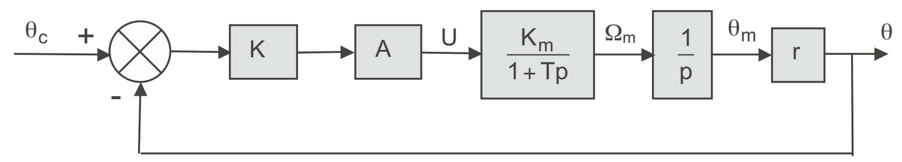
L'objectif de l'étude est de montrer dans un premier temps qu'un correcteur proportionnel ne permet pas de respecter ce cahier des charges. Ensuite, on montrera que l'introduction d'une boucle tachymétrique le permet.

IV-2 Travail demandé

<u>Question 1 :</u> Correction proportionnelle

On envisage dans un premier temps une correction proportionnelle de gain K.

Compte tenu de la structure précédemment décrite, et en négligeant toutes les actions mécaniques extérieures sur l'antenne (pesanteur, vent, frottements) devant les actions inertielles, l'asservissement de l'angle de site peut être représenté selon le schéma bloc :



11) Déterminer la fonction de transfert de cet asservissement : $FTBF(p) = \dfrac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)}$.

L'écrire sous forme canonique et identifier son gain, sa pulsation propre et son facteur d'amortissement. Faire les applications numériques en fonction du gain K du correcteur.

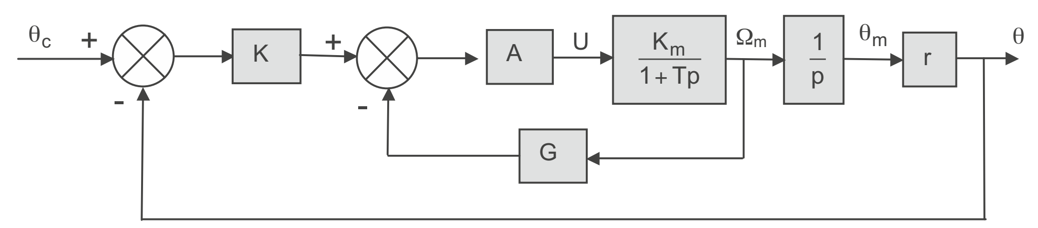
12) Calculer la valeur de K optimisant la rapidité du système tout en interdisant ses oscillations.

13) Déterminer alors l'erreur permanente de traînage lors de la poursuite d'un objectif évoluant à la vitesse angulaire de 10°/s.

14) Le cahier des charges est-il respecté ?

Question 2 : Introduction d'un retour tachymétrique

Afin d'améliorer la précision du système en poursuite, on rajoute une boucle de vitesse à la sortie du moteur, appelée retour tachymétrique, réalisée par une génératrice tachymétrique de gain G, selon le schéma ci-dessous :



21) Déterminer la nouvelle fonction de transfert de cet asservissement : $FTBF(p) = \dfrac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)}$.

22) Calculer la nouvelle valeur de K et la valeur de G permettant de satisfaire le cahier des charges.

IV-3 Correction

Question 1 : Correction proportionnelle

11) La fonction de transfert du système est classiquement : $FTBF(p) = \dfrac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)} = \dfrac{\dfrac{KAK_m r}{p(1+Tp)}}{1+\dfrac{KAK_m r}{p(1+Tp)}}$

soit sous forme canonique : $\boxed{FTBF(p) = \dfrac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{KAK_m r}p+\dfrac{T}{KAK_m r}p^2}}$

Il s'agit d'une fonction de transfert fondamentale du deuxième ordre, de gain 1, où on identifie sa pulsation propre ω_0 et son facteur d'amortissement z, par :

$$\begin{cases} \dfrac{2z}{\omega_0} = \dfrac{1}{KAK_m r} \\ \dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{T}{KAK_m r} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{KAK_m r}{T}} \\ z = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{KAK_m rT}} \end{cases} \text{ ou encore numériquement : } \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{19K} \\ z = \sqrt{\dfrac{1}{3,04K}} \end{cases}$$

12) La rapidité sera maximale sans oscillations pour z = 1, soit en réglant K à la valeur telle que :

$$\sqrt{\frac{1}{3,04K}} = 1, \text{ soit } K = \frac{1}{3,04} = \boxed{0,329 \text{ V/rad.}}$$

13) L'erreur permanente de traînage pour une entrée en rampe $\theta_c(t) = \omega t$ est : $\boxed{\varepsilon_v = \dfrac{2z}{\omega_0}\omega.}$

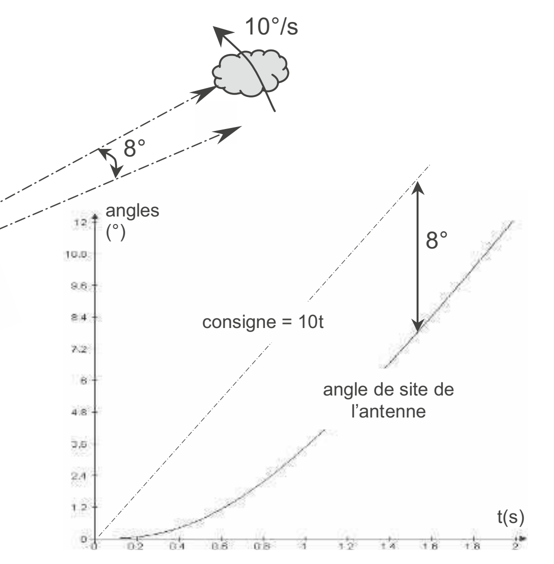
Remarque :
Ce résultat a été établi au paragraphe III-5 du chapitre 4. Il peut rapidement se démontrer en utilisant le théorème de la valeur finale, et ceci selon les deux méthodes suivantes :

> 1ère méthode :
>
> $$\varepsilon_V = \lim_{t\to\infty}(\theta_c(t)-\theta(t)) = \lim_{p\to 0} p(\Theta_c(p)-\Theta(p)) = \lim_{p\to 0} p\Theta_c(p)[1-\text{FTBF}(p)]$$
>
> avec, puisque l'entrée est une rampe de pente ω, $\Theta_c(p) = \dfrac{\omega}{p^2}$, d'où :
>
> $$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\frac{\omega}{p^2}[1-\frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}] = \lim_{p\to 0}\frac{\frac{2z}{\omega_0}+\frac{1}{\omega_0^2}p}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}\omega = \frac{2z}{\omega_0}\omega$$
>
> 2ème méthode :
>
> S'agissant d'un système asservi à retour unitaire, l'erreur se confond avec l'écart qui est :
>
> $$\varepsilon_V = \lim_{p\to 0} p\frac{\Theta_c(p)}{1+\text{FTBO}(p)} = \lim_{p\to 0} p\frac{\omega/p^2}{1+\frac{KAK_m r}{p(1+Tp)}} = \lim_{p\to 0}\frac{\omega}{p+\frac{KAK_m r}{1+Tp}} = \frac{1}{KAK_m r}\omega = \frac{2z}{\omega_0}\omega$$
>
> (on vérifie le résultat classique pour une FTBO de classe 1 : $\varepsilon_V = \dfrac{1}{K_{BO}}$)

La pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{19K} = \boxed{2,5\ \text{rad/s.}}$

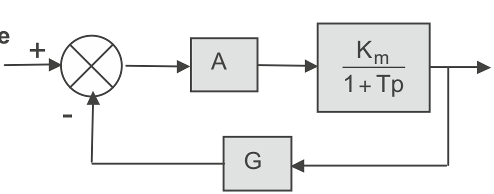
Ainsi, si ω = 10°/s, l'erreur permanente de traînage est : $\varepsilon_V = \dfrac{2x1}{2,5}x10 = \boxed{8°}$

14) Le cahier des charges exige une erreur maximale permanente de 0,5° lors de la poursuite d'un objectif évoluant à la vitesse angulaire de 10°/s. Cette exigence n'est absolument pas respectée puisque cette erreur est de 8°.





<u>**Question 2 :**</u> **Introduction d'un retour tachymétrique**



21) Pour déterminer la nouvelle fonction de transfert de l'asservissement, il faut dans un premier temps rechercher la fonction de transfert de la boucle tachymétrique :

$$\mathrm{FTBT}(p)=\frac{\dfrac{AK_m}{1+Tp}}{1+\dfrac{GAK_m}{1+Tp}}=\frac{\dfrac{AK_m}{1+GAK_m}}{1+\dfrac{T}{1+GAK_m}p}$$

Alors la fonction de transfert de l'asservissement s'écrit : $\mathrm{FTBF}(p)=\dfrac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)}=\dfrac{\mathrm{FTBT}(p)\dfrac{Kr}{p}}{1+\mathrm{FTBT}(p)\dfrac{Kr}{p}}$

$$\mathrm{FTBF}(p)=\frac{\dfrac{\dfrac{KAK_mr}{1+GAK_m}}{p(1+\dfrac{T}{1+GAK_m}p)}}{1+\dfrac{\dfrac{GAK_m}{1+GAK_m}}{p(1+\dfrac{T}{1+GAK_m}p)}}=\boxed{\frac{1}{1+\dfrac{1+GAK_m}{KAK_mr}p+\dfrac{T}{KAK_mr}p^2}}$$

Il s'agit toujours d'une fonction de transfert fondamentale du deuxième ordre, de gain 1, dont on identifie la pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement z, par :

$$\begin{cases}\dfrac{2z}{\omega_0}=\dfrac{1+GAK_m}{KAK_mr}\\ \dfrac{1}{\omega_0^2}=\dfrac{T}{KAK_mr}\end{cases}\quad\text{soit}\quad\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\dfrac{KAK_mr}{T}}\\ z=\dfrac{1+GAK_m}{2}\sqrt{\dfrac{1}{KAK_mrT}}\end{cases}\quad\text{ou encore numériquement :}\begin{cases}\omega_0=\sqrt{19K}\\ z=\dfrac{1+380G}{\sqrt{3,04K}}\end{cases}$$

On peut remarquer que la relation liant la pulsation propre au gain K du correcteur est inchangée.

22) Le cahier des charges impose conjointement z = 1 et une erreur permanente de 0,5° lors de la poursuite d'un objectif évoluant à la vitesse angulaire de 10°/s, soit :

$$\begin{cases}z=1\\ \varepsilon_v=\dfrac{2z}{\omega_0}\omega=0,5\,°\ \text{si}\ \omega=10°/\text{s}.\end{cases}$$

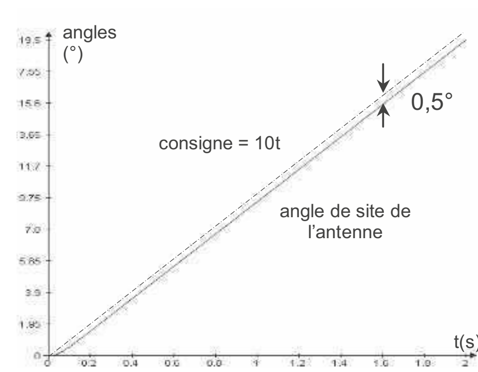
La deuxième exigence peut alors s'écrire $\dfrac{2}{\sqrt{19K}}10=0,5$, ce qui impose $\boxed{K = 84{,}2\ \text{V/rad.}}$

Or, la première exigence permet d'écrire que $\dfrac{1+380G}{\sqrt{3,04K}}=1$,

soit compte tenu de la valeur de K : $\dfrac{1+380G}{\sqrt{3,04\text{x}84,2}}=1$, ce qui impose $\boxed{G = 0{,}039\ \text{V/rad.s}^{-1}}$.

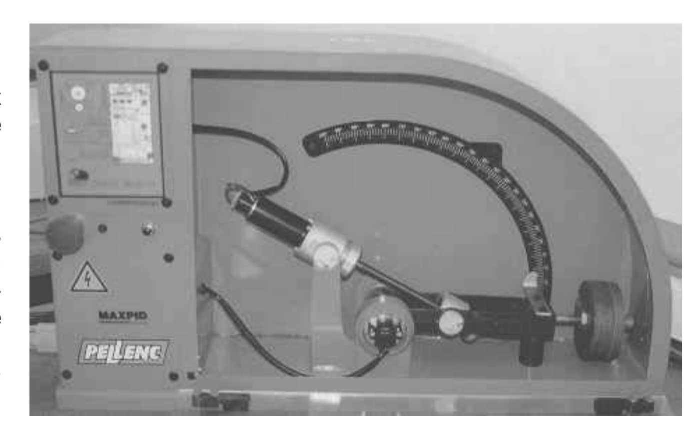
Ainsi, l'introduction d'une boucle tachymétrique permet de satisfaire le cahier des charges, sous réserve que les valeurs ci-dessus de G et de K soient compatibles avec le fonctionnement des différents composants.

On peut également noter que la boucle tachymétrique, outre la précision, augmente notoirement la rapidité du système.



V - BRAS MAXPID

V-1 Présentation

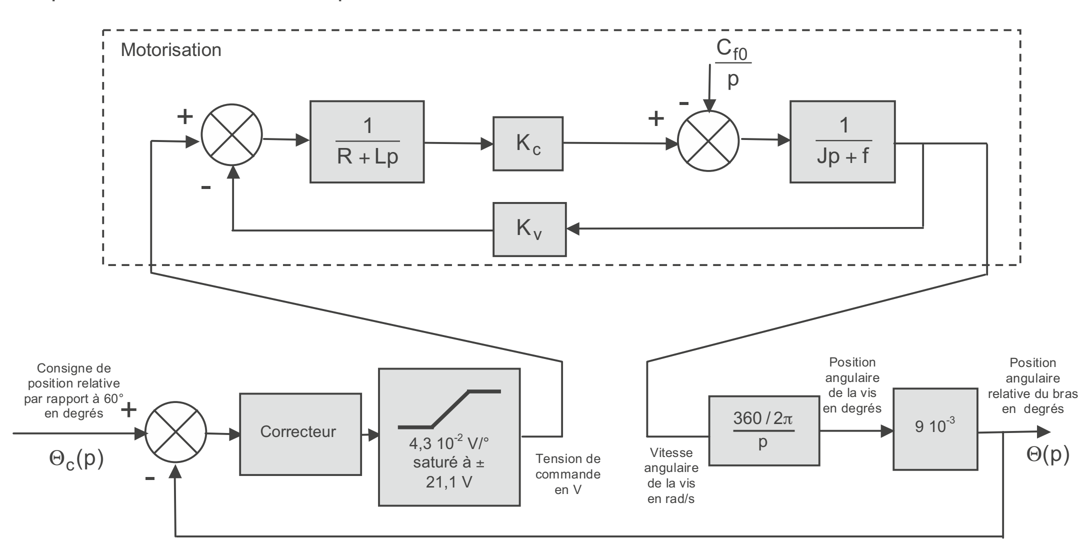


Le bras MAXPID a déjà fait l'objet d'une présentation et d'une première approche au chapitre précédent (chapitre 3, exercice VI).

Cette première approche a permis l'élaboration d'un modèle de comportement linéarisé de l'asservissement autour du point de fonctionnement 60° et en évolution horizontale. Ce modèle a été validé en régime permanent.

Dans ce travail, on se propose cette fois d'aborder le régime transitoire et d'observer l'influence des oscillations de la réponse sur sa précision, compte tenu de l'existence d'une tension de seuil pour le moteur, due aux frottements.
Pour compléter l'étude, on envisagera pour finir une évolution dans un plan vertical pour prendre en compte la perturbation due à la pesanteur.

■ La modélisation proposée a permis de construire le schéma bloc de l'asservissement suivant, lorsque le bras évolue dans un plan horizontal :



Avec, pour la motorisation :

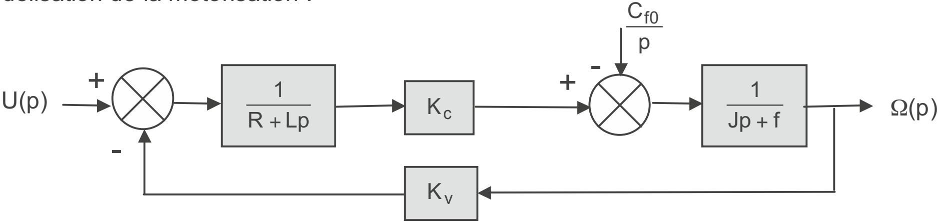
- d'après la documentation du fabricant du moteur :
  $R = 2{,}07\ \Omega$ $L = 6{,}2\ 10^{-4}$ H
  $K_c = 0{,}0525$ N.m.A^{-1} $K_v = 0{,}0525$ V/rad.s^{-1}
- d'après nos essais :
  un coefficient de frottement fluide global estimé à : $f \approx 6{,}8.10^{-4}$ Nm/rad.s^{-1}
  un couple de frottement sec ramené sur le rotor constant estimé à : $C_{f0} \approx 0{,}039$ Nm

On rappelle que ce modèle n'est valable que si la consigne n'éloigne pas trop le bras du point de fonctionnement $\theta = 60°$, afin que le modèle linéarisé de la loi cinématique soit acceptable.

V-2 Questions

<u>Question 1 :</u> modélisation de la motorisation par un système du premier ordre

La modélisation de la motorisation :

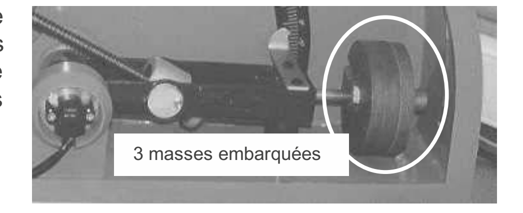


conduit à exprimer, dans le domaine de Laplace, la vitesse de rotation en fonction de la tension d'alimentation selon :

ou encore : $$\Omega(p)=\frac{\frac{K_c}{K_vK_c+Rf}}{1+\frac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}p+\frac{LJ}{K_vK_c+Rf}p^2}U(p)-\frac{\frac{R+Lp}{K_vK_c+Rf}}{1+\frac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}p+\frac{LJ}{K_vK_c+Rf}p^2}C_f(p)$$

avec $C_f(p)=\frac{C_{f0}}{p}$, le couple de frottements secs étant constant.

Par ailleurs, des calculs simplifiés de mécanique permettent de montrer que, avec <u>trois</u> masses embarquées sur le bras, soit 1,950 kg, l'inertie équivalente de l'ensemble mécanique est au moins $J\approx 4,5\,10^{-5}\,kg.m^2$.



 Fiche ressource "inertie équivalente"

Dans toute cette étude, les masses embarquées seront effectivement au nombre de <u>trois</u>.

11) Justifier que l'on puisse, a priori, proposer un modèle simplifié du premier ordre pour la motorisation selon :

$$\Omega(p)=\frac{\frac{K_c}{K_vK_c+Rf}}{1+\frac{RJ}{K_vK_c+Rf}p}U(p)-\frac{\frac{R}{K_vK_c+Rf}}{1+\frac{RJ}{K_vK_c+Rf}p}C_f(p)$$

c'est-à-dire considérer que les effets inductifs peuvent être négligés : $L\approx 0$.

On rappelle (cf. chapitre 3, exercice VI) qu'un essai en boucle ouverte du système peut être réalisé en coupant la boucle de retour. Il existe en effet sur le boîtier de commande un bouton prévu à cet effet.

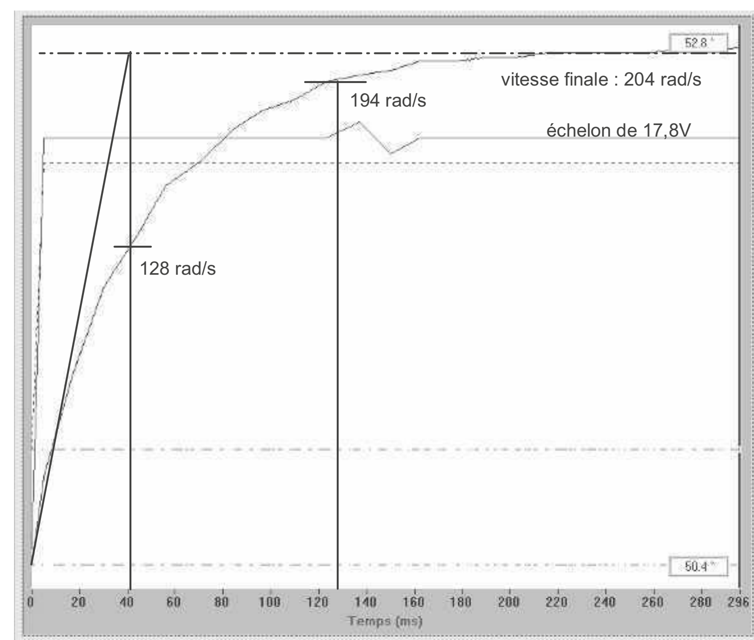


Il est alors possible de soumettre le moteur à des échelons de tension et de relever l'évolution de la vitesse de rotation du rotor renvoyée par la génératrice tachymétrique. Les essais sont effectués en <u>évolution horizontale</u> afin qu'aucun couple autre qu'un couple de frottements n'agisse sur le système, conformément aux hypothèses précédentes.

Un relevé type est donné ci-après, par exemple pour un échelon de tension de 17,8 V.

12) Valider l'approximation précédente à partir de ce résultat et estimer la constante de temps.

NB : Les essais sont répétés et permettent de valider la constante de temps précédente : elle est identique dans tous les essais.



13) Donner une estimation de l'inertie équivalente J si on accepte ce modèle.

14) Rappeler (cf. chapitre 3, exercice VI) la caractéristique de la motorisation (vitesse de rotation en régime permanent en fonction de la tension d'alimentation) ainsi que les deux effets notables des frottements que l'on peut lire sur ce graphe.

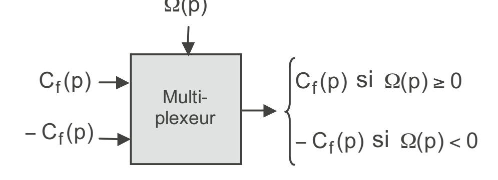
15) Quelle est, de plus, l'influence du frottement visqueux sur le comportement de la motorisation ?

<u>Question 2 :</u> modélisation de la chaîne asservie en évolution horizontale

Les couples résistants ne sont pas de signe constant puisqu'ils s'opposent au mouvement et dépendent donc du sens de rotation du moteur. Or, dans un système présentant des oscillations, le sens de rotation du moteur est changeant. Le fait que le couple de frottements visqueux soit de signe opposé à celui de la vitesse est traduit dans son écriture $-f\omega$. En revanche, ce n'est pas le cas pour le couple de frottements secs qui est introduit comme une perturbation dans le schéma bloc.

On peut alors utiliser un composant particulier des schémas blocs appelé ***multiplexeur***. Si un tel composant existe matériellement dans certains systèmes électroniques, il est bien entendu utilisé ici fictivement, comme tous les blocs qui traduisent les équations du moteur d'ailleurs (cf. chapitre 3, V-5 et V-6). Il s'agit d'un composant à trois entrées et une sortie.

La sortie dépend de l'une ou l'autre des entrées en fonction de la valeur de la troisième appelée « donnée de contrôle ». Les conditions d'affectation sont programmées dans le multiplexeur. On peut donc utiliser un multiplexeur dont la donnée de contrôle est la vitesse du moteur, comme ci-contre.



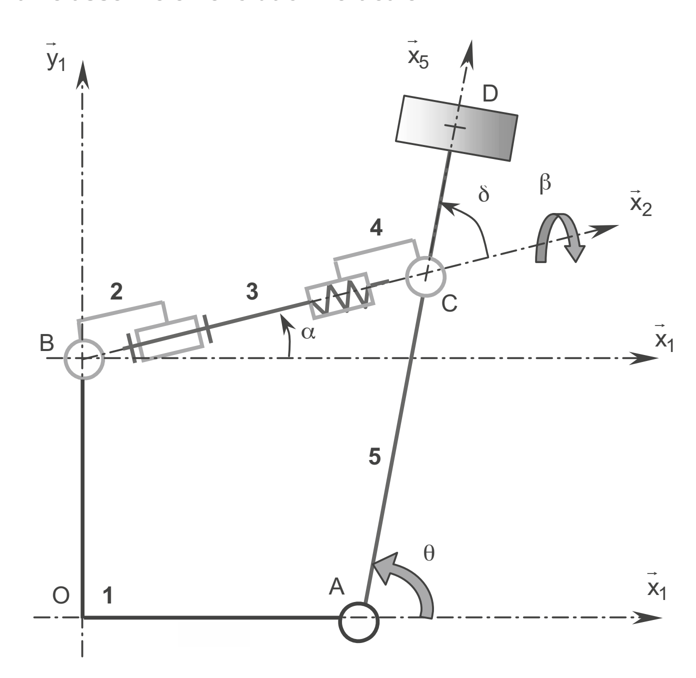
21) Construire à partir des résultats précédents et en utilisant un multiplexeur comme ci-dessus, le schéma bloc complet de l'asservissement de position du bras Maxpid tenant compte des frottements secs et visqueux.

22) À partir de ce schéma bloc et des réponses données à la question 14, déterminer quelle est, en valeur absolue, l'erreur statique minimale que le système est capable de corriger, lorsque le correcteur est un <u>correcteur proportionnel</u> de gain $K_p = 150$.

23) Expliquer alors qualitativement comment s'opère l'asservissement.

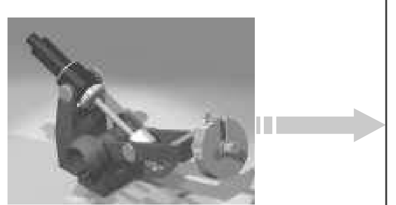
<u>Question 3 :</u> modélisation de la chaîne asservie en évolution verticale

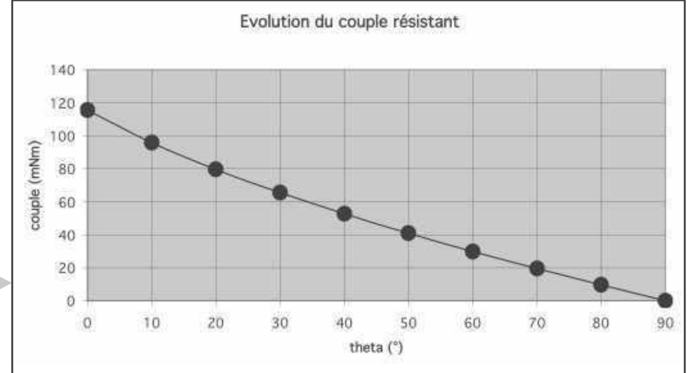
Lorsque le bras MAXPID évolue dans un plan vertical, l'action de la pesanteur sur les différentes pièces massiques se traduit par un couple résistant c_r au niveau du rotor du moteur. On comprend aisément que ce couple dépend de la position de la chaîne mécanique, donc de l'angle θ.



Si l'on se place en statique, le couple électromagnétique c_m équilibre strictement ce couple résistant c_r.

Compte tenu des différentes répartitions de masses et de la géométrie complexe de la chaîne cinématique, l'utilisation d'une maquette numérique associée à un logiciel de mécanique est préférée a une étude statique analytique. Elle permet d'obtenir, pour une masse embarquée totale de 1,950 kg et en supposant toutes les liaisons parfaites, l'évolution ci-contre du couple résistant en fonction de l'angle θ.

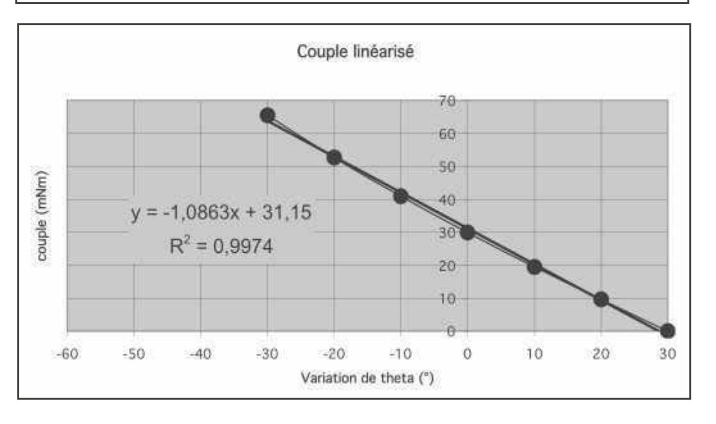




Alors, une linéarisation sur l'intervalle ± 30° autour du point de fonctionnement θ = 60° permet d'approximer l'évolution du couple résistant en fonction de la variation de θ par :

$$c_r \approx -1{,}09\ \Delta\theta + 31$$

si c_r est exprimé en mNm et $\Delta\theta$ en degrés. Ceci avec un coefficient de corrélation tout à fait acceptable de 0,997…



Décrire alors, sous forme de schéma bloc, le comportement linéarisé du bras MAXPID en évolution autour du point de fonctionnement θ = 60°, dans un plan vertical et chargé avec 1,950 kg de masses embarquées (trois masses).



V-3 Correction

<u>Question 1 :</u> modélisation de la motorisation par un système du premier ordre

11) Le modèle proposé conduit à la modélisation du deuxième ordre :

$$\Omega(p)=\frac{\dfrac{K_c}{K_vK_c+Rf}}{1+\dfrac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c+Rf}p^2}U(p)-\frac{\dfrac{R+Lp}{K_vK_c+Rf}}{1+\dfrac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c+Rf}p^2}C_f(p)$$

où l'on peut identifier la pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement z à partir de :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_0^2}=\dfrac{LJ}{K_vK_c+Rf}\\ \dfrac{2z}{\omega_0}=\dfrac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}\end{cases}\quad \text{soit un facteur d'amortissement } z=\frac{RJ+Lf}{2}\sqrt{\frac{1}{LJ(K_vK_c+Rf)}}$$

■ Avec les différentes valeurs des constantes connues et la valeur minimale estimée de $J\approx 4,5.10^{-5}$ kg.m^2, il vient alors pour le facteur d'amortissement, <u>au moins</u> :

$$z=\frac{2,07x4,5.10^{-5}+6,2.10^{-4}x6,8.10^{-4}}{2}\sqrt{\frac{1}{6,2.10^{-4}x4,5.10^{-5}x(0,0525^2+2,07x6,8.10^{-4})}}\approx 4,3$$

Cette valeur minimale étant franchement supérieure à un, le système est donc nécessairement <u>très fortement amorti</u>. Ceci justifie a priori l'approximation du dénominateur par un dénominateur du premier ordre selon :

$$1+\frac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}p+\frac{LJ}{K_vK_c+Rf}p^2\approx 1+\frac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}p$$

Cf. chapitre 4, III.7.

■ De plus, les valeurs numériques sont telles que $\dfrac{Lf}{RJ}<\dfrac{6,2.10^{-4}x6,8.10^{-4}}{2,07x4,5.10^{-5}}\approx 4,5.10^{-3} << 1$

On peut donc <u>négliger Lf devant RJ</u> dans la constante de temps, soit : $\dfrac{RJ+Lf}{K_vK_c+Rf}\approx\dfrac{RJ}{K_vK_c+Rf}$.

Et donc : $$\Omega(p)=\frac{\dfrac{K_c}{K_vK_c+Rf}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c+Rf}p}U(p)-\frac{\dfrac{R+Lp}{K_vK_c+Rf}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c+Rf}p}C_f(p)$$

■ La contribution du couple résistant se trouve alors modélisée selon un comportement du premier ordre généralisé, dont le zéro est -R/L. Mais on peut, pour finir les simplifications, comparer L/R à la constante de temps $RJ/(K_vK_c+Rf)$:

$$\frac{L/R}{RJ/(K_vK_c+Rf)}=\frac{L(K_vK_c+Rf)}{R^2J}<\frac{6,2.10^{-4}x(0,0525^2+2,07x6,8.10^{-4})}{2,07^2x4,5.10^{-5}}\approx 1,3.10^{-2} << 1$$

Ce rapport très faible autorise a priori à <u>négliger le zéro du numérateur</u> et donc à proposer :

$$\boxed{\Omega(p)=\frac{\dfrac{K_c}{K_vK_c+Rf}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c+Rf}p}U(p)-\frac{\dfrac{R}{K_vK_c+Rf}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c+Rf}p}C_f(p)=\frac{\dfrac{1}{K_vK_c+Rf}}{1+\dfrac{RJ}{K_vK_c+Rf}p}\left[K_cU(p)-RC_f(p)\right]}$$

NB : au final, toutes ces simplifications reviennent à faire $L\approx 0$ dans l'expression initiale.

12) La vitesse du moteur, soumis à un échelon de tension U_0 et à un couple de frottement sec constant C_{f0}, évolue alors classiquement selon la loi :

$$\omega(t) = \frac{K_c U_0 - RC_{f0}}{K_v K_c + Rf}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \text{ avec la constante de temps : } \tau = \frac{RJ}{K_v K_c + Rf}$$

Cette évolution se trouve validée par l'essai fourni, où l'on vérifie les caractéristiques bien connues de la réponse d'un système du premier ordre à un échelon :

- tangente à l'origine interceptant la droite asymptotique sensiblement à l'instant (41 ms) où la réponse vaut 63% de cette valeur : en effet 128/204 = 63% ;
- temps de réponse à 5% égal à 3 fois cette durée : 3x41=123 ms est sensiblement l'instant où la vitesse atteinte est 194 rad/s = 0,95x204 rad/s.

Ceci valide la modélisation simplifiée proposée, avec pour constante de temps :

$$\tau = \frac{RJ}{K_v K_c + Rf} = 41\,\text{ms}$$

13) Cette constante de temps donne accès à l'inertie équivalente J, les autres constantes caractéristiques étant connues par ailleurs :

$$J = \frac{0,041}{R}(K_v K_c + Rf) = \frac{0,041}{2,07}(0,0525^2 + 2,07x6,8.10^{-4}) \approx \boxed{8,2.10^{-5}\,\text{kg.m}^2}$$

La valeur de cette inertie est à comparer avec l'estimation minimale fournie égale à $4,5.10^{-5}\,\text{kg.m}^2$. Il y a bien cohérence entre ces valeurs.

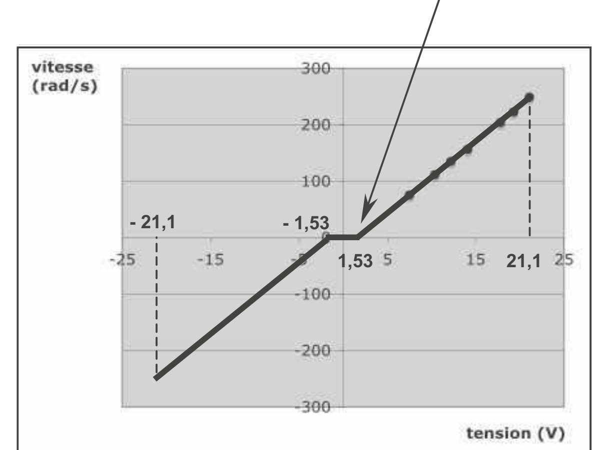
La différence, notable, peut s'expliquer par :

- de nombreuses inerties qui n'ont pas été prises en compte dans le calcul très simplifié de mécanique ayant conduit à cette estimation minimale,
- l'existence d'une boucle de courant intégrée dans le hacheur qui commande la tension d'alimentation du moteur (cf. chapitre 6, V-2). On apprendra en effet qu'une boucle de courant a pour effet de ralentir une motorisation. Le modèle de comportement ici proposé imputerait donc à des effets inertiels, des effets provenant de cette boucle de courant.

14) En régime permanent la vitesse est donc $\omega_\infty = \dfrac{K_c U_0 - RC_{f0}}{K_v K_c + Rf}$.

La vitesse évolue donc de façon affine avec la tension d'alimentation U_0, avec un seuil provenant du couple de frottements secs C_{f0}.

En tenant compte de la tension limite imposée à 21,1 V et de la symétrie de la caractéristique pour une vitesse négative, on obtient donc la caractéristique ci-contre, déjà établie lors de l'exercice VI du chapitre 3.



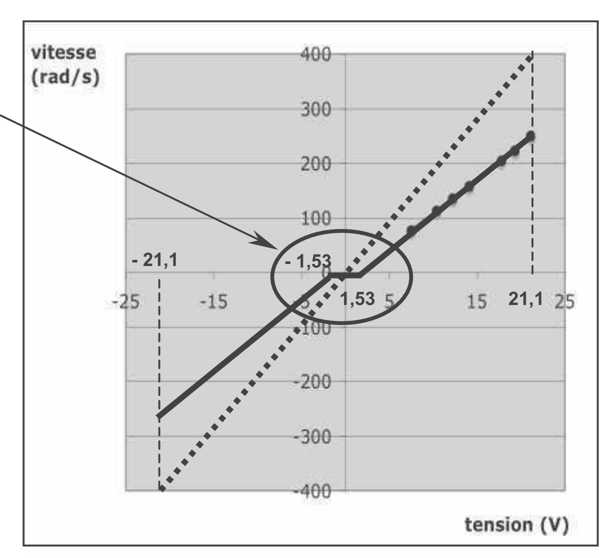
En l'absence de frottements, la vitesse en régime permanent est proportionnelle à la tension d'alimentation selon :

$$\omega_\infty = \frac{U_0}{K_v}$$

Il suffit en effet de prendre C_{f0} et f nuls dans l'expression précédente.

On peut alors superposer pour comparaison cette caractéristique idéale (en pointillé ci-après) à la précédente due aux frottements. Il apparaît ainsi clairement les deux effets notables des frottements sur le comportement du moteur en régime permanent :

- un ralentissement de celui-ci ;
- un ***effet de seuil*** tel qu'en dessous d'une tension d'alimentation de ±1,53 V, le moteur ne peut vaincre les frottements et la vitesse est donc nulle.

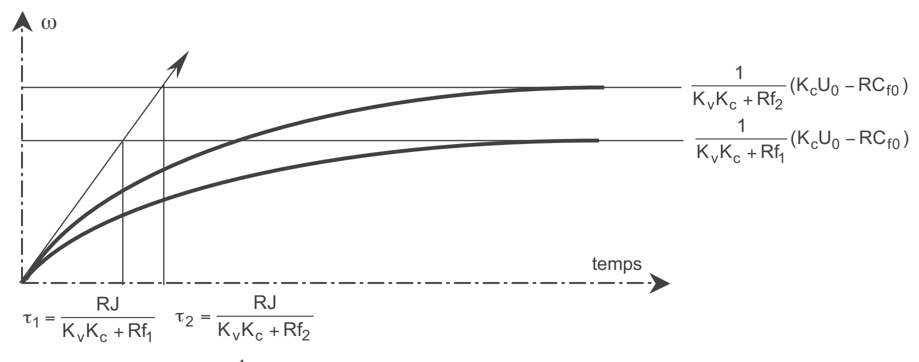


NB : Il s'agit d'un comportement en régime permanent, c'est-à-dire en quasi-statique. Bien évidemment, avec l'inertie, le moteur alimenté sous une tension inférieure à 1,53 V pourra continuer à tourner. En revanche, s'il est alimenté sous une tension inférieure à cette valeur seuil alors que sa vitesse est nulle, il restera arrêté.

15) Si on s'intéresse plus particulièrement au frottement visqueux, on observe que celui-ci :

- apparaît, associé au frottement sec, dans le comportement en régime permanent qui vient d'être décrit ; on rappelle en effet la loi de comportement en régime permanent :
  $$\omega_\infty = \frac{K_c U_0 - RC_{f0}}{K_v K_c + Rf}$$
- modifie la constante de temps : $\tau = \dfrac{RJ}{K_v K_c + Rf}$.

Plus le frottement visqueux est important plus cette constante de temps est faible. Ce résultat peut sembler paradoxal. Mais il faut tenir compte du fait que la valeur finale diminue également et dans les mêmes proportions, puisque son expression possède le même dénominateur. Ainsi, la pente à l'origine de la réponse en vitesse du moteur à un échelon de tension est indépendante de f. Cela s'observe clairement sur les courbes qui suivent, où $f_1 > f_2$:

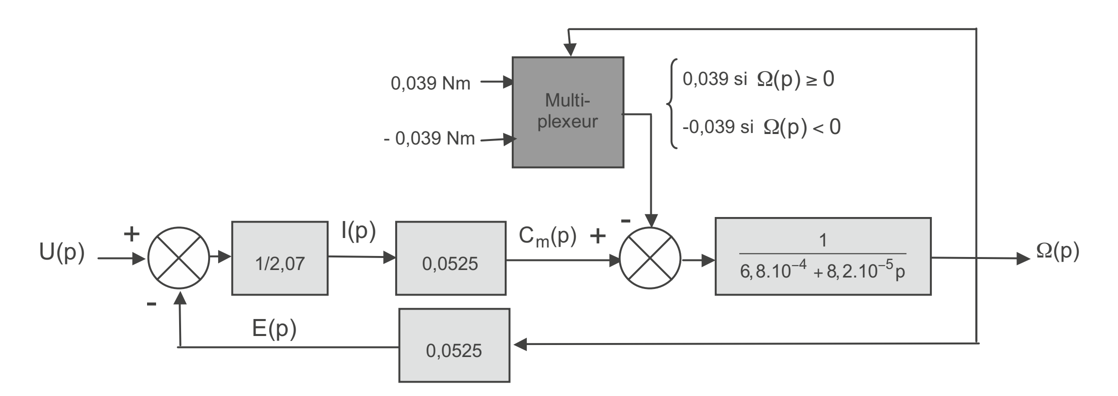


La pente à l'origine est $\dfrac{\dfrac{1}{K_v K_c + Rf}(K_c U_0 - RC_{f0})}{\dfrac{RJ}{K_v K_c + Rf}} = \dfrac{K_c U_0 - RC_{f0}}{RJ}$, indépendante de f.

Ainsi, peut-être de manière surprenante, le frottement visqueux influence le régime permanent et non le régime transitoire.

<u>Question 2 :</u> modélisation de la chaîne asservie en évolution horizontale

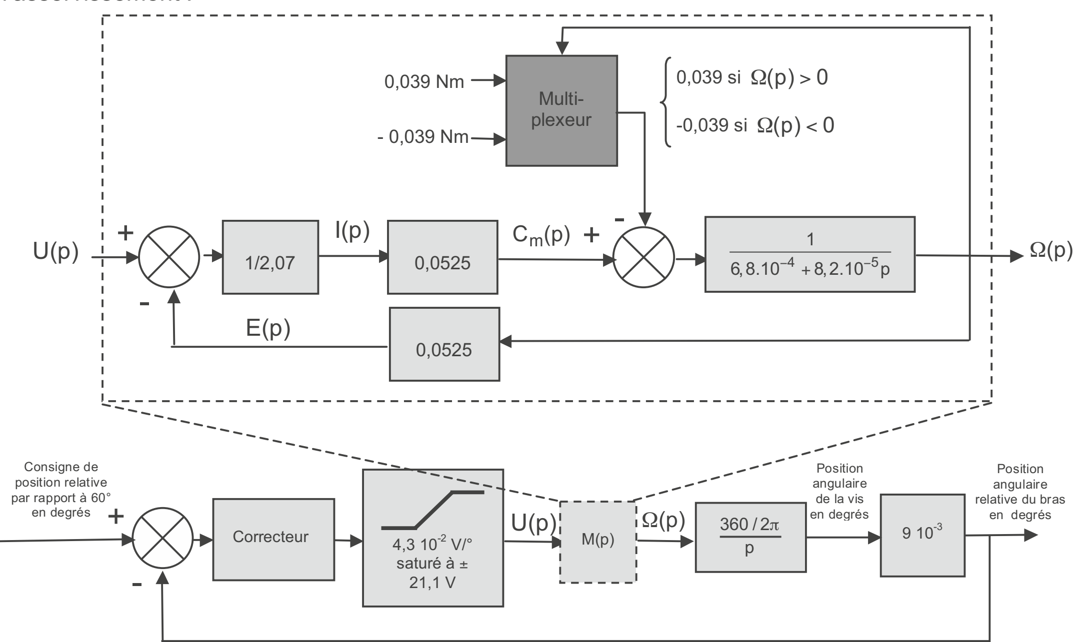
21) D'après la description qui en est faite, et en tenant compte des valeurs des différentes constantes, un multiplexeur fictif permet de décrire le fonctionnement du moteur prenant en compte les deux sens de rotation possibles selon le schéma bloc suivant :



Ce schéma traduit clairement, comme attendu, le fonctionnement du moteur soumis à une tension positive ou négative, supérieure à la valeur seuil de ±1,53 V.

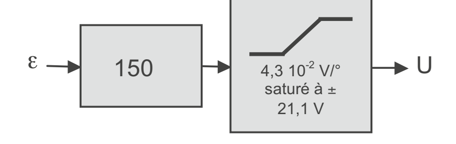
Dans le cas d'une tension inférieure à ce seuil, le comportement prévu par ce schéma est une succession de commutations du multiplexeur, de fréquence infinie, associée à des oscillations infiniment petites de la vitesse de rotation autour de la valeur nulle. Ceci correspond bien, à la limite, à l'absence de mouvement attendue.

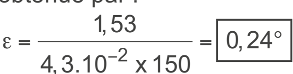
Un schéma bloc complet de l'asservissement de position du bras Maxpid en évolution horizontale avec frottements peut alors être construit en associant ce schéma à celui déjà élaboré de l'asservissement :



22) En régime permanent, une erreur qui provoque une tension d'alimentation inférieure à la valeur seuil de ±1,53 V, conduit à l'arrêt du moteur.

Lorsque le correcteur est un correcteur proportionnel de gain K_p = 150, celle-ci est donc en valeur absolue obtenue par :



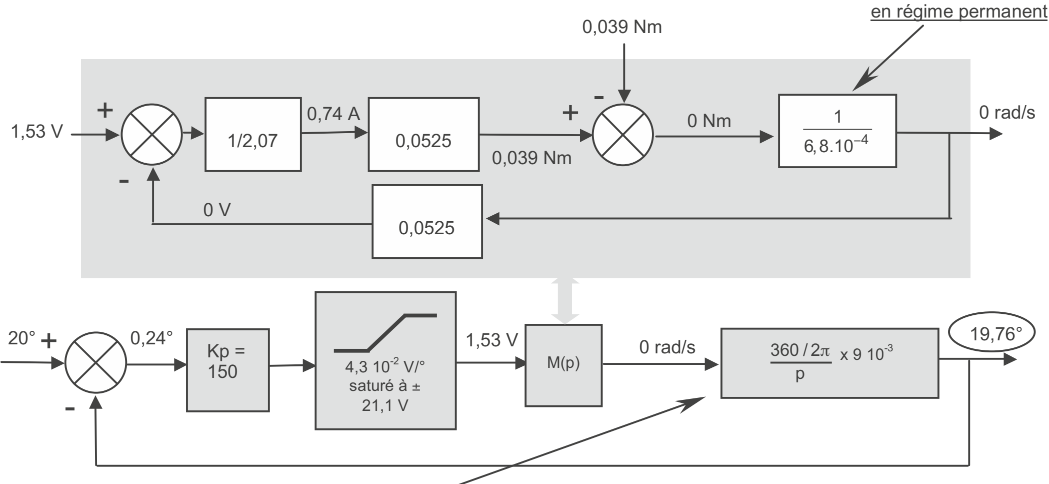


$$\varepsilon = \frac{1,53}{4,3.10^{-2} \times 150} = \boxed{0,24°}$$

Cette valeur est donc l'erreur minimale que le système est capable de corriger. En dessous de cette erreur, le moteur n'est pas alimenté par une tension suffisante pour vaincre les frottements.

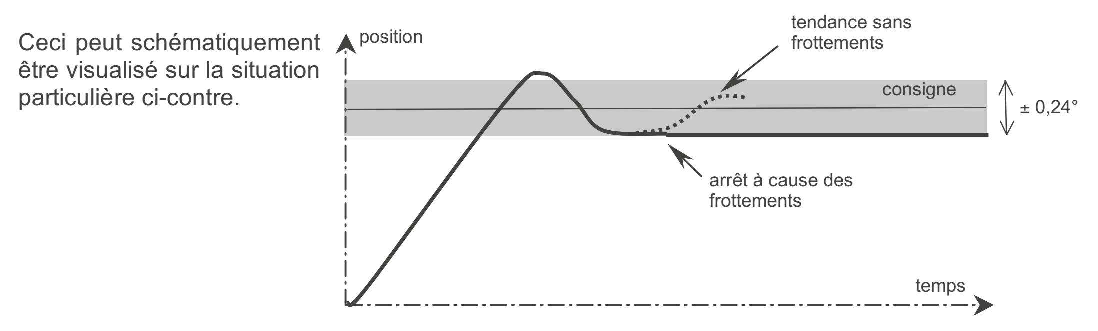
23) On peut tracer dans un premier temps les deux <u>situations limites</u> selon les schémas blocs suivants, pour une consigne par exemple de 20°, selon que la situation limite est atteinte par valeurs négatives ou par valeurs positives :

- Cas où la situation <u>limite</u> est atteinte par valeurs négatives (erreur positive) :

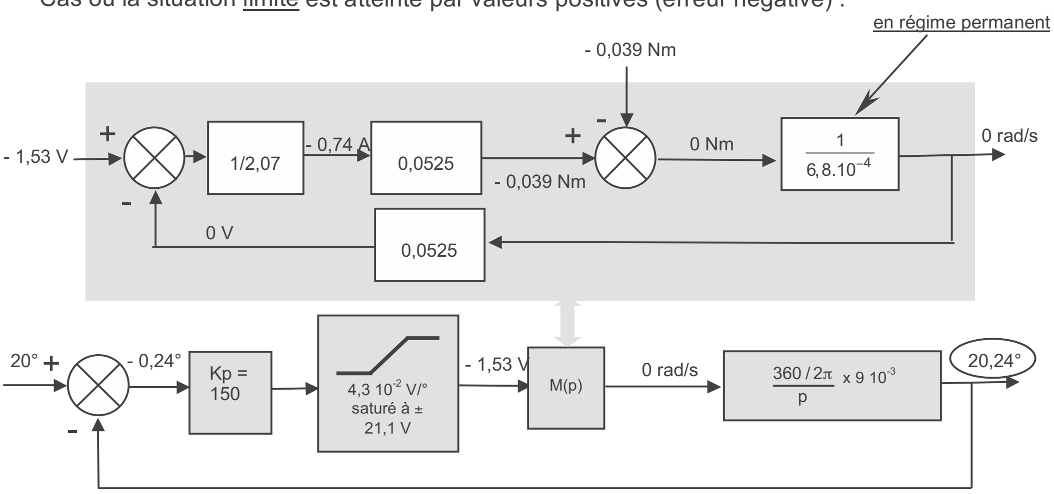


Un bloc intégrateur dont l'entrée est nulle maintient le niveau de sa sortie à la valeur qu'elle avait à l'instant où son entrée a été annulée. Ainsi, une situation d'équilibre est atteinte lorsque le moteur ne tourne pas à la position 19,76° générant une erreur statique de position de 0,24°. Cette erreur entraînant elle-même la tension d'arrêt de 1,53 V aux bornes du moteur.

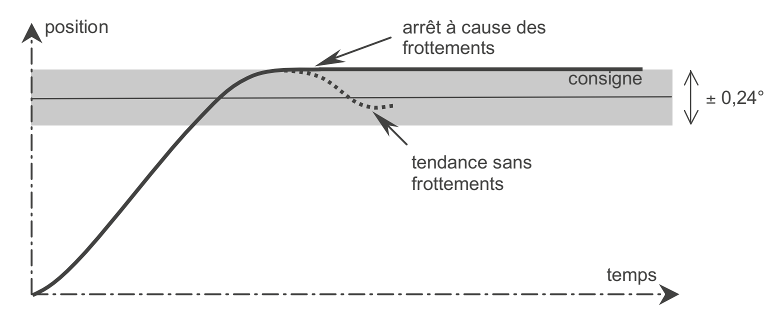
Ceci peut schématiquement être visualisé sur la situation particulière ci-contre.



- Cas où la situation <u>limite</u> est atteinte par valeurs positives (erreur négative) :



Ceci peut schématiquement être visualisé sur la situation particulière ci-contre.

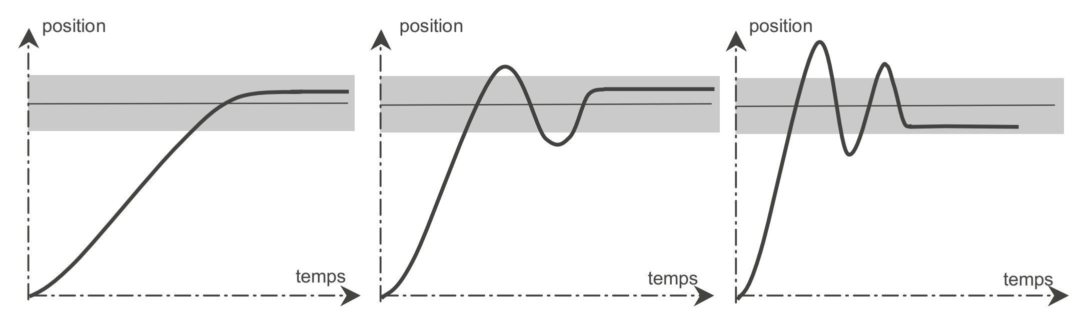


Ces deux situations particulières (extrêmes) permettent de comprendre comment s'opère l'asservissement.

Par effet d'inertie, la position peut franchir les limites de l'erreur admissible, si la vitesse ne se trouve pas nulle à cet instant. Par contre, ***lorsque la vitesse s'annule à l'intérieur de cette zone***, elle reste nulle. En effet, le moteur ne peut vaincre les frottements et l'inertie ne l'entraîne plus. Le système reste donc ***immobile*** avec une certaine erreur de position, positive ou négative selon le cas.

La vitesse nulle (par valeurs positives ou négatives) apparaîtra sans oscillation, après une oscillation ou encore après plusieurs oscillations, selon la dynamique de l'asservissement, et donc dans le cas présent, essentiellement selon la valeur du gain K_p du correcteur. Les trois exemples ci-dessous donnent quelques exemples de situations d'équilibre possibles.

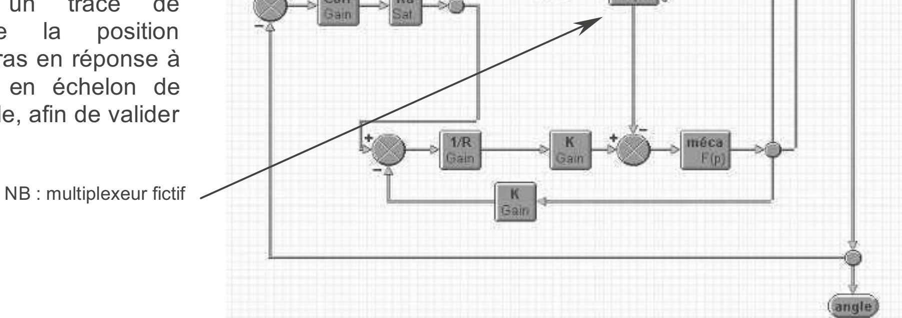
En résumé, toute erreur en dehors de l'intervalle ± 0,24° sera rattrapée par le système qui s'arrêtera ensuite pour une erreur inférieure, positive ou négative, dès que sa vitesse prendra une valeur nulle.



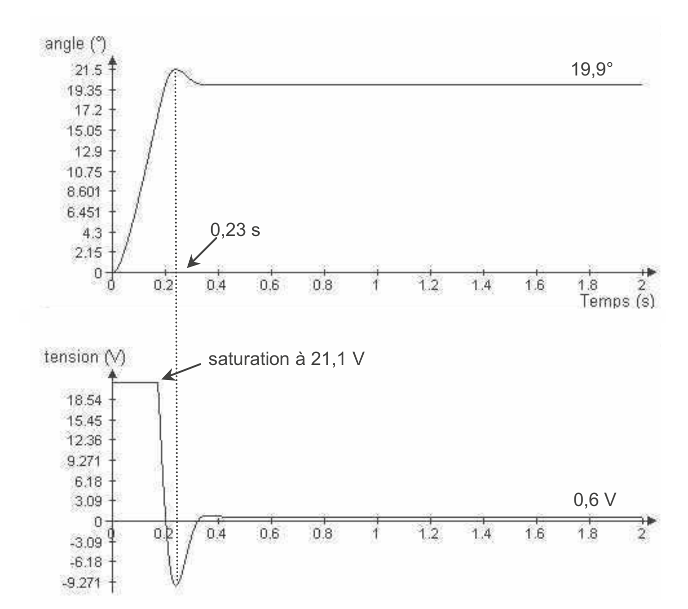
En d'autres termes, le moteur s'arrête dès la première annulation de la vitesse survenant alors que l'erreur est dans l'intervalle ± 0,24°.

■ Complément : simulation informatique et validation du modèle

Le schéma bloc précédemment élaboré peut être saisi à l'aide d'un logiciel de simulation et conduire à un tracé de l'évolution de la position angulaire du bras en réponse à une consigne en échelon de 20° par exemple, afin de valider le modèle.



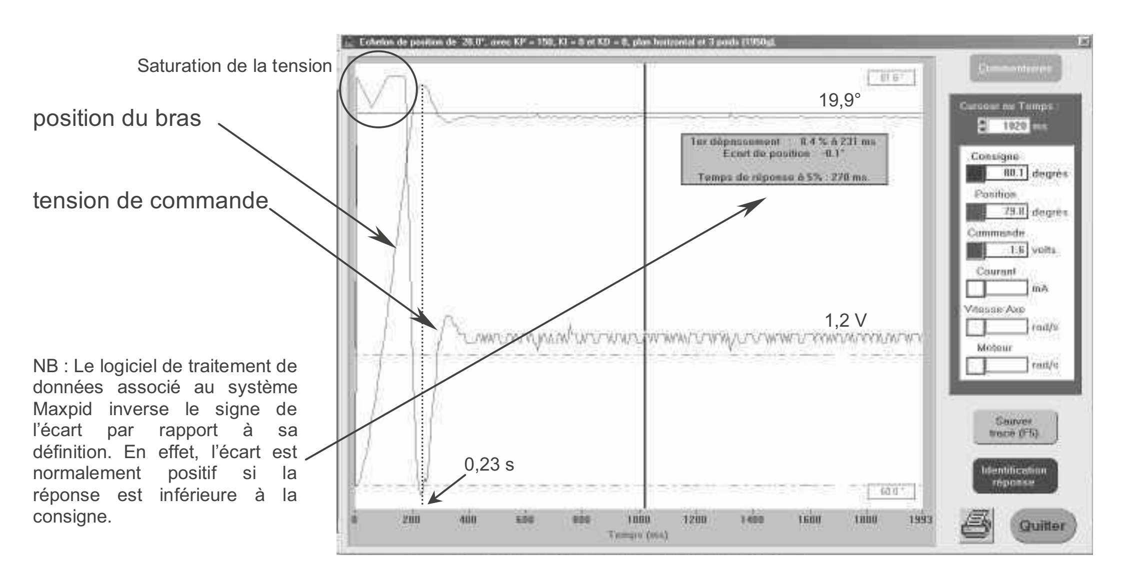
La simulation numérique prévoit alors l'évolution ci-contre de la position angulaire du bras et de la tension d'alimentation du moteur.



On y relève des caractéristiques suivantes :

- la présence d'une erreur statique de 0,1° (bien inférieure à 0,24°) associée à une tension permanente de 0,6 V (que l'on peut vérifier rapidement par le calcul : 0,1x150x0,043=0,6) ;
- un premier dépassement à l'instant 0,23 s ;
- un niveau du premier dépassement de 21,5 - 19,9 = 1,6°, soit 8 % (= 1,6/19,9)

Un essai sur le bras Maxpid réel peut alors être effectué dans les mêmes conditions. On commande un déplacement en échelon de 20° à partir de la position de référence 60°. On obtient le tracé ci-dessous.



On observe :

- que l'erreur de position (0,1°) est conforme à celle prévue par le modèle ; elle est associée à une tension non nulle en régime permanent de l'ordre de 1,2 V, dont il est difficile de justifier l'écart par rapport aux 0,6 V prévu par le modèle (erreur de mesure ?) ;
- une rapidité exactement conforme à celle prévue par le modèle, puisque l'instant du premier dépassement est t_1 = 0,23 s, comme prévu ;
- un niveau de ce premier dépassement de 8,4%, cohérent avec celui (8%) prévu par le modèle.

Ces observations valident raisonnablement le modèle établi.

■ Second complément : modification du réglage de Kp

Le modèle informatique permet aisément de modifier le gain du correcteur K_p. Par exemple il peut être diminué à la valeur 50. On rappelle que précédemment il était réglé à la valeur 150.

On obtient alors les prévisions d'évolution ci-contre.

L'erreur est de -0,2°, cette fois donc négative, obtenue sans dépassement.

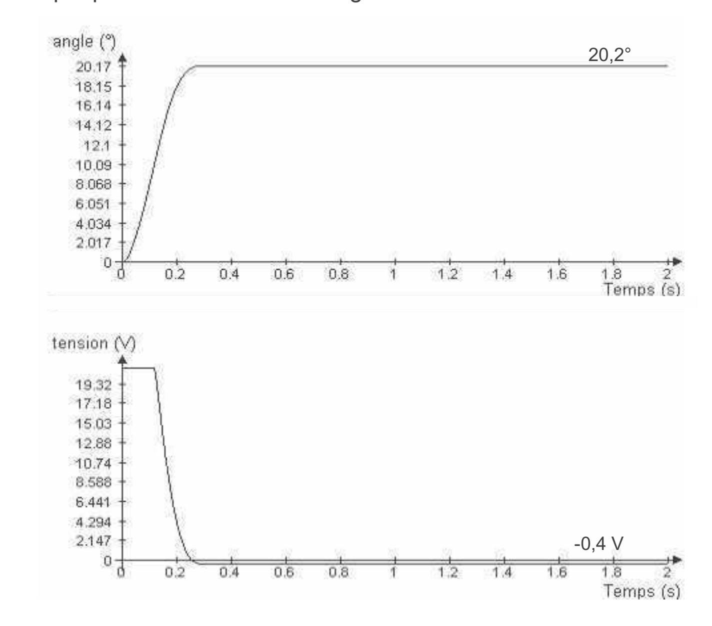
Avec Kp = 50, l'erreur maxi est, en valeur absolue de :

$$\varepsilon = \frac{1,53}{4,3.10^{-2} \text{ x } 50} = 0,72°$$

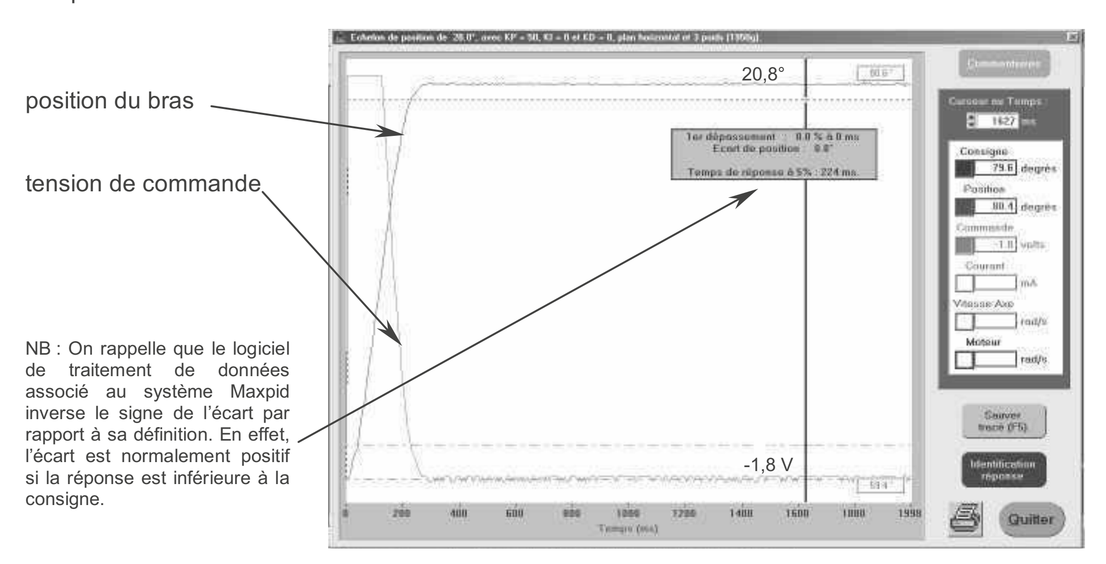
et non plus 0,24°.

L'erreur de -0,2° est donc bien dans l'intervalle prévu.

La tension associée est de -0,4 V. Le signe est bien entendu cohérent et on vérifie que l'on a bien :
-0,4 = -0,2x50x0,043



On peut alors, sur le système réel, procéder à la modification du gain du correcteur pour le régler à la valeur 50 et tester la réponse, dans les mêmes conditions à un échelon de 20°. On obtient le comportement suivant :



On observe une allure générale tout à fait conforme aux prévisions du modèle, en particulier une position finale supérieure à la consigne (erreur négative).

Par contre l'erreur obtenue (-0,8°) est légèrement supérieure (en valeur absolue) à la prévision et la tension en conséquence. Cette erreur reste toutefois de l'ordre de grandeur de l'erreur maximale prévue qui est de 0,72° pour un gain K_p réglé à 50. On peut imaginer qu'avec un tel gain relativement faible, les approximations (de mesure - de l'ordre de 0,5°- et de calcul) faites tout au long de cette étude puissent engendrer cette légère différence.

<u>Question 3 :</u> modélisation de la chaîne asservie en évolution verticale

En rassemblant tous les différents résultats établis, il vient alors le schéma bloc suivant, traduisant l'évolution verticale linéarisée du système autour du point de fonctionnement 60°, avec frottements secs et visqueux, soumis à la perturbation extérieure de la pesanteur :

Prise en compte de la pesanteur selon le modèle linéarisé proposé autour de 60°.

31.10^{-3} + − $1,09.10^{-3}$

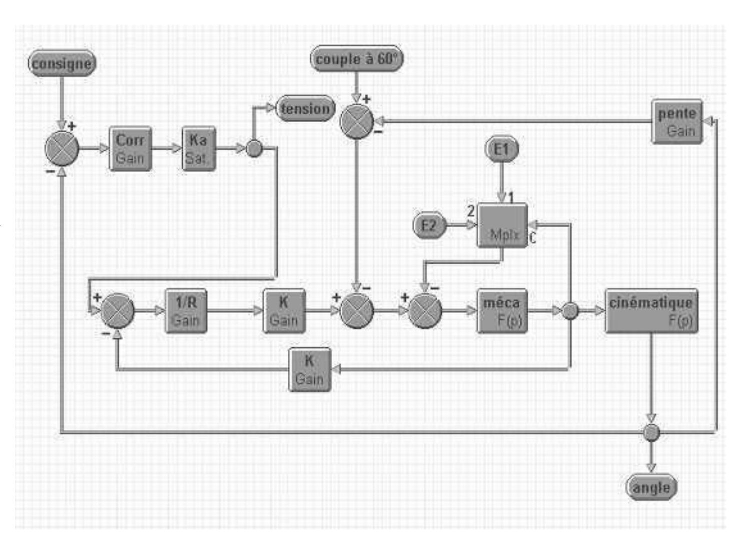
0,039 Nm
- 0,039 Nm
Multi-plexeur
0,039 si $\Omega(p) > 0$
-0,039 si $\Omega(p) < 0$

U(p) + − 1/2,07 I(p) 0,0525 $C_m(p)$ + − + − $\dfrac{1}{6,8.10^{-4} + 8,2.10^{-5}p}$ Ω(p)
E(p) 0,0525

Consigne de position relative par rapport à 60° en degrés
+ −
Kp = 150
$4,3\ 10^{-2}$ V/° saturé à ± 21,1 V
U(p)
M(p)
Ω(p)
$\dfrac{360/2\pi}{p}$
Position angulaire de la vis en degrés
$9\ 10^{-3}$
Position angulaire relative du bras en degrés

■ **Complément : simulation informatique et validation du modèle**

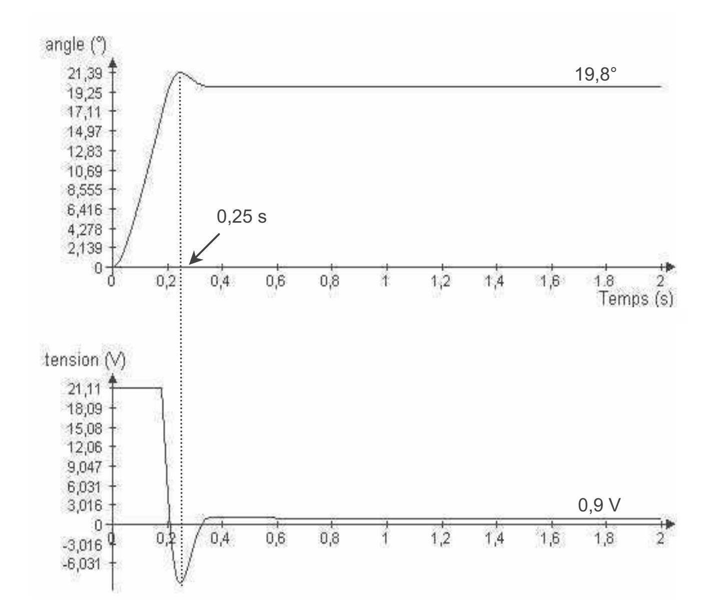
Ce schéma bloc peut être saisi à l'aide d'un logiciel de simulation et conduire à un tracé de l'évolution de la position angulaire du bras, cette fois en évolution verticale, en réponse à une consigne en échelon de 20°, afin de valider le modèle.



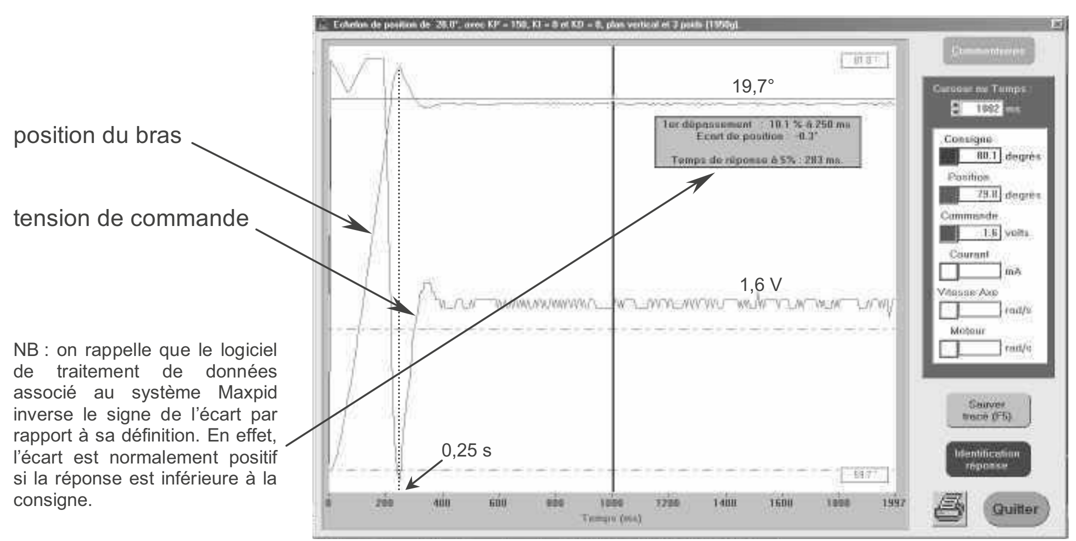
La simulation numérique prévoit alors l'évolution ci-après de la position angulaire du bras et de la tension d'alimentation du moteur.

On y relève des caractéristiques suivantes :

- la présence d'une erreur statique de 0,2° associée à une tension permanente de 0,9 V ;
- un premier dépassement à l'instant 0,25 s ;
- un niveau du premier dépassement de 1,6°, soit 8,1%.



Un essai sur le bras Maxpid réel peut alors être effectué dans les mêmes conditions. On commande un déplacement en échelon de 20° à partir de la position de référence 60°, en plaçant le système verticalement. On obtient le tracé ci-dessous.



On observe :

- une erreur de position (0,3°) cohérente avec celle prévue par le modèle (0,2°) ; elle est associée à une tension non nulle en régime permanent de l'ordre de 1,6 V, dont il est difficile de justifier l'écart par rapport aux 0,9 V prévu par le modèle (erreur de mesure ?) ;
- une rapidité exactement conforme à celle prévue par le modèle, puisque l'instant du premier dépassement est t_1 = 0,25 s, comme prévu ;
- un niveau de ce premier dépassement de 10,1%, cohérent avec celui (8,1%) prévu par le modèle.

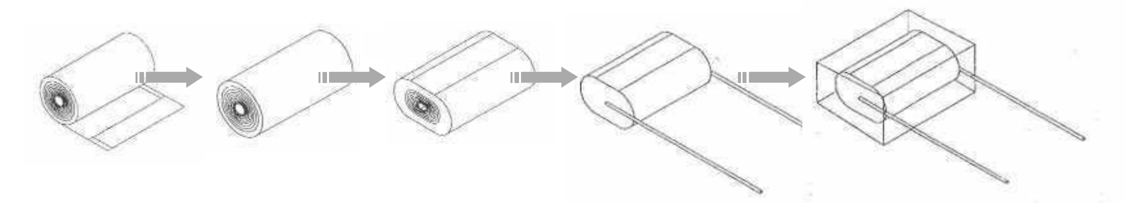
Ainsi, sans être totalement parfait, le modèle finalement construit pour le système Maxpid donne des prévisions tout à fait acceptables.

VI - RÉGULATION DE TENSION D'UN FILM DÉFILANT

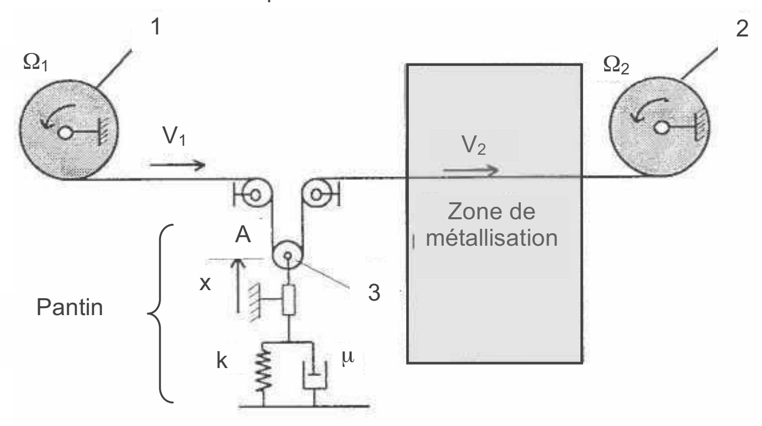
D'après une épreuve du concours ENGEES PSI. Questions modifiées.

VI-1 Présentation

Les condensateurs produits en très grandes séries pour l'industrie électronique sont principalement réalisés à partir de deux films métallisés, enroulés en vis-à-vis afin d'en constituer l'armature. Le nombre de tours d'enroulement détermine la capacité du condensateur. Cette opération étant réalisée, il reste alors à presser le condensateur pour lui donner une stabilité, puis lui souder des connexions et enfin le noyer dans de la résine et l'étiqueter.



On s'intéresse ici à l'étape préalable, qui consiste en la métallisation d'un film plastique, disponible en gros rouleaux. Le système se compose principalement d'un rouleau dérouleur 1, freiné, à partir duquel se déroule le film plastique et d'un rouleau enrouleur 2, entraîné par un moto-réducteur, sur lequel s'enroule le film métallisé. Le dispositif retenu est modélisé comme suit :



La qualité de la métallisation obtenue dépend principalement de la vitesse de défilement du film, mais aussi de sa tension. En particulier le dispositif doit éviter que les à-coups de tension, générés par d'éventuels changements de vitesse de défilement, n'endommagent le film. Ceci est obtenu par l'introduction d'un composant appelé pantin.

Le pantin est tel que film passe sous un rouleau 3 en liaison pivot avec une pièce intermédiaire, elle même en liaison glissière avec le bâti. Le mouvement de cette pièce est contrarié par un ressort de raideur k et un amortisseur visqueux de coefficient μ. Ce dispositif permet des vitesses de défilement amont et aval V_1 et V_2 différentes et donc d'absorber les fluctuations de V_2 sans dommage.

Les valeurs numériques de k et μ sont :

$k = 5.10^3 N.m^{-1}$

$\mu = 1,2\ 10^3 N.m^{-1}.s$

La masse du pantin est négligeable.

L'existence d'un couple de freinage sur le rouleau dérouleur permet l'existence d'un ***point de fonctionnement*** où le pantin est immobile, caractérisé par une tension T_0 et une vitesse V_0 de défilement du film constantes.

L'évolution du système est étudiée autour de ce point de fonctionnement, lorsque le rayon du rouleau dérouleur, qui peut-être considéré comme constant pour de petites variations autour de ce point, vaut $R \approx 30$ cm. Les rayons des rouleaux varient en effet très lentement par rapport aux autres grandeurs.

Alors, le moment d'inertie du rouleau dérouleur est également constant et vaut $J \approx 4{,}5$ kg.m^2.

Dans ces conditions, on note :

- v_1 et v_2 les variations des vitesses V_1 et V_2 par rapport à la vitesse V_0 ;
- t la variation de la tension du film par rapport à la tension T_0 ;
- x le déplacement vertical du pantin par rapport à sa position de fonctionnement.

VI-2 Questions

Question 1 : Modélisation mécanique

Sous certaines hypothèses qu'il n'est pas l'objet de détailler ici (inextensibilité du film, non glissement sur les poulies, liaisons parfaites, masse du pantin négligeable), trois études mécaniques peuvent être conduites, autour du point de fonctionnement.

Une étude cinématique du pantin permet de montrer que sa vitesse de déplacement est liée à la différence de vitesse des deux branches du film par :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Une étude dynamique du pantin permet de montrer que la surtension dans le film et le déplacement du pantin sont liés par :

$$2t - kx - \mu \frac{dx}{dt} = 0$$

Une étude dynamique du rouleau dérouleur permet de lier la surtension dans le film à la variation de vitesse du film déroulé par :

$$t = \frac{J}{R^2} \frac{dv_1}{dt}$$

11) On note $V_1(p)$, $V_2(p)$, $X(p)$ et $T(p)$ les images par la transformation de Laplace des variations v_1, v_2, x et t. La définition de ces grandeurs comme des variations par rapport à la position de référence permet de travailler sous les conditions de Heaviside.

Exprimer alors les trois relations mécaniques précédentes dans le domaine de Laplace et en déduire les expressions de :

- $X(p)$ en fonction de $V_1(p)$ et $V_2(p)$;
- $T(p)$ en fonction de $X(p)$;
- $V_1(p)$ en fonction de $T(p)$.

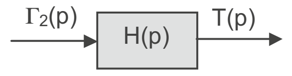
12) Afin de ne travailler qu'avec des fonctions causales, il convient ici de ne retenir que des accélérations comme grandeurs cinématiques.

On note alors $\Gamma_1(p)$, $\Gamma_2(p)$ et $\Gamma(p)$ les transformées des variations $\frac{dv_1}{dt}$, $\frac{dv_2}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Modifier les équations précédentes pour obtenir des expressions causales faisant intervenir $\Gamma_1(p)$, $\Gamma_2(p)$ et $\Gamma(p)$.

Question 2 : Fonction de transfert

D'un point de vue fonctionnel, le système doit réguler la surtension dans le film engendrée par son accélération du côté du rouleau enrouleur (augmentation de la vitesse d'enroulement).



21) Exprimer ce système sous forme d'un schéma bloc issu des équations précédentes.

22) En déduire la fonction de transfert $H(p) = \frac{T(p)}{\Gamma_2(p)}$ et la mettre la sous forme canonique.

23) Faire les applications numériques et commenter le caractère oscillant ou non de l'évolution de la tension dans le film suite à une variation de l'accélération d'enroulement.

Question 3 : Réponse à un échelon de vitesse

La vitesse d'enroulement augmente brutalement de 0,1 m/s, si bien que son évolution peut-être modélisée par un échelon de vitesse, c'est-à-dire une impulsion d'accélération.

31) Déterminer, dans le domaine de Laplace, l'évolution de la surtension suite à cet événement.

32) Déterminer les valeurs initiale et finale de la surtension. Commenter ces valeurs.

33) Tracer alors l'allure de l'évolution temporelle de la surtension et conclure quant aux capacités du système à absorber la surtension engendrée par l'augmentation de la vitesse d'enroulement et donc à protéger le film de tout déchirement.

Question 4 : Influence des paramètres du pantin

41) Caractériser l'influence des paramètres du pantin en renseignant le tableau suivant :

k (N/m)	μ (N/m.s^{-1})	Facteur z	Valeur initiale de la surtension (N)	Valeur finale de la surtension (N)
5000	1200			
50000	1200			
500	1200			
5000	120			
5000	12000			

42) Commenter les résultats.

43) Quel est l'inconvénient d'une trop grande diminution de la raideur k du ressort ?

VI-3 Correction

Question 1 : Modélisation mécanique

11) Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside :

$\frac{dx}{dt} = \frac{v_2 - v_1}{2}$ se transforme en $pX(p) = \frac{V_2(p) - V_1(p)}{2}$ ou encore $\boxed{X(p) = \frac{V_2(p) - V_1(p)}{2p}}$

$$2t - kx - \mu\frac{dx}{dt} = 0$$ se transforme en $2T(p) - kX(p) - \mu pX(p) = 0$ ou encore $\boxed{T(p) = \frac{k + \mu p}{2}X(p)}$

$$t = \frac{J}{R^2}\frac{dv_1}{dt}$$ se transforme en $T(p) = \frac{J}{R^2}pV_1(p)$ ou encore $\boxed{V_1(p) = \frac{R^2}{Jp}T(p)}$

On constate que la deuxième écriture n'est pas causale, puisque le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur. Ce n'est en effet pas le déplacement du pantin qui génère la surtension mais son accélération, d'où la question qui suit.

12) Par dérivation et toujours sous les conditions de Heaviside, les accélérations cherchées s'obtiennent par :

$$\Gamma_1(p) = pV_1(p) \text{ ou } V_1(p) = \frac{1}{p}\Gamma_1(p)$$

$$\Gamma_2(p) = pV_2(p) \text{ ou } V_2(p) = \frac{1}{p}\Gamma_2(p)$$

$$\Gamma(p) = p^2X(p) \text{ ou } X(p) = \frac{1}{p^2}\Gamma(p)$$

Alors, en remplaçant ces expressions dans les relations précédentes, il vient les trois expressions causales demandées :

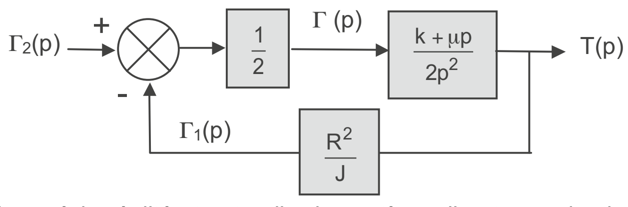
$\boxed{\Gamma(p) = \frac{\Gamma_2(p) - \Gamma_1(p)}{2}}$ simple gain

$\boxed{T(p) = \frac{k + \mu p}{2p^2}\Gamma(p)}$ système double intégrateur généralisé (à zéro)

$\boxed{\Gamma_1(p) = \frac{R^2}{J}T(p)}$ simple gain

<u>Question 2 :</u> Fonction de transfert

21) En respectant l'entrée $\Gamma_2(p)$ et la sortie T(p) du système défini, les trois équations ci-dessus peuvent être regroupées selon le schéma bloc ci-contre.



Bien entendu ce schéma ne correspond pas à la réalité structurelle du système, il est une simple traduction graphique des équations qui le caractérisent. Revoir chapitre 3, paragraphe V-5, si nécessaire.

22) Classiquement on calcule alors :

$$H(p) = \frac{T(p)}{\Gamma_2(p)} = \frac{\frac{k + \mu p}{4p^2}}{1 + \frac{R^2}{J}\cdot\frac{k + \mu p}{4p^2}} = \frac{J}{R^2}\frac{1 + \frac{\mu}{k}p}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{4J}{kR^2}p^2}$$

Il s'agit d'une <u>fonction de transfert du deuxième ordre généralisée</u> (dont on vérifie que le dénominateur est bien à constantes positives, ce qui satisfait le critère de Routh) qui peut être écrite sous forme canonique en identifiant les termes du dénominateur, soit :

$$H(p) = \frac{J}{R^2}\frac{1+\frac{\mu}{k}p}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

avec la pulsation propre $\omega_0 = R\sqrt{\frac{k}{4J}}$ et le facteur d'amortissement $z = \frac{R\mu}{2}\sqrt{\frac{1}{4Jk}}$

23) On calcule, compte tenu des données :

Le gain : $\frac{J}{R^2} = \frac{4,5}{0,3^2} = 50 \text{ kg}$

La constante du numérateur : $\frac{\mu}{k} = \frac{1200}{5000} = 0,24 \text{ s}$

La pulsation propre : $\omega_0 = R\sqrt{\frac{k}{4J}} = 0,3\sqrt{\frac{5000}{4x4,5}} = 5 \text{ rad/s}$

Le facteur d'amortissement : $z = \frac{R\mu}{2}\sqrt{\frac{1}{4Jk}} = \frac{0,3x1200}{2}\sqrt{\frac{1}{4x4,5x5000}} = 0,6$

Le système est donc <u>légèrement sous amorti</u> (z < 1). Ses réponses à une variation d'accélération du film enroulé se traduiront par de <u>légères oscillations de la tension dans le film</u>.

<u>Question 3 :</u> Réponse à un échelon de vitesse

31) La vitesse d'enroulement évoluant selon un échelon de 0,1 m/s, sa transformée de Laplace est :

$$V_2(p) = \frac{0,1}{p}$$

et donc son accélération subit une impulsion, soit par dérivation $\Gamma_2(p) = 0,1$.

Alors la transformée de la tension du film est : $$T(p) = H(p).\Gamma_2(p) = 0,1x\frac{J}{R^2}\frac{1+\frac{\mu}{k}p}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

soit numériquement $T(p) = \frac{5(1+0,24p)}{1+0,24p+0,04p^2}$

■ **Complément : description non causale**

Dans la modélisation effectuée, une description causale a été recherchée. Toutefois, il est également possible de raisonner à partir d'une description non causale. Ainsi, si on reprend les premières équations établies :

$$X(p) = \frac{V_2(p) - V_1(p)}{2p}$$

$$T(p) = \frac{k+\mu p}{2}X(p)$$

$$V_1(p) = \frac{R^2}{Jp}T(p)$$

on peut construire le schéma bloc ci-contre.

Ce schéma n'est pas moins descriptif de la réalité que le précédent, construit sur des fonctions toutes causales. Ni l'un ni l'autre ne représentent la réalité structurelle du système. Aussi la causalité n'est nullement dans ce cas une obligation. Celle-ci ne caractérise que des systèmes matériels réels avec une entrée commandée et une sortie attendue. Ce n'est le cas d'aucun des trois blocs ci-dessus. Revoir chapitre 3, paragraphe V-4, si nécessaire : une manipulation de blocs peut sans dommage introduire des blocs non causaux.

Poursuivant l'étude à partir de cette description, il vient la fonction :

$$\frac{T(p)}{V_2(p)} = \frac{\dfrac{k+\mu p}{4p}}{1+\dfrac{R^2}{Jp}\cdot\dfrac{k+\mu p}{4p}} = \frac{Jp}{R^2}\,\frac{1+\dfrac{\mu}{k}p}{1+\dfrac{\mu}{k}p+\dfrac{4J}{kR^2}p^2} = \frac{Jp}{R^2}\,\frac{1+\dfrac{\mu}{k}p}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Cette fonction est la dérivée de la fonction H(p) puisque se déduit de celle-ci par une multiplication par p. Ceci pouvait être attendu puisque l'entrée considérée pour le système est cette fois la vitesse d'enroulement et non plus l'accélération.

Soumis à un échelon de vitesse $V_2(p) = \dfrac{0,1}{p}$, le système évoluera donc avec une tension selon :

$$T(p) = \frac{0,1}{p} \text{x} \frac{Jp}{R^2}\,\frac{1+\dfrac{\mu}{k}p}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2} = 0,1\text{x}\frac{J}{R^2}\,\frac{1+\dfrac{\mu}{k}p}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

On retrouve bien le même résultat qu'avec la démarche reposant sur une description causale.

32) Les valeurs initiale et finale de la surtension s'obtiennent par les théorèmes du même nom :

- Valeur initiale : $t(0) = \lim\limits_{p\to\infty} pT(p) = 0,1\text{x}\dfrac{J}{R^2}\,\dfrac{p+\dfrac{\mu}{k}p^2}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2} = 0,1\text{x}\dfrac{J}{R^2}\,\dfrac{\mu\omega_0^2}{k}$

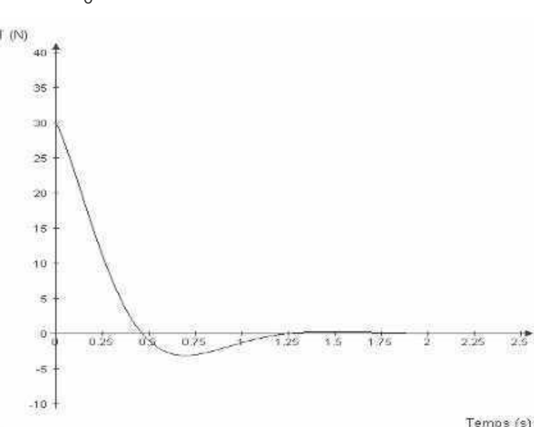
  Sachant que $\omega_0 = R\sqrt{\dfrac{k}{4J}}$ il vient :

  $t(0) = \dfrac{0,1\mu}{4}$, qui ne dépend donc que de l'amortisseur du pantin et vaut : t(0) = 30 N.

- Valeur finale : $t(\infty) = \lim\limits_{p\to 0} pT(p) = 0,1\text{x}\dfrac{J}{R^2}\,\dfrac{p+\dfrac{\mu}{k}p^2}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2} = 0\ \text{N}$

Ainsi, soumis à une brusque augmentation de la vitesse d'enroulement de 0,1 m/s, le film subit une surtension initiale de 30 N qui finit par disparaître au cours du temps. Cela correspond bien au fonctionnement attendu du système, à condition bien entendu de satisfaire certainement un certain critère de rapidité.

33) Les valeurs précédentes, ainsi que le caractère oscillant de la réponse, permettent de tracer l'allure de l'évolution temporelle de la tension dans le film. Ci-contre est donné le résultat d'une simulation sur ordinateur.



Lorsque la valeur finale est nulle comme ici, la rapidité peut être caractérisée par le temps de réponse à 5% de la valeur initiale, soit ici donc lorsque la tension ne sort plus de l'intervalle $\pm$ 1,5 N. On évalue graphiquement ci-contre ce temps à à peine 1 s.

Par ailleurs, les oscillations sont limitées (le facteur d'amortissement égal à 0,6 n'est pas trop petit).

En conclusion, s'il résiste à la surtension maximale de 30 N, le film ne se déchirera pas, puis retrouvera sa tension nominale de fonctionnement au bout d'un temps de l'ordre de 1,25 s.

Question 4 : Influence des paramètres du pantin

41) Compte tenu des relations : $z = \frac{R\mu}{2}\sqrt{\frac{1}{4Jk}}$ et $t(0) = \frac{0,1\mu}{4}$ précédemment établies, il vient :

k (N/m)	μ (N/m.s^{-1})	Facteur z	Valeur initiale de la surtension (N)	Valeur finale de la surtension (N)
5000	1200	0,6	30	0
50000	1200	0,2	30	0
500	1200	1,9	30	0
5000	120	0,06	3	0
5000	12000	6	300	0

42) On observe que, dans tous les cas, la régulation de tension est assurée puisque la valeur finale de la surtension est nulle. Par contre, l'évolution temporelle dépend grandement des paramètres et en particulier de l'amortissement.

La raideur du ressort n'a aucune influence sur la surtension initiale et sa limitation conduit à une augmentation du facteur d'amortissement.

Une valeur faible de l'amortissement présente l'avantage de générer une surtension initiale faible. Mais le facteur d'amortissement z diminue également ce qui engendre un comportement fortement oscillant, donc une possibilité de dépasser la valeur initiale et un temps de réponse très grand.

Une valeur forte de l'amortissement assure un grand facteur d'amortissement, mais une surtension initiale importante qui peut conduire au déchirement du film.

Le concepteur semble donc devoir opter pour une raideur du ressort la plus faible possible et un amortissement assurant un compromis entre une surtension initiale supportable et une rapidité de réaction du système suffisante.

43) Plus la raideur du ressort est faible, plus les oscillations du pantin se font avec une grande amplitude. L'amplitude admissible définit donc la valeur de k.

■ Complément : simulations logicielles

Les simulations logicielles qui suivent illustrent les propos précédents. On trouvera pour chaque couple (k,μ) :

- l'évolution de la surtension t (en N) pour un échelon de vitesse d'enroulement de 0,1 m/s
- le déplacement x du pantin (en mm).

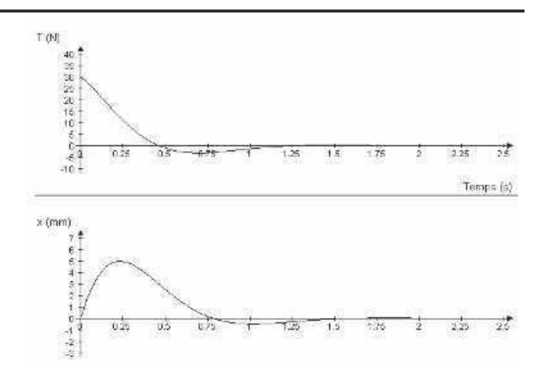
Attention : les différentes courbes <u>ne sont pas à la même échelle</u>.

Réglage du constructeur

$k = 5000\ N.m^{-1}$
$\mu = 1200\ N.m^{-1}.s$

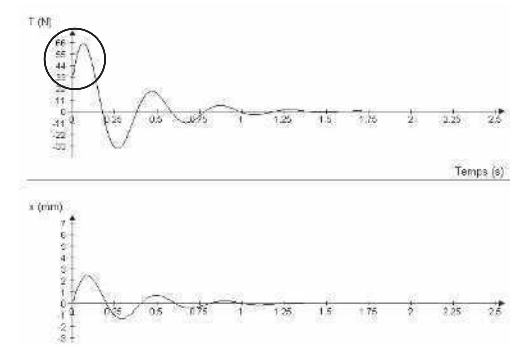
On observe le comportement déjà annoncé à la question 3 pour la surtension : une valeur initiale (et maximale) de 30 N et un retour à la tension de fonctionnement au bout d'environ 1,25 s.

Le pantin se déplace d'environ 5 mm, puis revient à sa position initiale avec sensiblement la même rapidité.



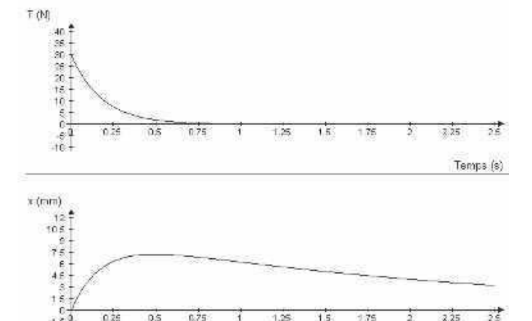
Influence de k

$k = 50000\ N.m^{-1}$
$\mu = 1200\ N.m^{-1}.s$



Le système est sous amorti (z = 0,2) et donc oscillant.
Les oscillations font que la surtension dépasse sa valeur initiale.
Le pantin se déplace peu (2,5 mm maxi), mais oscille.

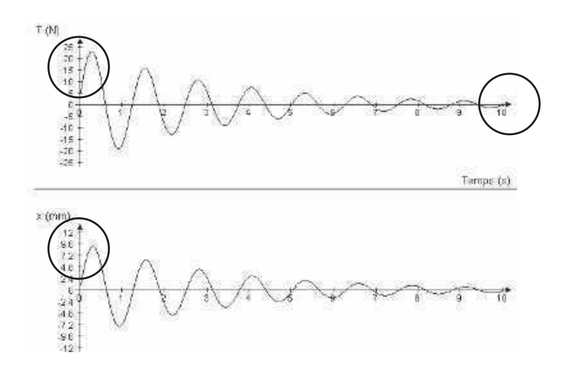
$k = 500\ N.m^{-1}$
$\mu = 1200\ N.m^{-1}.s$



Le système est amorti (z = 1,9) et donc non oscillant.
La surtension s'annule rapidement (0,75 s).
Le pantin se déplace d'un peu plus de 7 mm, puis est très lent pour revenir à sa position initiale.

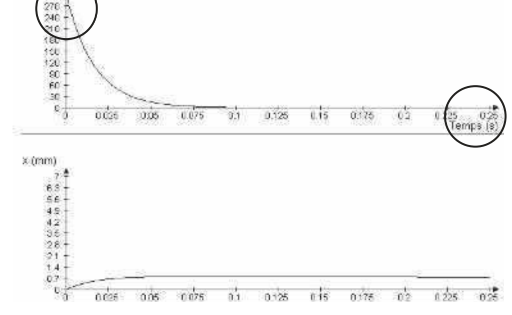
Influence de μ

$k = 5000\ N.m^{-1}$
$\mu = 120\ N.m^{-1}.s$



La surtension initiale est très faible (3 N) et reste faible (< 23 N).
Les oscillations sont très importantes (z = 0,06).
Le pantin se déplace beaucoup (jusqu'à 9,5 mm).
Les oscillations ralentissent considérablement le système.

$k = 5000\ N.m^{-1}$
$\mu = 12000\ N.m^{-1}.s$



Le système est très amorti (z = 6).
La surtension s'annule très vite (0,1 s) mais sa valeur initiale est très importante (300 N).
Le pantin se déplace très peu.

ANALYSE FRÉQUENTIELLE

L'analyse fréquentielle des systèmes linéaires s'intéresse à leur comportement en régime permanent, en réponse à une entrée sinusoïdale. Elle définit les importants outils graphiques de représentation, appelés lieux de transferts, que sont les diagrammes de Nyquist, Bode et Black.

D'une manière générale, cette analyse permet de caractériser la réponse des systèmes en termes d'atténuation, amplification, résonance, déphasage, etc. Ces renseignements tirent toute leur pertinence quand on sait, par l'analyse de Fourier, que la plupart des signaux peuvent être représentés comme une superposition de signaux sinusoïdaux.

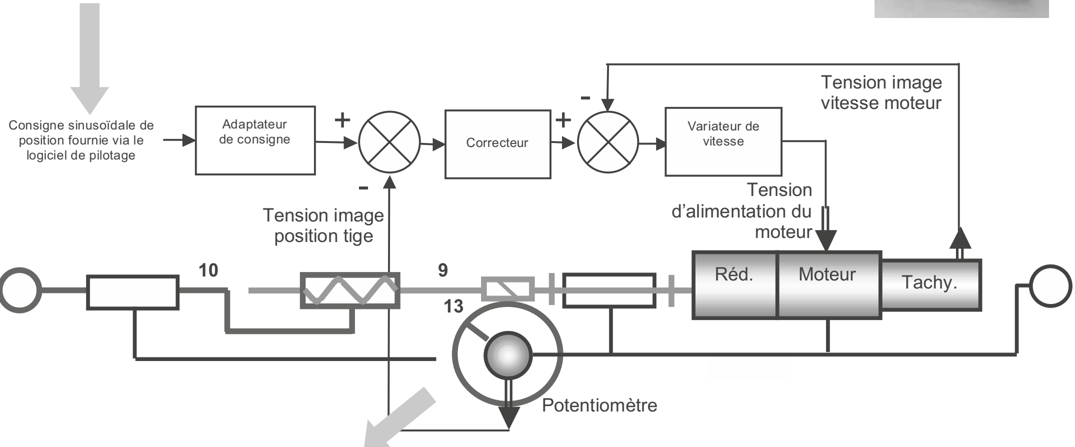
Dans le cas particulier des systèmes asservis, cette analyse apportera de précieuses informations sur le comportement dynamique du système, en particulier en termes de stabilité. Elle sera à la base des méthodes de conception des correcteurs, traitées dans le chapitre 6.

I - EXEMPLE INTRODUCTIF : axe asservi du robot parallèle EX800

I-1 Présentation



Le système EX800 a déjà été présenté. Le logiciel de pilotage de la plate-forme permet de solliciter un vérin isolé selon une loi de commande choisie (ici une commande sinusoïdale).



Le potentiomètre et la carte de commande permettent alors le tracé de l'évolution temporelle de la position de la tige.

Le correcteur peut être réglé à partir de boutons manuels situés en façade de la plate-forme. Ceux-ci sont dans la même position que lors de l'exercice I du chapitre 4, aussi le comportement de la chaîne asservie, sous réserve qu'il n'y ait pas de saturation de la tension de commande du moteur, peut être modélisé par un système linéaire du premier ordre, de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{1 + 0,45p}$$

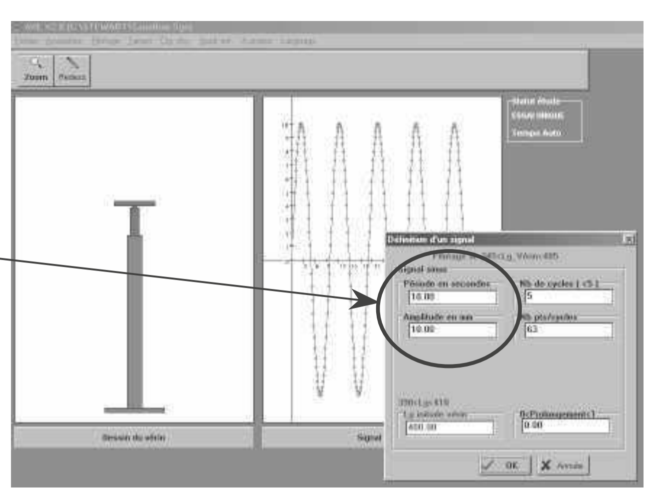
Revoir l'exercice I du chapitre 4 si nécessaire.

I-2 Réponses fréquentielles

La commande de mouvement se fait selon une loi sinusoïdale causale :

- si $t < 0$, $e(t) = 0$
- si $t \geq 0$, $e(t) = E_0 \sin\omega t$

avec E_0 = 10 mm (suffisamment faible pour ne pas engendrer de saturation de la commande) et ω réglée par la période T du sinus. Par exemple, ci-contre, on règle T = 10 s, soit une pulsation ω = 0,63 rad/s.



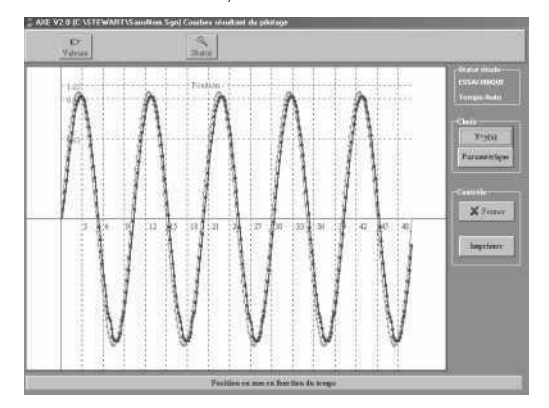
Rappel des relations entre pulsation ω (rad/s) , fréquence f et période T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\text{, en s} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\text{, en rad/s}$$

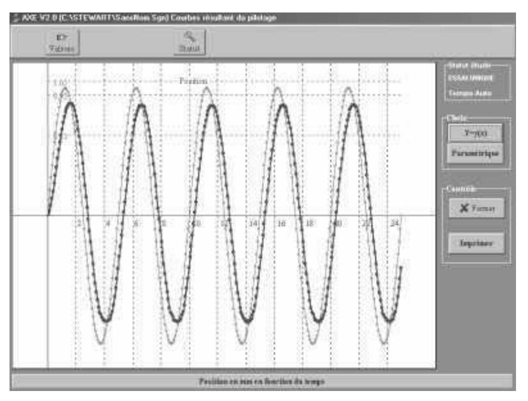
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\text{, en Hz}$$

Les réponses sont alors les suivantes, pour différentes valeurs de la pulsation ω :

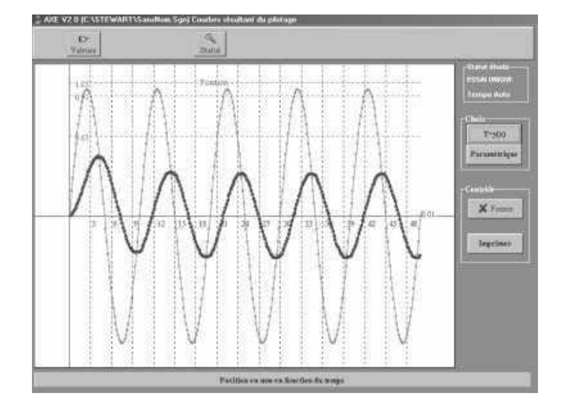
T = 10 s soit ω = 0,63 rad/s :



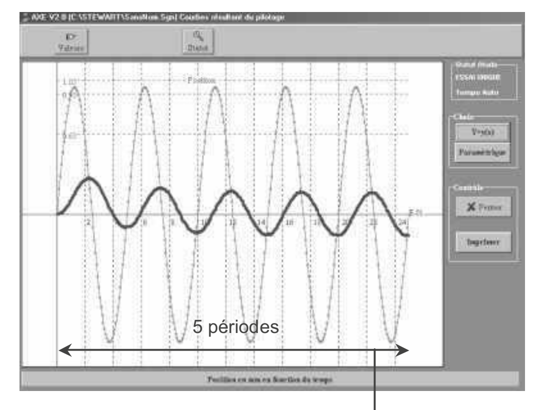
T = 5 s soit ω = 1,26 rad/s :



T = 1 s soit ω = 6,28 rad/s :



T = 0,5 s soit ω = 12,56 rad/s :



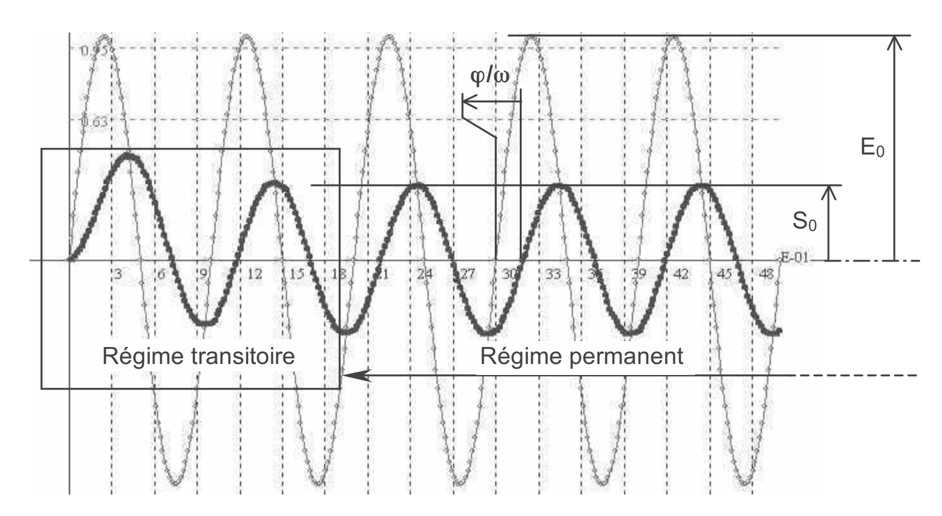
***Attention :** sur ces quatre relevés, l'échelle des temps n'est pas la même, la durée de chaque essai correspondant à cinq fois la période du signal d'entrée.*

I-3 Observations - définitions

On observe que le déplacement (sortie du système linéaire), après un bref régime transitoire plus ou moins marqué, tend vers un ***régime permanent*** caractérisé par un déplacement sinusoïdal de même période, donc ***de même pulsation***, que la commande (entrée du système linéaire).

On écrira donc qu'en régime permanent : $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi) = S_0 \sin[\omega(t + \frac{\varphi}{\omega})]$.

- S_0 est l'amplitude de la sortie en régime permanent,
- φ est son ***déphasage*** (angle négatif dans les essais présentés),
- $-\varphi/\omega$ est son décalage temporel, positif si le déphasage est négatif comme ici.



On observe de plus, en comparant les quatre essais effectués, que l'amplitude de la sortie et son déphasage par rapport à l'entrée dépendent de la pulsation de l'entrée :

Période	10 s	5 s	1 s	0,5 s
Pulsation	0,63 rad/s	1,26 rad/s	6,28 rad/s	12,56 rad/s
Rapport S_0/E_0	0,95	0,85	0,33	0,18
Décalage temporel	0,48 s	0,40 s	0,19 s	0,11 s
Déphasage	- 0,3 rad	- 0,5 rad	- 1,2 rad	- 1,4 rad

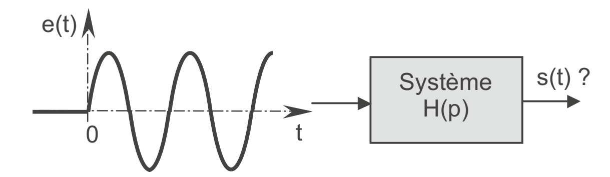
Il va être démontré dans le paragraphe suivant que ces observations sont caractéristiques d'un système linéaire stable. L'analyse fréquentielle de tels systèmes consiste alors à caractériser le régime sinusoïdal permanent de la sortie en fonction de la pulsation de l'entrée.

II - RÉPONSE PERMANENTE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE À UNE ENTRÉE SINUSOÏDALE

II-1 Propriété fondamentale : réponse fréquentielle d'un système stable

Soit un système linéaire de fonction de transfert H(p) soumis à une entrée sinusoïdale causale d'amplitude E_0 et de pulsation ω :

- si $t < 0$, $e(t) = 0$
- si $t \geq 0$, $e(t) = E_0 \sin\omega t$



L'étude est restreinte aux systèmes ***stables*** pour lesquels la notion de ***régime permanent*** a un sens. L'objectif est de caractériser ce régime permanent, c'est-à-dire le comportement de la sortie au bout d'un temps « suffisamment long » pour que les termes transitoires puissent être négligés.

La transformée de Laplace de l'entrée sinusoïdale est : $E(p) = \frac{E_0\omega}{p^2+\omega^2}$.

 Fiche ressource "table des transformées de Laplace"

La sortie s'écrit donc, dans le domaine de Laplace : $S(p) = H(p)\frac{E_0\omega}{p^2+\omega^2}$

dont la décomposition en éléments simples fait alors apparaître deux familles de termes :

- Un terme provenant des n pôles p_i de la fonction de transfert : $\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(p)}{p-p_i}$ où q_i est un polynôme.

  Par transformation de Laplace inverse, ce terme génère une série d'éléments facteurs d'exponentielles, convergeant rapidement vers zéro puisque, le système étant stable, tous les pôles sont à partie réelle strictement négative. Ainsi, ce terme est caractéristique du régime transitoire.

- Un terme provenant de l'entrée sinusoïdale : $E_0\frac{A+Bp}{p^2+\omega^2}$.

  Ce terme est donc caractéristique du régime permanent.

 Fiche ressource "décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples"

Ainsi la transformée de Laplace de la sortie ***en régime permanent*** est obtenue en ne considérant que le second terme de la décomposition. Soit :

$S_\infty(p) = E_0\frac{A+Bp}{p^2+\omega^2}$.

Reste à identifier les coefficients A et B.

Par identification avec, en régime permanent, $S_\infty(p) \approx S(p) = H(p)\frac{E_0\omega}{p^2+\omega^2}$, il vient alors :

- en prenant p = jω : $A + Bj\omega = \omega H(j\omega)$
- en prenant p = -jω : $A - Bj\omega = \omega H(-j\omega)$

Avant d'extraire A et B de ce système d'équations, il est intéressant de remarquer que, puisque H(p) est une fraction rationnelle, $H(-j\omega)$ est égal au conjugué $\overline{H}(j\omega)$. En effet, toutes les puissances impaires de jω fournissent la partie imaginaire de $H(j\omega)$, qui change donc de signe lorsque l'on remplace j par -j. Ainsi, on écrira plutôt ce système d'équations :

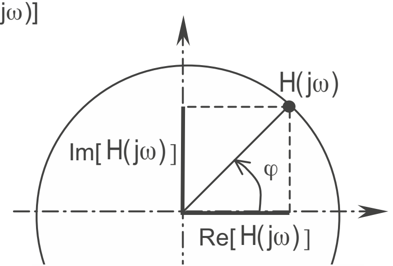
$$\begin{cases} A + Bj\omega = \omega H(j\omega) \\ A - Bj\omega = \omega \overline{H}(j\omega) \end{cases}$$

Il vient alors :

$$A = \frac{\omega}{2}[H(j\omega) + \overline{H}(j\omega)] = \frac{\omega}{2}2\,\mathrm{Re}[H(j\omega)] = \omega\,\mathrm{Re}[H(j\omega)]$$

$$B = \frac{1}{2j}[H(j\omega) - \overline{H}(j\omega)] = \frac{1}{2j}2j\,\mathrm{Im}[H(j\omega)] = \mathrm{Im}[H(j\omega)]$$

Classiquement, la partie réelle $\mathrm{Re}[H(j\omega)]$ et la partie imaginaire $\mathrm{Im}[H(j\omega)]$ de $H(j\omega)$ s'écrivent en fonction de son module $|H(j\omega)|$ et de son argument $\mathrm{Arg}[H(j\omega)]=\varphi$:



$$\mathrm{Re}[H(j\omega)] = |H(j\omega)|\cos\varphi$$

$$\mathrm{Im}[H(j\omega)] = |H(j\omega)|\sin\varphi$$

Et donc :

$$\begin{cases} A = \omega |H(j\omega)| \cos\varphi \\ B = |H(j\omega)| \sin\varphi \end{cases}$$

Ainsi, la transformée de Laplace de la sortie en régime permanent s'écrit :

$$S_\infty(p) = E_0 |H(j\omega)| \frac{\omega \cos\varphi + p \sin\varphi}{p^2 + \omega^2} = E_0 |H(j\omega)| \left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cos\varphi + \frac{p}{p^2+\omega^2}\sin\varphi\right]$$

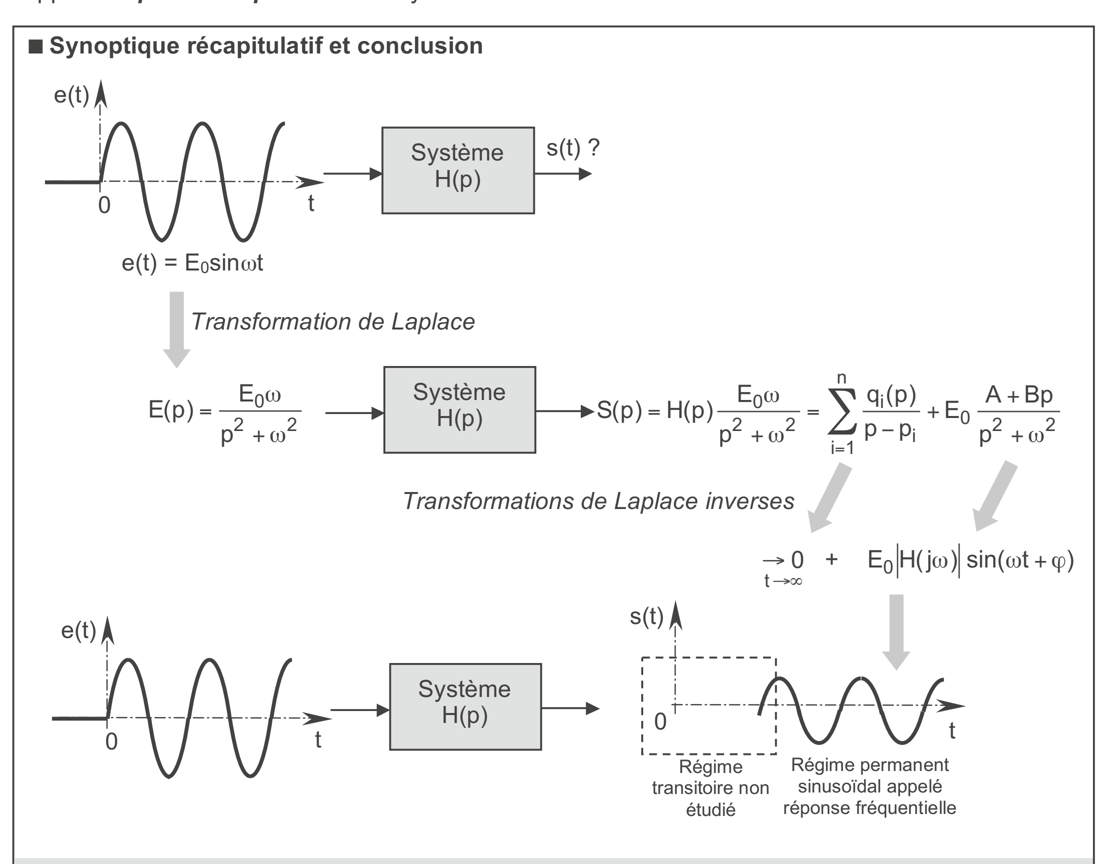
Or $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ et $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ sont respectivement les transformées de $\sin\omega t$ et $\cos\omega t$.

La sortie en régime permanent s'écrit donc :

$$s_\infty(t) = E_0 |H(j\omega)| [\sin\omega t . \cos\varphi + \cos\omega t . \sin\varphi] = E_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)$$

Ce qui est bien une évolution sinusoïdale, comme observé dans l'exemple introductif. Elle est appelée ***réponse fréquentielle*** du système.

■ **Synoptique récapitulatif et conclusion**



Soumis à une entrée sinusoïdale d'amplitude E_0 et de pulsation ω, un système linéaire stable, de fonction de transfert H(p), fournit une sortie qui, ***en régime permanent*** est :

- sinusoïdale,
- de même pulsation ω,
- d'amplitude $S_0 = E_0|H(j\omega)|$
- déphasée d'un angle $\varphi = \text{Arg}[H(j\omega)]$.

$e(t) = E_0\sin\omega t$ → Système H(p) → $s_\infty(t) = S_0\sin(\omega t+\varphi)$

Cette sortie est appelée ***réponse fréquentielle*** du système.

■ **Remarque**
Dans un souci d'allègement et lorsque cela ne présentera aucune ambiguïté, la réponse fréquentielle $s_\infty(t)$ sera tout simplement notée s(t).

II-2 Cas des intégrateurs

Les développements précédents se sont limités aux systèmes stables. Cela s'est traduit par l'utilisation de la propriété de convergence exponentielle des termes transitoires associés aux pôles à partie réelle strictement négative de la fonction de transfert du système. Toutefois, l'existence d'un régime permanent sinusoïdal peut être généralisé au cas de la présence de pôles nuls dans la fonction de transfert.

En effet, la présence de pôles nuls se traduit par autant d'intégrations dans l'expression de la sortie. Or, l'intégration d'un signal sinusoïdal (en l'occurrence la réponse en régime permanent du système sans les composants intégrateurs) est un signal lui-même sinusoïdal. Aussi les résultats qui viennent d'être établis se généralisent à tous les systèmes qui présentent des pôles nuls.

En conclusion, l'analyse fréquentielle, qui suppose l'existence d'un régime sinusoïdal permanent en réponse à une entrée sinusoïdale, est donc limitée aux ***systèmes stables***, éventuellement associés à des ***éléments intégrateurs***, c'est-à-dire aux systèmes dont les pôles sont, soit nuls, soit à partie réelle strictement négative.

■ Système intégrateur pur :

$e(t) = E_0 \sin\omega t$ → Système 1/p →

$$s(t) = -\frac{E_0}{\omega}\cos\omega t = \frac{E_0}{\omega}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Ce qui est bien cohérent avec :

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = \dfrac{1}{\omega} \\ \text{Arg}[H(j\omega)] = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

■ Système intégrateur associé à un système stable :

$e(t) = E_0 \sin\omega t$ → Système H(p)/p →

$$s_\infty(t) = \int S_0 \sin(\omega t + \varphi)dt = \frac{S_0}{\omega}\sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

II-3 Lieux de transfert

II-3-1 Caractérisation de la réponse fréquentielle

D'après ce qui précède, la réponse fréquentielle d'un système linéaire, ***si elle existe***, est caractérisée par la fonction $H(j\omega)$, dite fonction de transfert harmonique, obtenue tout simplement en remplaçant l'opérateur p par $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert H(p). Cette fonction de transfert harmonique peut être caractérisée en fonction de la pulsation ω, comme tout nombre complexe, par :

- son ***module*** (ou ***amplitude***, ou ***gain***) : $G = \frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)|$
- sa ***phase*** (ou déphasage) : $\varphi = \text{Arg}[H(j\omega)]$

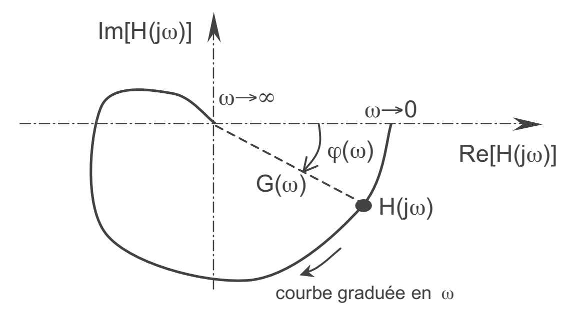
On appelle alors ***lieu de transfert*** d'un système, une représentation graphique de la fonction de transfert harmonique $H(j\omega)$. On distingue trois lieux de transfert usuels : les diagrammes de Nyquist, Bode et Black. Ces diagrammes ont chacun leurs particularités et le choix d'en utiliser un plutôt qu'un autre dépend des objectifs de l'étude.

On se souviendra que ces diagrammes, s'ils peuvent être tracés sans condition, n'ont un sens que si la fonction de transfert satisfait les conditions d'existence d'un régime permanent sinusoïdal précédemment précisées.

II-3-2 Diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist est le plus immédiat : c'est la courbe paramétrée en pulsation $\omega \in]0, +\infty[$, représentant la fonction $H(j\omega)$ dans le plan complexe.
La courbe étant graduée en ω, on y lit directement en un point donné :

- le gain $G = |H(j\omega)|$
- la phase $\varphi = \text{Arg}[\,H(j\omega)\,]$



Le principal inconvénient que présente ce diagramme est la nécessité de la graduation en pulsation pour une lecture complète.

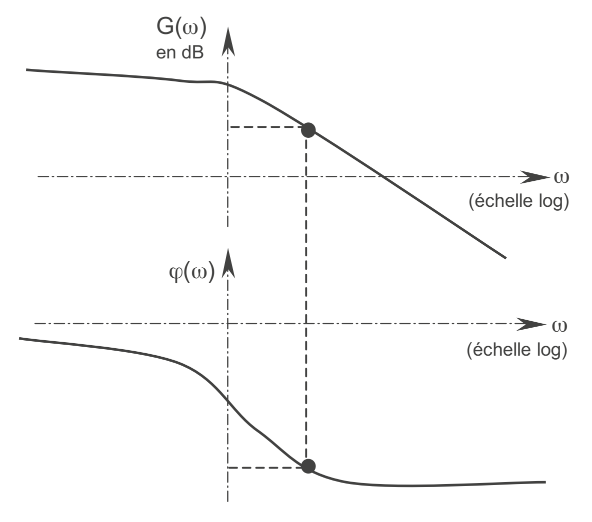
II-3-3 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode lève la difficulté de la graduation en ω du diagramme de Nyquist en représentant la fonction $H(j\omega)$ selon deux courbes distinctes, placées en vis-à-vis pour plus de clarté :

- une courbe représentant la fonction gain $G = |H(j\omega)|$
- une courbe représentant la fonction phase $\varphi = \text{Arg}[\,H(j\omega)\,]$.

Ces deux courbes permettent une lecture directe pour une pulsation donnée.

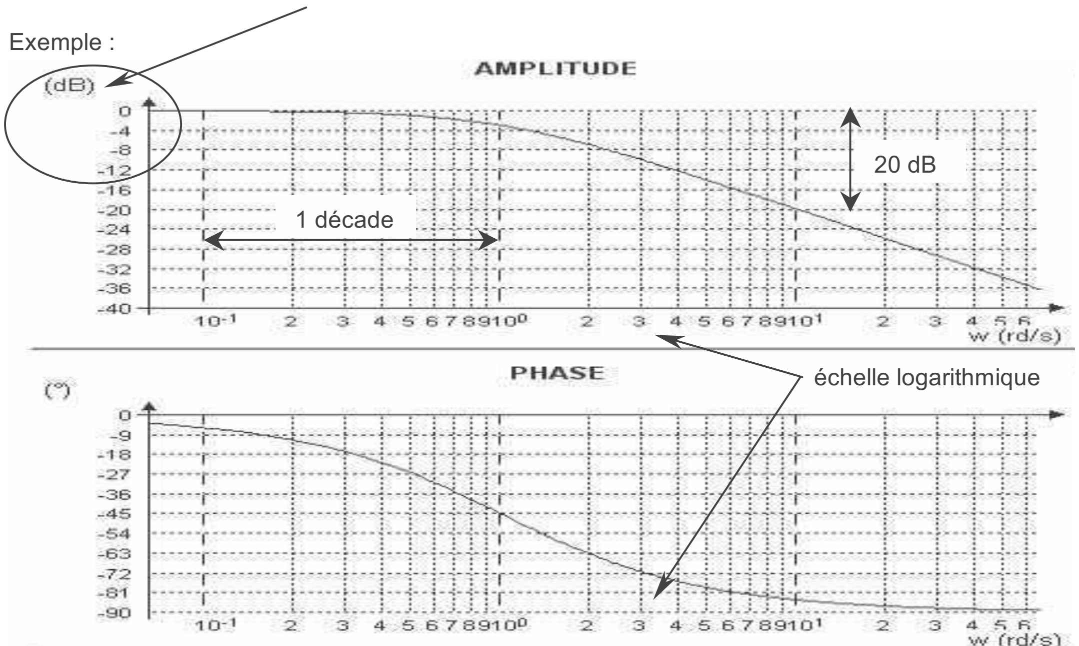
Il est usuel de placer la courbe de phase en dessous de la courbe d'amplitude.



Pour des raisons historiques et pratiques issues de l'acoustique :

- l'axe des pulsations est gradué selon une échelle logarithmique,
- le gain est exprimé en ***décibels*** (dB) : G en dB = 20logG.

Exemple :



■ Quelques précisions

Parfois, l'axe des abscisses n'est pas gradué en pulsations (rad/s), mais en fréquences (Hz). Cet usage est peu répandu en automatique, il concerne surtout l'électronique et bien entendu l'acoustique. L'axe des phases quant à lui est indifféremment gradué en radians ou en degrés.

L'échelle logarithmique fait clairement apparaître les ***décades*** qui correspondent à un rapport 10 en pulsations, ou en fréquences. Plus accessoirement une octave correspond à un rapport 2. Ce dernier terme est clairement issu de l'origine acoustique du diagramme de Bode.

L'échelle logarithmique est bien adaptée au domaine de définition de la pulsation : $\omega \in]0,+\infty[$. Il n'y a donc, évidemment, pas de zéro sur l'axe des abscisses.

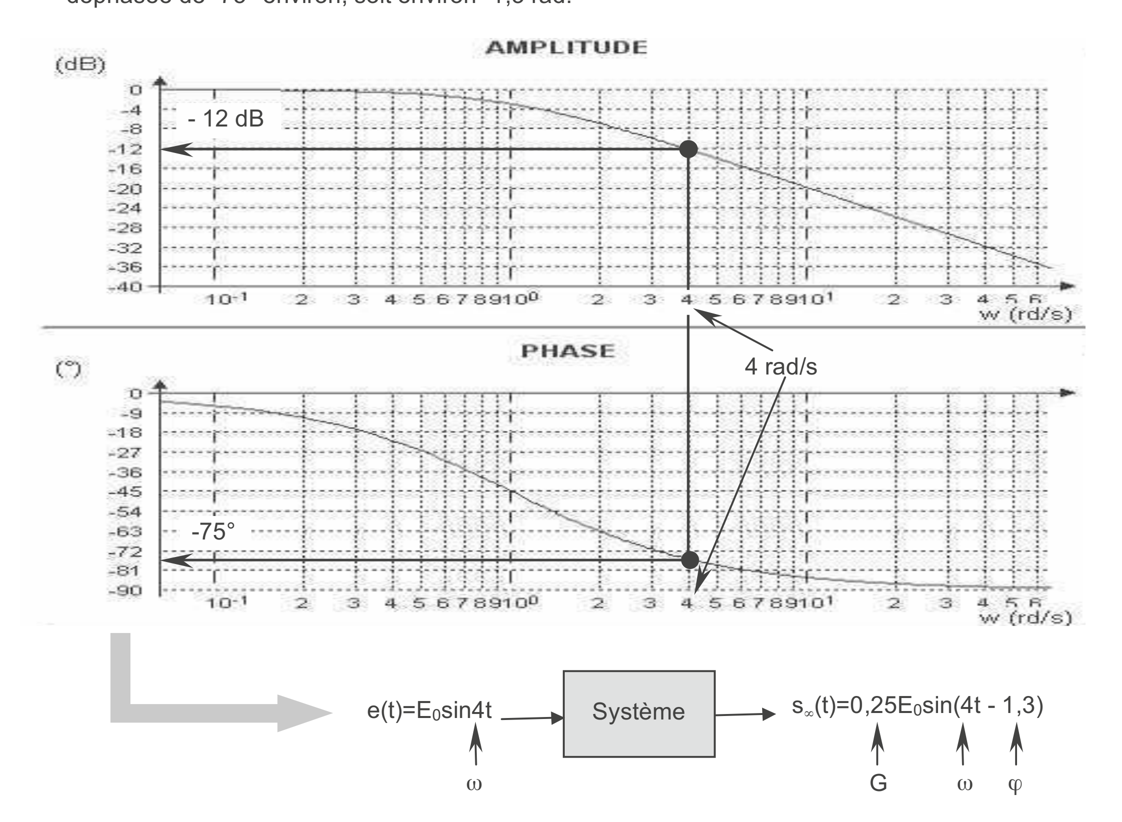
Concernant les ***décibels***, il est pratique de retenir les chiffres suivants :

- 0 dB correspond à un gain G = 1 (20log1 = 0) : l'amplitude des oscillations de sortie en régime permanent est alors égale à celle de l'entrée.
- 20 dB correspondent à un facteur 10 sur l'amplitude, et donc -20dB à un facteur 1/10 (20log10=20, 20log0,1=-20).
- 40 dB correspondent à un facteur 100, et donc -40dB à un facteur 1/100, etc.
- D'une manière générale, un gain positif en décibels correspond à G > 1, c'est-à-dire que le système amplifie l'amplitude de la sinusoïde d'entrée, et inversement si le gain en dB est négatif. On parle alors de système amplificateur ou atténuateur pour la pulsation concernée.

■ Exemple de lecture

On lit sur le diagramme donné en illustration que, par exemple, le système soumis à une entrée sinusoïdale de pulsation 4 rad/s fournit une sortie qui, en régime permanent, est sinusoïdale de même pulsation, comme toujours, et :

- d'amplitude diminuée de 12 dB, c'est-à-dire telle que 20logG = -12, soit $G = 10^{-12/20} \approx 0,25$
- déphasée de -75° environ, soit environ -1,3 rad.

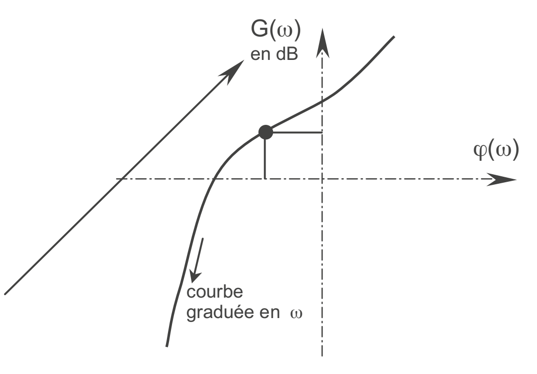


II-3-4 Diagramme de Black

Le diagramme de Black est la courbe paramétrée (et donc graduée) en pulsation $\omega \in]0, +\infty[$, représentant la fonction $H(j\omega)$ dans un plan cartésien ayant :

- pour abscisse la phase $\varphi = \text{Arg}[H(j\omega)]$
- pour ordonnée le gain $G = |H(j\omega)|$.

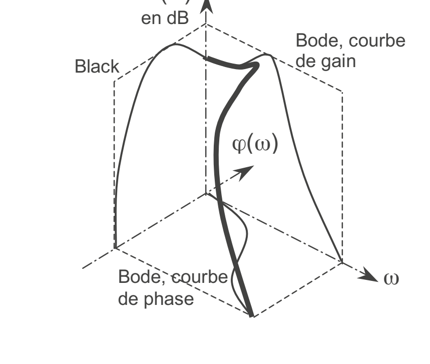
Comme pour le diagramme de Bode le gain est exprimé en ***décibels***.



Un diagramme de Black s'obtient aisément à partir d'un diagramme de Bode en éliminant la pulsation entre deux points de chaque courbe, deux à deux. Il présente le même inconvénient que le diagramme de Nyquist, à savoir la nécessité d'une graduation en pulsations pour une lecture complète. En revanche, il se rapproche du diagramme de Bode, puisqu'il donne comme lui le gain en décibels. Son usage sera très pratique pour caractériser les systèmes automatiques en termes de stabilité.

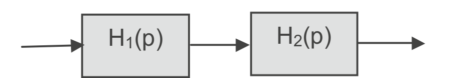
II-3-5 Lien entre les diagrammes de Bode et de Black

Ces diagrammes ne sont en fait que des projections planes de la courbe tridimensionnelle ci-contre qui lie le gain, la phase et la pulsation.



II-4 Réponse fréquentielle de systèmes en série

Dans la situation, courante en automatique, où des systèmes sont placés en série, l'analyse fréquentielle revêt une forme simple, provenant du fait que les fonctions de transfert se multiplient.



On sait en effet que :

- l'argument du produit de deux nombres complexes est la somme de leurs arguments,
- le module du produit de deux nombres complexes est le produit de leurs modules.

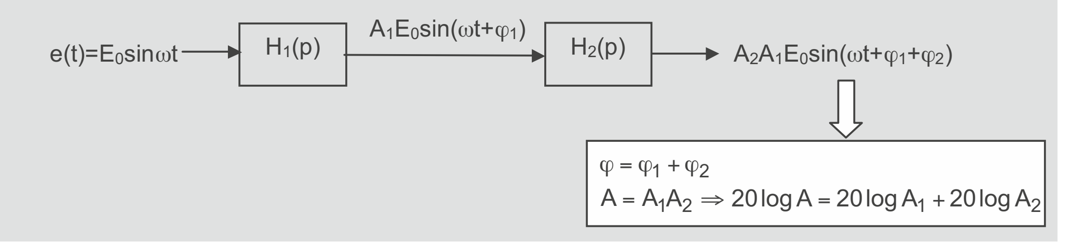
Alors, si $H(p) = H_1(p).H_2(p)$, et donc $H(j\omega) = H_1(j\omega).H_2(j\omega)$, il vient immédiatement :

- $\text{Arg}[H(j\omega)] = \text{Arg}[H_1(j\omega)] + \text{Arg}[H_2(j\omega)]$
- $|H(j\omega)| = |H_1(j\omega)|.|H_2(j\omega)| \Rightarrow 20\log|H(j\omega)| = 20\log|H_1(j\omega)| + 20\log|H_2(j\omega)|$

(propriété de base des logarithmes)

Conclusion :

Si deux systèmes sont en série, leur comportement fréquentiel est tel que leurs phases s'ajoutent et leurs amplitudes se multiplient, donc, lorsqu'elles sont exprimées en décibels, s'ajoutent aussi :



Cette propriété se traduira par des constructions graphiques aisées, par simples additions des diagrammes de Bode et de Black. Par contre, le diagramme de Nyquist ne peut pas permettre d'utilisation simple de cette propriété. C'est un des principaux intérêts de l'usage des décibels. De ce fait, le diagramme de Nyquist est d'un usage moindre en automatique.

III - LIEUX DE TRANSFERT DES SYSTÈMES USUELS

Les systèmes dits « usuels » ont été définis au chapitre 4. Il s'agit de l'intégrateur, des systèmes fondamentaux du premier et du deuxième ordre, ainsi que du cas particulier, non linéaire, du système à retard pur. Ces systèmes présentent des réponses fréquentielles qu'il est important de maîtriser, tant elles sont fondamentales pour l'automaticien.

III-1 Système intégrateur

III-1-1 Réponse fréquentielle

Le système intégrateur a pour fonction de transfert une fonction de la forme : $H(p) = \frac{K}{p}$ (avec K>0)

Bien que classé parmi les systèmes instables (son unique pôle est nul), ce système présente une réponse sinusoïdale permanente, ce qui justifie le tracé de ses lieux de transferts. Cf. II-2.

Immédiatement : $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = -j\frac{K}{\omega}$. D'où : $G = |H(j\omega)| = \frac{K}{\omega}$ et $\varphi = \text{Arg}[H(j\omega)] = -\frac{\pi}{2}$

■ **Remarque**

Ces résultats peuvent se retrouver directement, sans utiliser la fonction de transfert, comme au II-2, par simple intégration d'une fonction sinusoïdale :

$e(t) = E_0 \sin\omega t$ → [Système K/p] → $s(t) = -\frac{KE_0}{\omega}\cos\omega t = \frac{KE_0}{\omega}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

Ceci met en évidence que le régime fréquentiel de l'intégrateur est immédiatement atteint : il n'y a pas de régime transitoire.

III-1-2 Diagramme de Bode

La courbe de phase est clairement une droite horizontale à - π/2, puisque la phase vaut - π/2 pour toute pulsation.

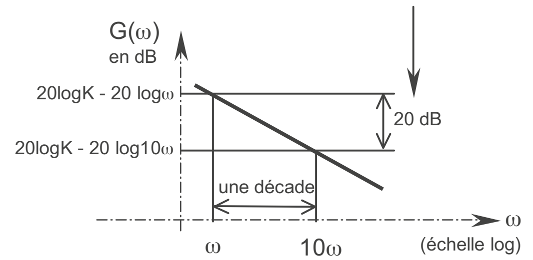
La courbe de gain s'obtient en écrivant que :

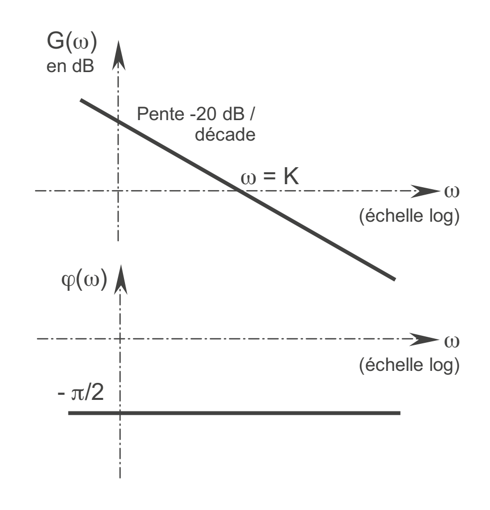
20logG = 20logK - 20logω.

En coordonnées logarithmiques, ceci constitue l'équation d'une droite :

- coupant l'horizontale 0 dB (G = 1) pour ω = K ;
- de pente -20 dB par décade : une multiplication par 10 de la pulsation, soit une augmentation d'une décade, se traduit par une diminution du gain de :

  20log10ω - 20logω = 20log10 = 20 dB





III-1-3 Diagramme de Black

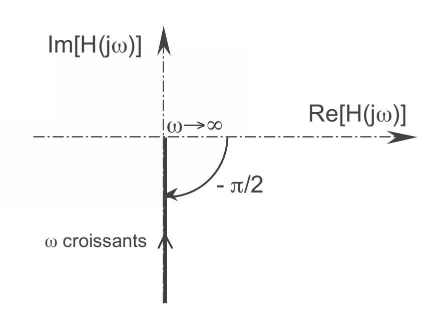
Puisque :

- la phase vaut $-\pi/2$ pour toute valeur de la pulsation ω,
- le gain, variant de $+\infty$ à 0 lorsque ω parcours son domaine de définition, peut prendre toute valeur en dB,

le diagramme de Black est la droite ci-contre, orientée de haut en bas.

G(ω) en dB
- π/2
φ(ω)
ω croissants

III-1-4 Diagramme de Nyquist



Puisque :

- la phase vaut $-\pi/2$ pour toute valeur de la pulsation ω,
- le gain varie de $+\infty$ à 0 lorsque ω parcours son domaine de définition,

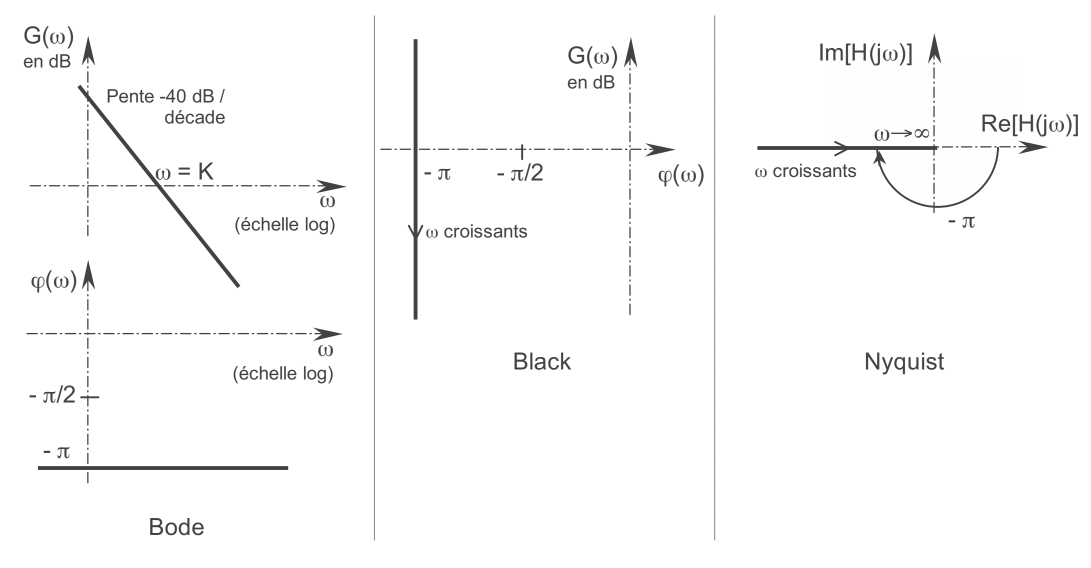
le diagramme de Nyquist est la demi-droite ci-contre, orientée de bas en haut.

III-1-5 Forme générale $H(p)=Kp^{-\alpha}$

On peut déduire des considérations précédentes les lieux de transferts de systèmes correspondant à de multiples intégrations ou dérivations.

■ Pour un multiple intégrateur, le système déphase de $-\pi/2$ pour chaque intégration : $-\pi/2$ pour l'intégrateur, $-\pi$ pour le double intégrateur, etc.
Ceci définit aisément les diagrammes de Black et Nyquist, ainsi que la courbe de phase du diagramme de Bode.
Concernant la courbe de gain du diagramme de Bode, il s'agit toujours d'une droite qui coupe l'axe 0 dB pour la pulsation égale à K. Quant à sa pente, elle est multiple de -20 dB par décade selon le nombre d'intégrateurs.

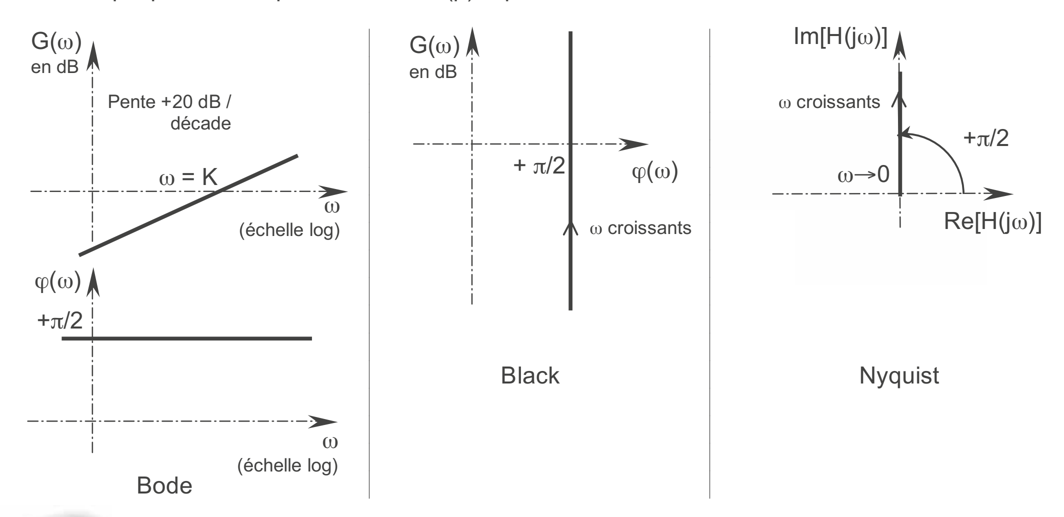
Par exemple pour un double intégrateur $H(p)=K/p^2$:



■ Pour un multiple dérivateur, le système déphase cette fois de $+\pi/2$ pour chaque dérivation : $+\pi/2$ pour le dérivateur, $+\pi$ pour le double dérivateur, etc.

Ceci définit aisément les diagrammes de Black et Nyquist, (en faisant attention à leur orientation) ainsi que la courbe de phase du diagramme de Bode.
Concernant la courbe de gain du diagramme de Bode, il s'agit toujours d'une droite qui coupe l'axe 0 dB pour la pulsation égale à K. Cette fois, la pente est positive, multiple de +20dB par décade selon le nombre de dérivateurs.

Par exemple pour un simple dérivateur H(p)=Kp :

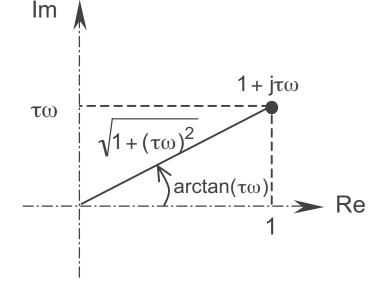


III-2 Système fondamental du premier ordre

III-2-1 Réponse fréquentielle

Le système fondamental du premier ordre a pour fonction de transfert, une fonction de la forme :
$H(p)=\dfrac{K}{1+\tau p}$, K et τ étant des nombres positifs.

Immédiatement : $H(j\omega)=\dfrac{K}{1+j\tau\omega}$



Alors le gain est obtenu par le rapport du gain du numérateur (K) sur celui du dénominateur ($\sqrt{1+(\tau\omega)^2}$) soit :

$$G=\left|H(j\omega)\right|=\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$$

Quant à l'argument, il est obtenu en écrivant la différence entre l'argument du numérateur (qui est nul) et celui du dénominateur ($\arctan(\tau\omega)$), soit :

$$\varphi=\mathrm{Arg}[H(j\omega)]=-\arctan(\tau\omega) \qquad \varphi\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$$

III-2-2 Diagramme de Bode

Le tracé des deux courbes du diagramme de Bode revient à tracer, selon une échelle logarithmique les courbes de gain en décibel 20logG(ω) et la courbe de phase φ(ω). Préalablement, il est d'usage de tracer un diagramme simplifié, assimilant les courbes, par secteurs, à des segments de droites et appelé ***diagramme asymptotique***.

■ Diagramme asymptotique

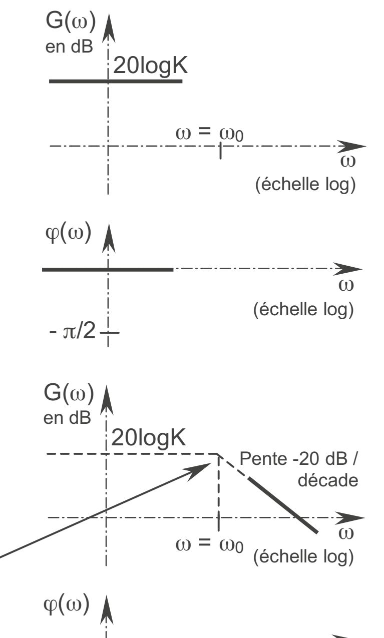
Le tracé du diagramme asymptotique revient à considérer deux cas, selon que $\tau\omega$ est très grand ou très petit devant 1, c'est-à-dire selon que la pulsation ω est très grande ou très petite devant la pulsation $1/\tau$.

Définition : $\omega_0 = \dfrac{1}{\tau}$ est appelée pulsation de cassure du système.

- Si $\tau\omega << 1$, soit $\omega << \omega_0$: $H(j\omega) = \dfrac{K}{1 + j\tau\omega} \approx K$

Soit $G = |H(j\omega)| \approx K$, donc $20\log G \approx 20\log K$
$\Rightarrow$ la courbe de gain est une droite horizontale à l'ordonnée 20logK.

Et $\varphi = \text{Arg}[H(j\omega)] \approx 0$
$\Rightarrow$ la courbe de phase est une droite horizontale à l'ordonnée 0 rad.

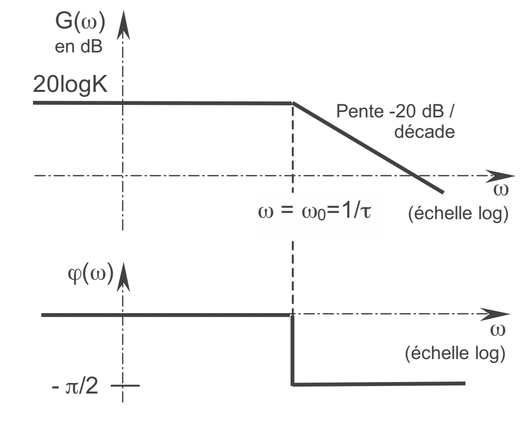


- Si $\tau\omega >> 1$, soit $\omega >> \omega_0$: $H(j\omega) = \dfrac{K}{1 + j\tau\omega} \approx \dfrac{K}{j\tau\omega}$

Soit $G = |H(j\omega)| \approx \dfrac{K}{\tau\omega}$
donc $20\log G \approx (20\log K - 20\log\tau) - 20\log\omega$
$\Rightarrow$ la courbe de gain est une droite de pente -20 dB/décade, passant par le point 20logK pour $\omega = 1/\tau = \omega_0$, pulsation de cassure. D'où son nom.

Et $\varphi = \text{Arg}[H(j\omega)] \approx \text{Arg}[\dfrac{K}{j\tau\omega}] \approx -\dfrac{\pi}{2}$
$\Rightarrow$ la courbe de phase est une droite horizontale à l'ordonnée $-\pi/2$ rad.

En rassemblant ces deux diagrammes approchés, on obtient le diagramme dit asymptotique qui n'est représentatif du diagramme réel que si la pulsation est suffisamment éloignée de la pulsation de cassure. En pratique, compte tenu de l'échelle logarithmique, cette approximation sera rapidement acceptable.



■ Diagramme réel

Il est intéressant de chercher les points réels obtenus au niveau de la cassure, soit pour $\omega = 1/\tau = \omega_0$:

- $G_0 = |H(j\omega_0)| = \dfrac{K}{\sqrt{1 + (\tau\omega_0)^2}} = \dfrac{K}{\sqrt{2}}$, soit en décibels : $20\log G_0 = 20\log K - 20\log\sqrt{2} \approx 20\log K - 3$

soit une ***chute de gain de 3 dB au niveau de la cassure***.

- $\varphi_0 = \text{Arg}[H(j\omega_0)] = -\arctan(1) = -\dfrac{\pi}{4}$, soit un ***déphasage de -45° au niveau de la cassure.***

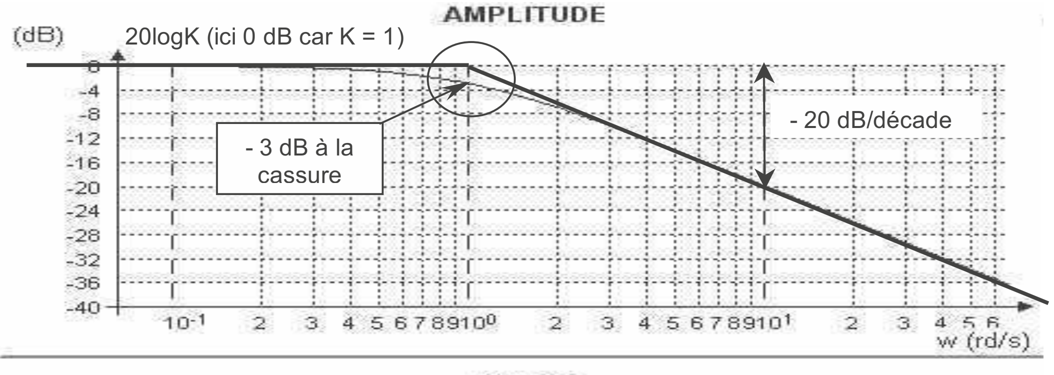
Le tracé ci-dessous est le diagramme de Bode dit « normalisé » du système fondamental du premier ordre. Cela signifie qu'il est tracé pour un gain K = 1 et une pulsation de cassure $\omega_0 = 1\,\text{rad/s}$:

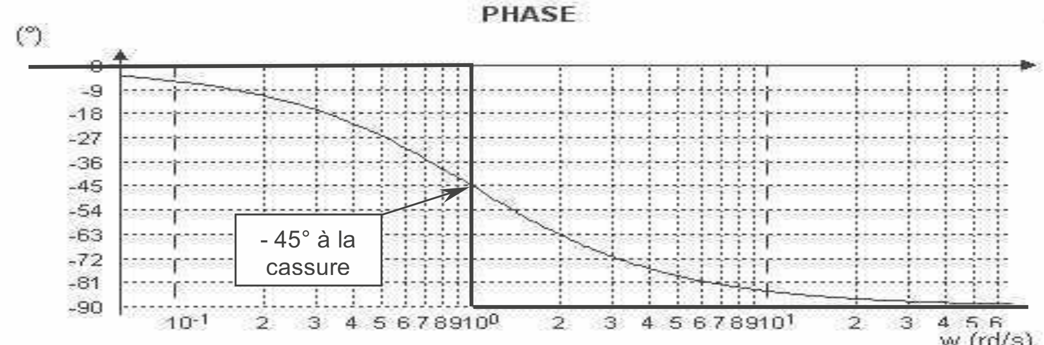
$$H(p) = \frac{1}{1+p}$$

En d'autres termes, cela revient à lire en ordonnée la variation par rapport au gain statique (gain pour $\omega \to 0$) et en abscisse, non pas la pulsation ω, mais la grandeur adimensionnelle ω/ω_0.

Il est important de savoir y lire les différentes caractéristiques qui ont été établies :

- le diagramme asymptotique,
- les valeurs à la cassure, soit une atténuation de 3 dB et un déphasage de -45°.





On observe que les décibels, étant une unité logarithmique, ont un effet « écrasant » sur la courbe de gain, qui est très proche de la courbe asymptotique. La différence maximale correspond aux - 3 dB calculés. Par contre, la courbe de phase est assez éloignée de la courbe asymptotique dans les deux décades qui entourent la cassure.

III-2-3 Diagramme de Black

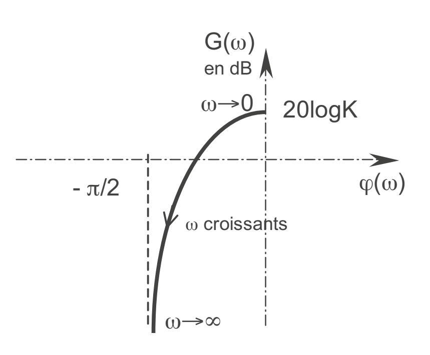
Le diagramme de Black se déduit du diagramme de Bode, point par point.

On y retrouve les valeurs extrêmes :

$\lim_{\omega \to 0} H(j\omega) = K$, nombre réel de gain 20logK en dB ;

$\lim_{\omega \to \infty} H(j\omega) = -0j$, imaginaire pur de gain nul (- ∞ en dB) et d'argument $-\pi/2$.

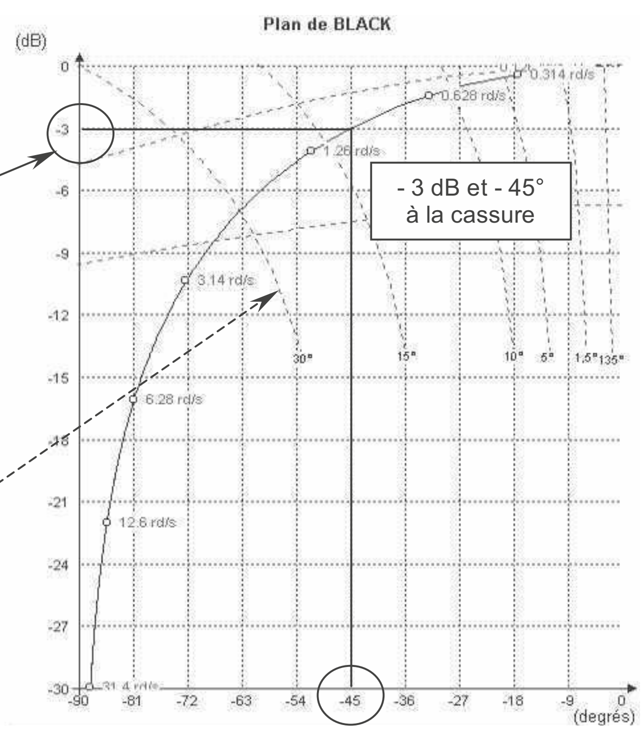
La cassure n'y présente aucune particularité.



Ci contre le tracé du diagramme de Black « normalisé » c'est-à-dire de : $H(p) = \dfrac{1}{1+p}$

On y vérifie l'atténuation de -3 dB, concomitante avec le déphasage de - 45° et correspondant au point de cassure défini sur le diagramme de Bode. Mais il est difficile d'y lire précisément la valeur de la pulsation, comme sur tout diagramme de Black. On y lit seulement que la pulsation de cassure est comprise entre 0,628 et 1,26 rad/s…

NB : Le second réseau qui apparaît en pointillés, tracé automatiquement par le logiciel ici utilisé, sera défini ultérieurement dans le cadre de la correction des systèmes asservis.



III-2-4 Diagramme de Nyquist

Pour déterminer le diagramme de Nyquist, il faut décomposer H(jω) en partie réelle et partie imaginaire, soit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+j\tau\omega} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(1+j\tau\omega)(1-j\tau\omega)} = \frac{K}{1+(\tau\omega)^2} - \frac{K\omega\tau}{1+(\tau\omega)^2}j = a+bj$$

avec :

$a = \dfrac{K}{1+(\tau\omega)^2}$, partie réelle, et $b = -\dfrac{K\omega\tau}{1+(\tau\omega)^2}$, partie imaginaire.

Alors si on calcule :

$$(a-\frac{K}{2})^2 + b^2 = \frac{K^2}{4}\left(\frac{2-1-(\tau\omega)^2}{1+(\tau\omega)^2}\right)^2 + \frac{K^2(\tau\omega)^2}{(1+(\tau\omega)^2)^2}$$

$$= \frac{K^2}{4}\frac{1-2(\tau\omega)^2+(\tau\omega)^4+4(\tau\omega)^2}{(1+(\tau\omega)^2)^2} = \frac{K^2}{4}\frac{(1+(\tau\omega)^2)^2}{(1+(\tau\omega)^2)^2} = \left(\frac{K}{2}\right)^2$$

cela montre que $H(j\omega) = a+bj$ est sur le cercle de centre (K/2, 0) et de rayon K/2.

Par ailleurs, $b = -\dfrac{K\omega\tau}{1+(\tau\omega)^2} < 0$, donc $H(j\omega) = a+bj$ décrit le demi-cercle sous l'axe des réels.

D'où le diagramme de Nyquist donné ci-contre, où il est intéressant de noter les trois points particuliers :

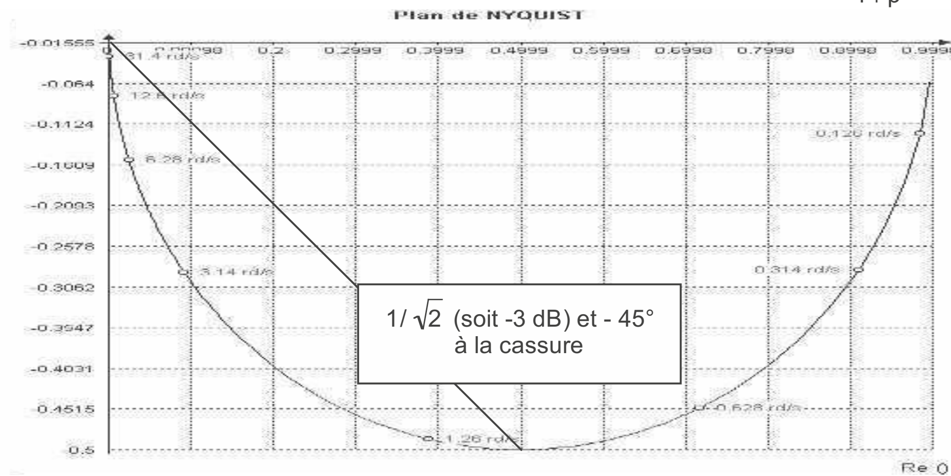
- $\lim_{\omega\to 0} H(j\omega) = K$
- $\lim_{\omega\to\infty} H(j\omega) = -0j$ (d'argument - π/2)
- la cassure obtenue pour $\omega = 1/\tau = \omega_0$

  soit $G = \dfrac{K}{\sqrt{2}}$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$

  mais ne présentant aucune particularité géométrique.

Im[H(jω)]
K/2
ω→∞
ω→0
Re[H(jω)]
- π/4
ω croissants
ω=1/τ

Ci-dessous, le tracé du diagramme de Nyquist « normalisé » c'est-à-dire de : $H(p) = \dfrac{1}{1+p}$.



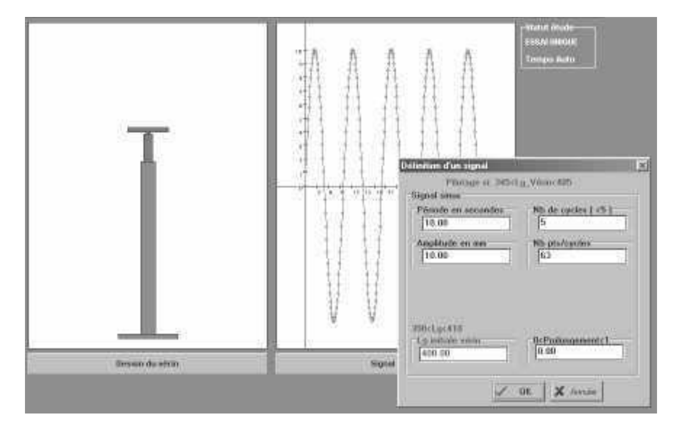
III-2-5 Influence du gain K sur les diagrammes

Les différents diagrammes réels qui ont été précédemment donnés, ont été des diagrammes « normalisés » c'est-à-dire construits avec un gain K = 1. Pour en déduire les diagrammes pour K quelconque, il suffit d'avoir à l'esprit qu'une variation de K se traduit par une multiplication par une constante et donc, d'après II-4 :

- sur le diagramme de Black, par une translation verticale de la courbe de 20logK ;
- sur le diagramme de Bode, par une translation verticale de la courbe de gain de 20logK et une invariance de la courbe de phase ;
- sur le diagramme de Nyquist par un effet homothétique de rapport K, plus difficile à construire.

III-2-6 Retour aux essais fréquentiels sur l'axe asservi du robot parallèle EX800

Les essais décrits aux paragraphes I-2 et I-3, ont permis de mesurer les caractéristiques du régime sinusoïdal permanent obtenu en sortie, pour différentes périodes (et donc pour différentes pulsations) de la commande de déplacement.



Les grandeurs utiles sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Pulsation	0,63 rad/s	1,26 rad/s	6,28 rad/s	12,56 rad/s
Gain G	0,95	0,85	0,33	0,18
Déphasage φ	- 0,3 rad	- 0,5 rad	- 1,2 rad	- 1,4 rad

Ces résultats peuvent être confrontés avec les prévisions issues de l'analyse fréquentielle de ce système, qui a été modélisé comme un système du premier ordre de fonction de transfert :

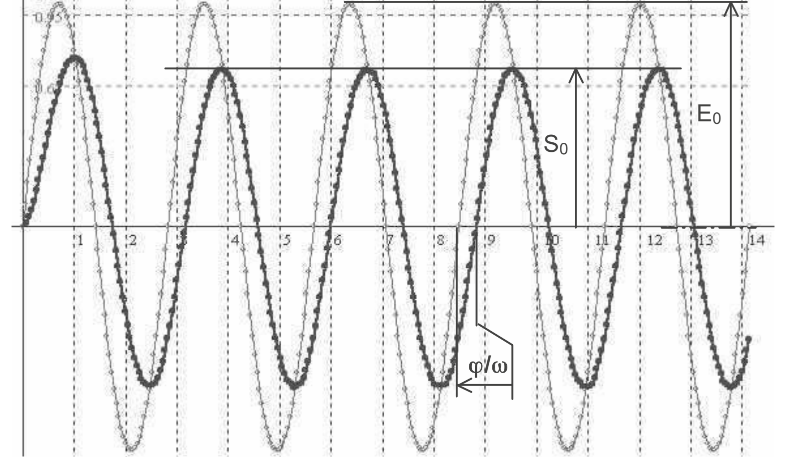
$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p} = \frac{1}{1+0,45p}$$

Alors, d'après ce qui précède : $G = |H(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$ et $\varphi = \text{Arg}[H(j\omega)] = -\arctan(\tau\omega)$

d'où le tableau aux résultats concordants :

Pulsation	0,63 rad/s	1,26 rad/s	6,28 rad/s	12,56 rad/s
$G = \lvert H(j\omega)\rvert = \dfrac{1}{\sqrt{1+(0,45\omega)^2}}$	0,96	0,87	0,33	0,17
Soit en dB, 20logG	*= - 0,3 dB*	*= - 1,2 dB*	*= - 9,6 dB*	*= - 15,4 dB*
$\varphi = \text{Arg}[H(j\omega)] = -\arctan(0,45\omega)$	- 0,3 rad *= - 15,8°*	- 0,5 rad *= - 29,5°*	- 1,2 rad *= - 70,5°*	- 1,4 rad *= - 80,0°*

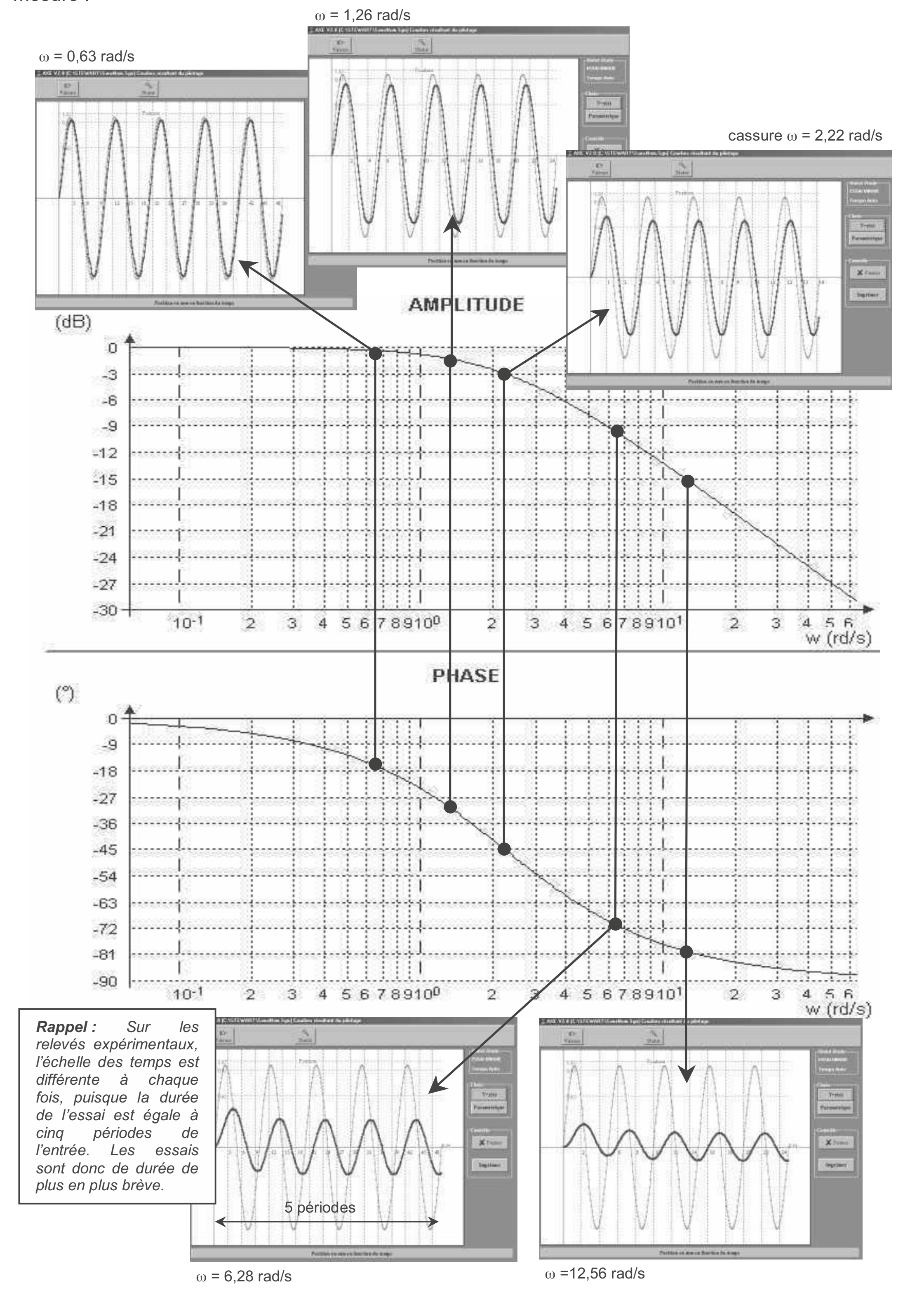
À ces résultats peut être ajouté un essai pour la pulsation de cassure, soit $\omega_0 = \dfrac{1}{0,45} = 2,22$ rad/s :



On mesure effectivement :

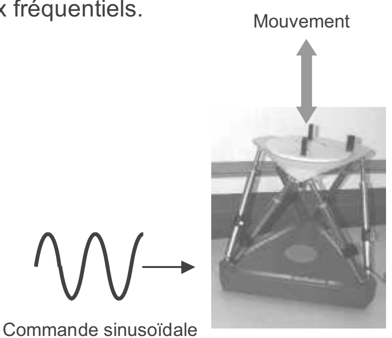
- un rapport $G = \dfrac{S_0}{E_0} \approx \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
  soit 20logG ≈ - 3dB
- un décalage temporel égal au 8ème de la période, ce qui correspond bien à un déphasage de - 45° :
  $$-\frac{\varphi}{\omega} = \frac{T}{8} = \frac{2\pi/\omega}{8}$$
  $$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

En résumé et à titre récapitulatif, on peut donc tracer le diagramme de Bode de l'axe asservi du robot parallèle EX800 dans les conditions de réglage des essais et y indiquer les points de mesure :



Le système se comporte comme un ***filtre*** vis-à-vis de signaux fréquentiels.

Si l'entrée évolue de façon suffisamment « lente », le système peut « suivre » et sa réponse n'est pratiquement pas altérée : partie gauche du diagramme de Bode. Inversement, de très rapides variations de l'entrée sont filtrées par le système : partie droite du diagramme. À titre d'ordre de grandeur, il faut se souvenir qu'une atténuation de 20 dB correspond déjà à une amplitude restituée de seulement 1/10ème de celle de l'entrée ! Ainsi, le robot parallèle sera inapte à répondre correctement à des lois de mouvements de fréquence trop élevée.



Nous reviendrons sur ces notions importantes liées au concept de filtre au paragraphe V de ce chapitre.

III-2-7 Forme générale $H(p)=K(1+\tau p)^{-\beta}$

Les considérations précédentes, concernant le système fondamental du premier ordre, permettent de construire les lieux de transfert de tous les systèmes possédant comme lui une seule constante de temps τ, c'est-à-dire dont la fonction de transfert est de la forme :

$H(p) = \dfrac{K}{(1+\tau p)^{\beta}}$, où β est un nombre entier.

En utilisant la propriété fondamentale concernant la réponse fréquentielle de systèmes en série établie au paragraphe II-4, il vient en effet immédiatement que :

- le gain étant égal au produit des gains : $G = |H(j\omega)| = \dfrac{K}{(\sqrt{1+(\tau\omega)^2}\,)^{\beta}}$

  soit, en décibels : $20\log G = 20\log K - 20\beta\log\sqrt{1+(\tau\omega)^2}$ dB

- la phase étant égale à la somme des phases : $\varphi = \text{Arg}[H(j\omega)] = -\beta\arctan(\tau\omega)$

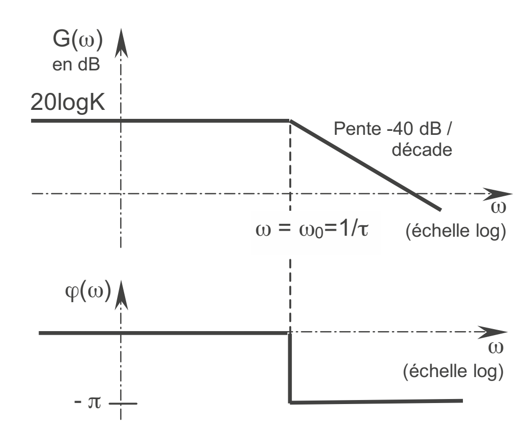
On peut alors tracer, à titre d'exemples, les deux diagrammes asymptotiques de Bode qui suivent.

■ **Exemple 1 :** $H(p) = \dfrac{K}{(1+\tau p)^2}$

Pour les fortes pulsations, la pente du diagramme asymptotique et le déphasage sont doublés, soit une pente de - 40 dB par décade, et un déphasage de - 180°.

De même pour une puissance trois, la pente est de - 60 dB par décade et le déphasage de - 270°, etc.

La chute de gain réelle au niveau de la cassure est, quant à elle, de 6 dB, 9 dB, etc.



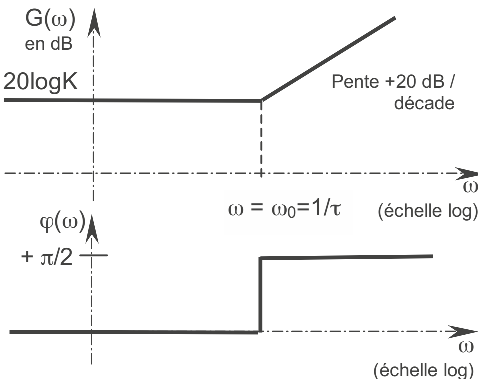
■ **Exemple 2 :** $H(p) = K(1+\tau p)$

D'une manière générale, on retiendra que deux systèmes de fonctions de transfert $H(p)=K(1+\tau p)^{\beta}$ et $H(p)=K(1+\tau p)^{-\beta}$ ont des diagrammes de Bode symétriques par rapport à la droite 20logK pour la courbe de gain et par rapport à la droite des abscisses pour la courbe de phase. Il suffit en effet de remplacer le coefficient β par - β dans les relations établies plus haut.

Ainsi, le diagramme de Bode du système de fonction de transfert $H(p) = K(1+\tau p)$ se déduit-il immédiatement par symétrie par rapport à celui du système fondamental du premier ordre, comme suit.

Pour les fortes pulsations, la pente du diagramme asymptotique et le déphasage sont cette fois positifs, soit une pente de + 20 dB par décade, et un déphasage de + 90°.

De même, pour une puissance deux (respectivement trois), la pente est de + 40 dB par décade (respectivement + 60 dB) et le déphasage de + 180° (respectivement + 270°), etc. À la cassure, on retrouve les 3 dB, 6 dB, 9 dB de différence par rapport au diagramme réel, mais cette fois au dessus des asymptotes.



III-3 Système fondamental du deuxième ordre

III-3-1 Réponse fréquentielle

Le système fondamental du premier ordre a pour fonction de transfert une fonction de la forme :

$H(p) = \dfrac{K}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2}$, où K, ω_0 et z sont des nombres positifs.

Immédiatement : $H(j\omega) = \dfrac{K}{(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})+j\dfrac{2z\omega}{\omega_0}}$ dont le gain est $G = |H(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})^2+(\dfrac{2z\omega}{\omega_0})^2}}$

et dont la phase $\varphi \in]-\pi; 0[$ peut être définie par morceaux selon :

$$\begin{cases} \omega < \omega_0 \Rightarrow \varphi = -\arctan\dfrac{2z\omega/\omega_0}{1-\omega^2/\omega_0^2}, \text{ en acceptant } -\dfrac{\pi}{2} \text{ par continuité en } \omega = \omega_0. \\ \omega > \omega_0 \Rightarrow \varphi = -\arctan\dfrac{2z\omega/\omega_0}{1-\omega^2/\omega_0^2} - \pi \quad \text{(arctan prenant ses valeurs dans }]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}[\text{)} \end{cases}$$

III-3-2 Diagramme de Bode

Comme pour le système du premier ordre, on s'intéresse tout d'abord au diagramme asymptotique, avant d'affiner l'étude par la détermination des courbes dites « réelles ».

■ Diagramme asymptotique

Le tracé du diagramme asymptotique revient à considérer deux cas, selon que la pulsation ω est très grande ou très petite devant la pulsation propre ω_0. Celle-ci est donc aussi appelée pulsation de cassure du système, dans ce contexte de l'analyse fréquentielle.

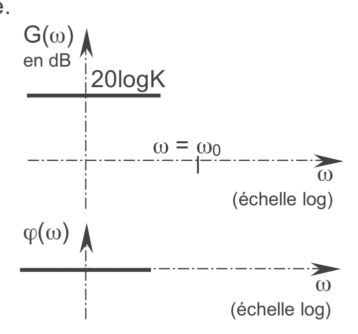
- Si $\omega << \omega_0$: $H(j\omega) \approx K$

Soit $G = |H(j\omega)| \approx K$, donc $20\log G \approx 20\log K$

$\Rightarrow$ la courbe de gain est une droite horizontale à l'ordonnée 20logK.

Et $\varphi = \mathrm{Arg}[H(j\omega)] \approx 0$

$\Rightarrow$ la courbe de phase est une droite horizontale à l'ordonnée 0 rad.



- Si $\omega >> \omega_0$: $H(j\omega) = -\dfrac{K\omega_0^2}{\omega^2}$

Soit $G = |H(j\omega)| \approx \dfrac{K\omega_0^2}{\omega^2}$

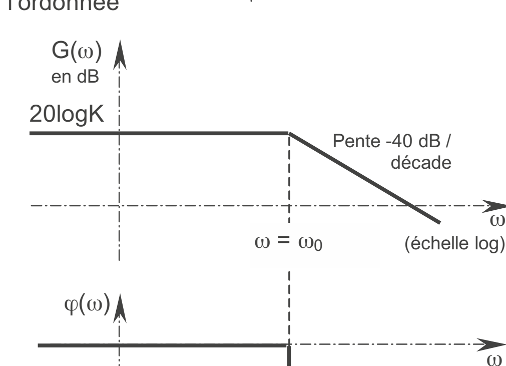
donc $20\log G \approx (20\log K + 40\log\omega_0) - 40\log\omega$

$\Rightarrow$ la courbe de gain est une droite de pente - 40dB/décade, passant par le point 20logK pour $\omega = \omega_0$, pulsation propre, appelée donc aussi pulsation de cassure.

Et $\varphi = \text{Arg}[H(j\omega)] \approx \text{Arg}[-\dfrac{K\omega_0^2}{\omega^2}] \approx -\pi$

$\Rightarrow$ la courbe de phase est une droite horizontale à l'ordonnée $-\pi$ rad.

En rassemblant ces deux diagrammes approchés, on obtient le diagramme asymptotique. Notons que ce diagramme ne dépend que de la pulsation propre, qui est aussi la pulsation de cassure, et non du facteur d'amortissement. Celui-ci intervient par contre fortement sur le diagramme réel de gain.



■ Diagramme réel, notion de résonance

- La phase présente ***un déphasage de - 90° au niveau de la cassure***, en effet :

  $\varphi_0 = \text{Arg}[H(j\omega_0)] = -\dfrac{\pi}{2}$

- L'évolution du gain $G = |H(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\dfrac{2z\omega}{\omega_0})^2}}$ montre qu'il peut ***présenter un maximum***.

Ce maximum étant obtenu lorsque le dénominateur est minimum, il suffit, pour simplifier les calculs, de chercher la valeur de la pulsation ω qui annule la dérivée de celui-ci, soit ω telle que :

$$\frac{d}{d\omega}\left[(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{2z\omega}{\omega_0})^2\right]^{1/2} = 0$$

ou encore : $-\dfrac{2\omega}{\omega_0^2}(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}) + (\dfrac{2z}{\omega_0})^2\omega = 0$ puisque $(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\dfrac{2z\omega}{\omega_0})^2 \neq 0$

Sachant que l'étude se fait pour $\omega \in]0, +\infty[$, donc $\omega \neq 0$, il vient : $-(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}) + 2z^2 = 0$

soit : $\omega^2 = \omega_0^2(1-2z^2)$

- Si $z \geq \sqrt{2}/2$, cette équation n'a pas de solution.
- Si $z < \sqrt{2}/2$, cette équation présente une solution $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2}$ pour laquelle le gain présente donc un maximum. Un tel phénomène est appelé ***résonance***. La pulsation ω_r, inférieure à ω_0, est appelée pulsation de résonance. Pour cette pulsation, le gain est :

  $G_r = |H(j\omega_r)| = \dfrac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}$. Cette valeur est ***supérieure à K*** car $2z\sqrt{1-z^2} < 1$ pour $z < \sqrt{2}/2$.

  Ce gain à la résonance, exprimé en décibels, vaut $[20\log K + 20\log(1/2z\sqrt{1-z^2})]$ dB.

  On notera que la résonance $20\log(1/2z\sqrt{1-z^2})$ dB ***ne dépend que de z***.

En résumé, on distingue donc deux types de systèmes du second ordre :

- Les systèmes non résonants pour lesquels le facteur d'amortissement est $z \geq \sqrt{2}/2$.
- Les systèmes résonants pour lesquels le facteur d'amortissement est $z < \sqrt{2}/2$.

Pour ces systèmes, le gain en réponse fréquentielle présente pour la pulsation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2}$, dite pulsation de résonance, un gain :

$G_r = |H(j\omega_r)| = \dfrac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}$ > K, soit une résonance de $20\log(1/2z\sqrt{1-z^2})$ dB.

Il est intéressant de rapprocher cette valeur $\sqrt{2}/2$, des deux valeurs particulières de z établies à partir des réponses temporelles. On rappelle en effet que :

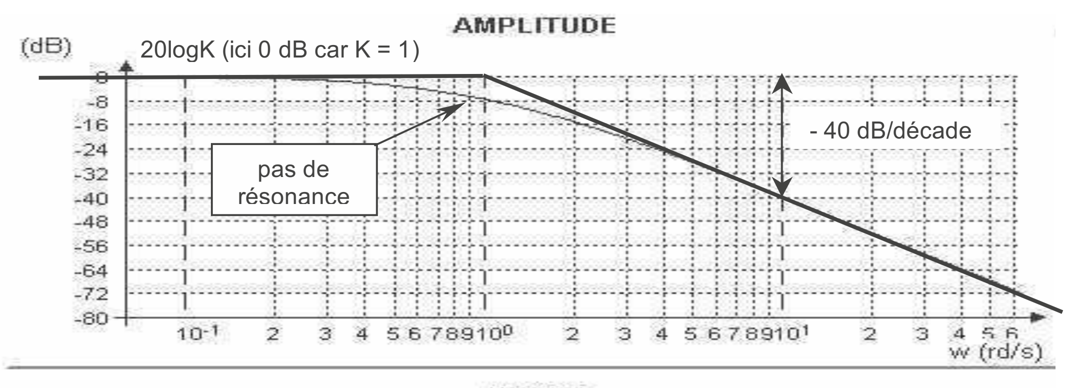
- Si $z \geq 1$, le système est ***amorti*** et ne présente pas d'oscillation en réponse aux signaux canoniques (impulsion, échelon, rampe) alors que si $z < 1$, le système est ***sous amorti*** et ses mêmes réponses présentent des oscillations d'autant plus importantes que z est faible.
- Pour la valeur $z \approx 0{,}69$, le système est le plus rapide. Pour les valeurs comprises entre 1 et 0,69, les oscillations sont peu perceptibles au-delà du premier dépassement : elles ne le sont que pour des facteurs d'amortissement plus petits que 0,69

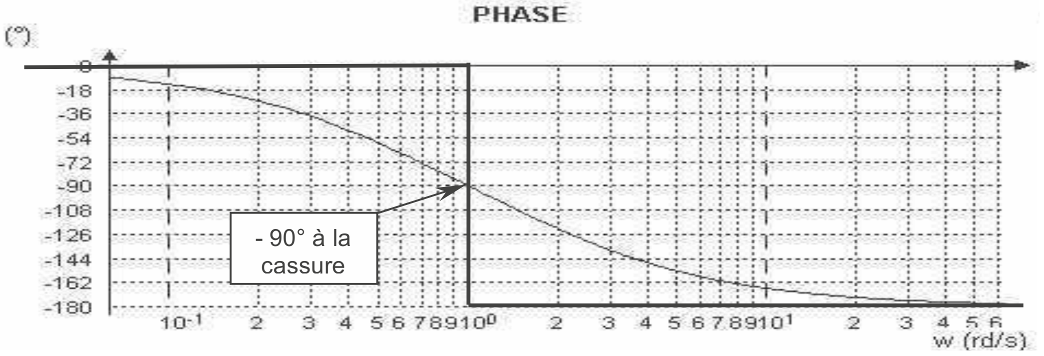
Il est intéressant d'observer que les valeurs 0,69 et $\sqrt{2}/2$ sont des valeurs ***très proches***, mais il ne faut pas confondre leurs origines. Toutefois, ***si on les assimile toutes deux à z ≈ 0,7*** on peut résumer les différentes situations dans le tableau ci-dessous :

Facteur d'amortissement	Réponse temporelle	Réponse fréquentielle
$0 < z < 0{,}7$	Fortement oscillante	Résonante
$0{,}7 < z < 1$	Faiblement oscillante	Non résonante
$z \geq 1$	Non oscillante	Non résonante

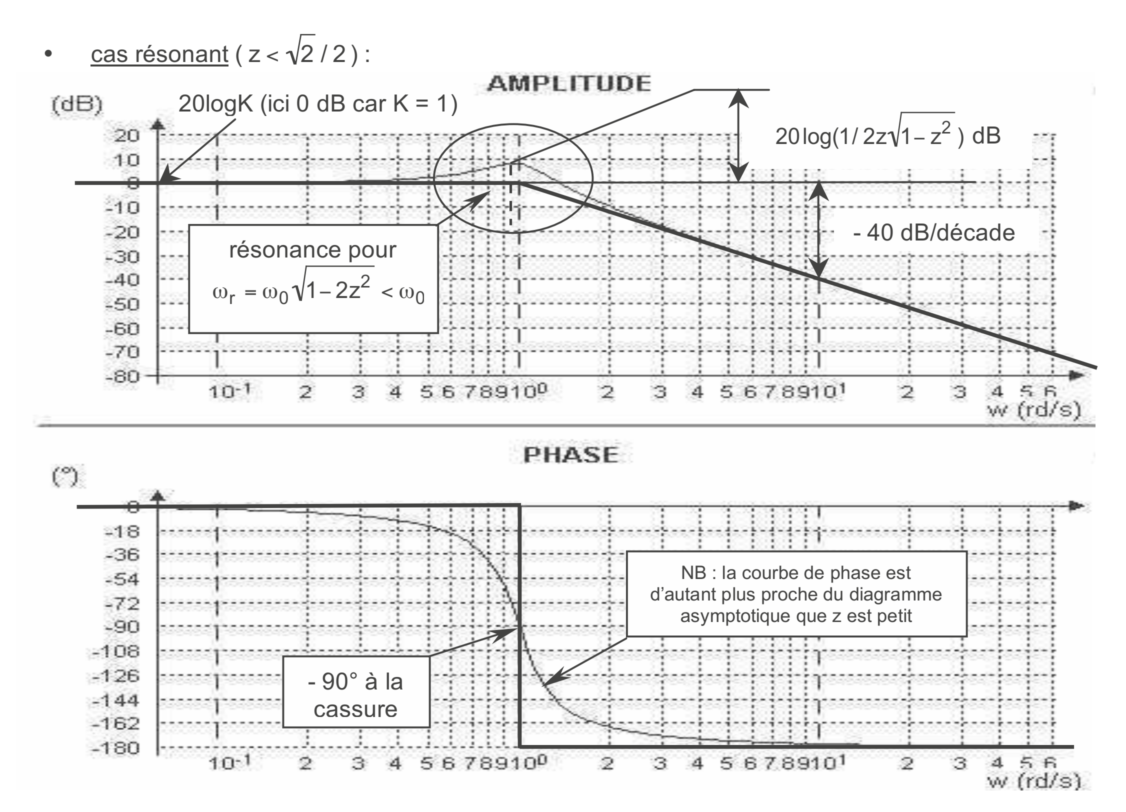
Ces considérations sont à observer sur les diagrammes normalisés (K = 1 et $\omega_0 = 1\,\text{rad/s}$) qui suivent :

- <u>cas non résonant</u> ($z \geq \sqrt{2}/2$) :





- cas résonant ($z < \sqrt{2}/2$) :



Plus z est petit, plus le phénomène de résonance est important et plus il a lieu pour une pulsation ω_r proche de la pulsation propre (ou de cassure) ω_0.

Lorsque z tend vers zéro, la résonance conduit à une amplitude des oscillations tendand vers l'infini pour $\omega = \omega_r = \omega_0$. Le système tend ainsi vers une ***instabilité***, caractérisée par z = 0. Dans ce cas extrême, le système n'est pas amorti et le tracé du diagramme de Bode, qui suppose la stabilité, n'a pas de sens.

■ Remarque 1 : valeur du gain au niveau de la cassure

$$G_0 = \left|H(j\omega_0)\right| = \frac{K}{\sqrt{(1-\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{2z\omega_0}{\omega_0})^2}} = \frac{K}{2z}\text{, soit en décibels : } 20\log G_0 = 20\log K - 20\log 2z$$

Cette expression est indépendante du caractère résonant ou non du système. On peut remarquer que :

- pour z = 0,5 : 20log2z = 0 donc $20\log G_0 = 20\log K$, la courbe réelle passe par le point de concours des asymptotes ;
- pour z < 0,5 : 20log2z <0 donc $20\log G_0 = 20\log K - 20\log 2z > 20\log K$, la courbe réelle passe au-dessus du point de concours des asymptotes ;
- pour z > 0,5 : inversement, la courbe réelle passe au-dessous du point de concours des asymptotes.

On vérifie alors que pour un système non résonant ($z \geq \sqrt{2}/2$), la courbe réelle passe toujours sous le point de concours des asymptotes. Par contre, dans le cas d'un système résonant, celle-ci peut passer dessous (résonance faible, z > 0,5) ou au-dessus (résonance forte z < 0,5). On peut aussi remarquer que pour la valeur limite z = 0,5, 20log2z ≈ 3. La courbe réelle passe donc à 3 dB sous le point de concours des asymptotes, comme pour le système du premier ordre, pour z = 0,5.

Ces remarques permettent d'enrichir le tableau précédent :

Facteur d'amortissement	Réponse temporelle	Réponse fréquentielle
0 < z < 0,5	Fortement oscillante	Fortement résonante
0,5 < z < 0,7	Fortement oscillante	Faiblement résonante
0,7 < z < 1	Faiblement oscillante	Non résonante
z ≥ 1	Non oscillante	Non résonante

Ainsi, par exemple, si z = 0,6, contrairement à la situation de la page précédente obtenue avec z = 0,2, la réponse est si faiblement résonante qu'il est difficile de s'en apercevoir sans un agrandissement conséquent autour de la pulsation de résonance :

K = 1

$\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$

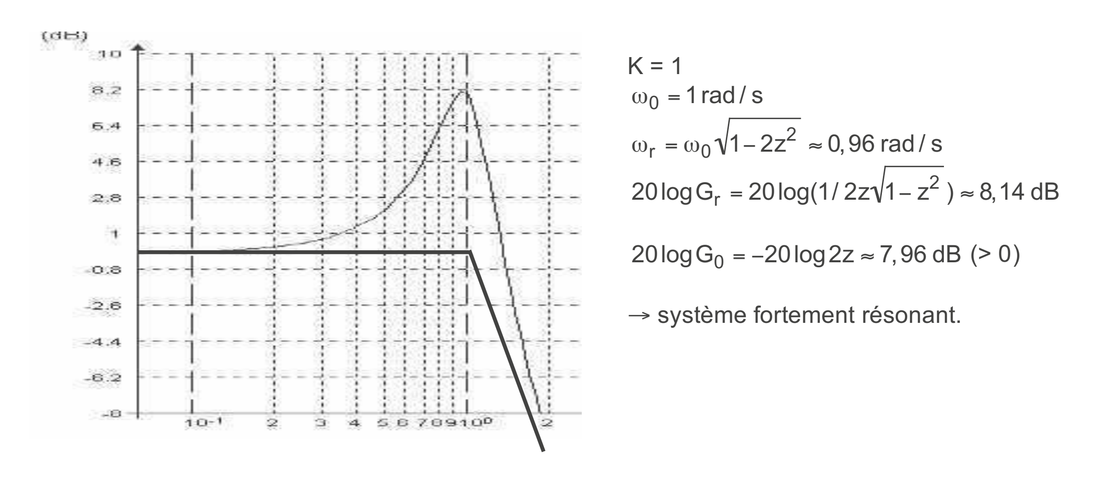
$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2} \approx 0{,}53 \text{ rad/s}$

$20\log G_r = 20\log(1/2z\sqrt{1-z^2}) \approx 0{,}35 \text{ dB}$

$20\log G_0 = -20\log 2z \approx -1{,}6 \text{ dB} \ (<0)$

→ système faiblement résonant.

Pour z = 0,2 (diagramme page précédente), on obtient l'agrandissement :



K = 1

$\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$

$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2} \approx 0{,}96 \text{ rad/s}$

$20\log G_r = 20\log(1/2z\sqrt{1-z^2}) \approx 8{,}14 \text{ dB}$

$20\log G_0 = -20\log 2z \approx 7{,}96 \text{ dB} \ (>0)$

→ système fortement résonant.

■ Remarque 2 : diagramme asymptotique amélioré dans le cas d'un système amorti

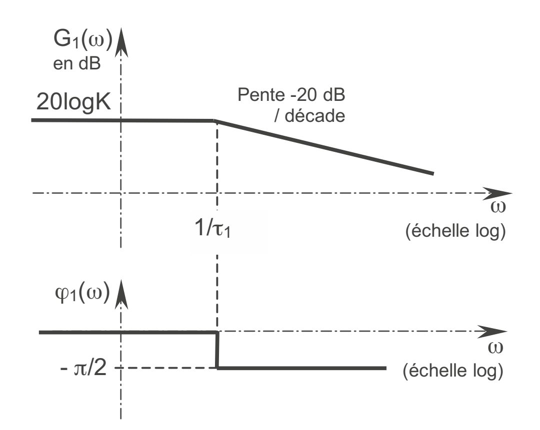
Dans le cas d'un ***système amorti*** ($z \geq 1$), le diagramme asymptotique peut être amélioré autour de la pulsation de cassure en considérant le système comme la ***mise en série*** de deux systèmes du premier ordre.

En effet, si $z \geq 1$ on sait que le système possède des pôles réels et peut donc être décrit à l'aide de deux constantes de temps :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{1}{\tau_1} = \omega_0(z - \sqrt{z^2-1}) \text{ et } \frac{1}{\tau_2} = \omega_0(z + \sqrt{z^2-1}). \\ \\ \text{soit } \frac{1}{\tau_1} < \omega_0 < \frac{1}{\tau_2}. \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant la propriété d'addition des diagrammes de Bode, le diagramme du système peut être construit comme la somme graphique des diagrammes des deux systèmes du premier ordre $H_1(p) = \frac{K}{1+\tau_1 p}$ et $H_2(p) = \frac{1}{1+\tau_2 p}$.

Cette considération permet les constructions asymptotiques suivantes:



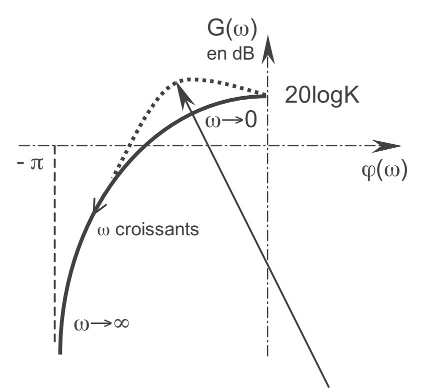
Pour $\omega < 1/\tau_2$, le diagramme du système total possède le comportement asymptotique du premier système du premier ordre. En effet, pour de telles pulsations, le diagramme asymptotique du second système du premier ordre présente un gain et une phase nuls. Il n'est donc pas perceptible.

Pour $\omega > 1/\tau_2$, le diagramme du second système du premier ordre se superpose de manière perceptible à celui du premier. Ceci diminue la pente de la courbe de gain de 20 dB supplémentaires par décade, soit au total - 40 dB/décade, et ajoute $-\pi/2$ rad supplémentaires de déphasage, soit au total $-\pi$ rad.

On retrouve, bien entendu, le comportement asymptotique déjà décrit d'un système du deuxième ordre aux faibles et hautes pulsations : respectivement (20logK, 0 rad) et (- 40 dB/décade, $-\pi$ rad).

NB : Dans le cas particulier où $z = 1$, soit $\tau_1 = \tau_2$, on retrouve le cas déjà exposé (cf.III-2-7) de la fonction $H(p) = K/(1+\tau p)^2$.

III-3-3 Diagramme de Black



Le diagramme de Black se déduit du diagramme de Bode, point par point.

On y retrouve les valeurs extrêmes :

$\lim_{\omega \to 0} H(j\omega) = K$, nombre réel de gain 20logK en dB ;

$\lim_{\omega \to \infty} H(j\omega) = -0$, nombre réel de gain nul (- ∞ en dB) et d'argument $-\pi$.

La cassure n'y présente aucune particularité.

Une éventuelle résonance ($z < \sqrt{2}/2$) s'observe par une courbe qui présente alors un extremum.

Ci-dessous et respectivement, le diagramme de Black normalisé (K = 1) d'un système non résonant et celui d'un système résonant :

Plan de BLACK

$z \geq \sqrt{2}/2$

Rappel : Le second réseau qui apparaît en pointillés, tracé automatiquement par le logiciel ici utilisé, sera défini ultérieurement dans le cadre de la correction des systèmes asservis.

$z < \sqrt{2}/2 \Rightarrow$ résonance

Lorsque le système est résonant, on lit clairement que le gain est une fonction croissante, puis décroissante de la pulsation. Le maximun de gain est obtenu pour la pulsation de résonance.

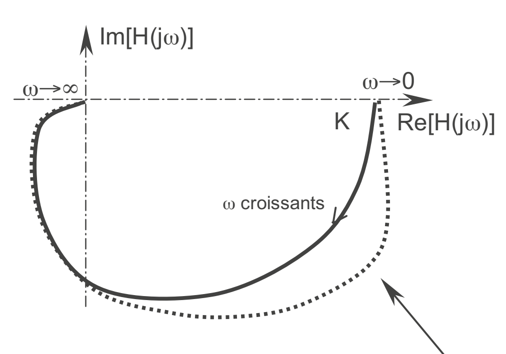
III-3-4 Diagramme de Nyquist

Contrairement au diagramme de Nyquist du système du premier ordre, qui se réduisait à un simple demi-cercle justifiant les développements conduits au paragraphe III-2-4, celui du système du deuxième ordre ne mérite pas de développements approfondis. On se contentera d'en comprendre l'allure ci-après à partir des diagrammes de Bode et de Black.

$$\lim_{\omega \to 0} H(j\omega) = K$$
$$\lim_{\omega \to \infty} H(j\omega) = -0$$

Ces deux limites définissent les points de départ et d'arrivée de la courbe. En particulier l'argument $-\pi$, pour les hautes pulsations montre que la courbe est tangente à l'axe des réels, par la gauche, au point 0.

La cassure n'y présente aucune particularité.



Une éventuelle résonance ($z < \sqrt{2}/2$) s'observe par une courbe qui présente alors un extremum de gain.

Ci-dessous et respectivement, le diagramme de Nyquist normalisé (K = 1) d'un système non résonant et celui d'un système résonant :

Plan de NYQUIST

$z \geq \sqrt{2}/2$

cercle unitaire

$z < \sqrt{2}/2 \Rightarrow$ résonance

Lorsque le système est résonant (cf. ci-contre), on observe bien que le gain est une fonction croissante, puis décroissante de la pulsation. Le maximun de gain est obtenu pour la pulsation de résonance.

De plus, on vérifie que, pour un système résonant, la courbe sort du cercle unitaire, ce qui correspond à une amplification pour les pulsations concernées. En revanche, pour un système non résonant (cf. ci-dessus) elle reste à l'intérieur de ce cercle : le système non résonant est atténuateur pour toutes les pulsations.

III-3-5 Forme générale $H(p)=K(1+2zp/\omega_0+(p/\omega_0)^2)^{-\beta}$

Ce paragraphe est à rapprocher du paragraphe III-2-7 concernant les systèmes d'ordre un, dont il reprend le même propos. On peut en effet déduire de la même manière les lieux de transfert de tous les systèmes dont la fonction de transfert est de la forme :

$H(p) = \dfrac{K}{(1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2)^\beta}$, où β est un nombre entier.

En utilisant la propriété fondamentale concernant la réponse fréquentielle de systèmes en série, il vient en effet immédiatement que :

- le gain étant égal au produit des gains : $G = |H(j\omega)| = \dfrac{K}{\left[\sqrt{(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})^2+(\dfrac{2z\omega}{\omega_0})^2}\right]^\beta}$

  soit, en décibels : $20\log G = 20\log K - 20\beta\log\sqrt{(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})^2+(\dfrac{2z\omega}{\omega_0})^2}$ dB

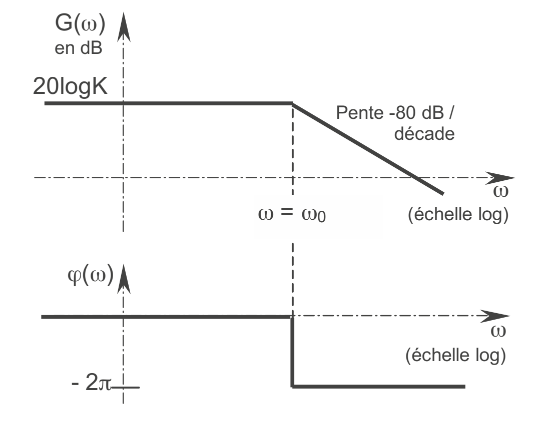
- la phase étant égale à la somme des phases : $\varphi = \mathrm{Arg}[H(j\omega)] = \beta\,\mathrm{Arg}\dfrac{K}{(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})+j\dfrac{2z\omega}{\omega_0}}$

On peut alors tracer, à titre d'exemples, les deux diagrammes asymptotiques de Bode qui suivent.

■ **Exemple 1 :** $H(p) = \dfrac{K}{(1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2)^2}$

Pour les fortes pulsations, la pente du diagramme asymptotique et le déphasage sont doublés, soit une pente de - 80 dB par décade, et un déphasage de - 360°.

De même pour une puissance trois, la pente est de - 120 dB par décade et le déphasage de - 540°, etc.



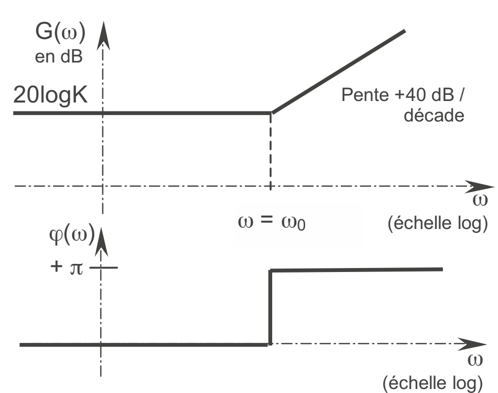
■ **Exemple 2 :** $H(p) = K(1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2)$

Considérons d'abord d'une manière générale une fonction du type $K(1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2)^\beta$.

Ses lieux de transfert s'obtiennent en remplaçant le coefficient β par - β dans les relations établies plus haut.

Ainsi, le diagramme de Bode du système proposé pour cet exemple se déduit-il immédiatement par symétrie du système fondamental du deuxième ordre, comme ci-contre.

De même pour une puissance deux, respectivement trois, la pente est de + 80 dB par décade, respectivement + 120 dB, et le déphasage de + 360°, respectivement + 540°, etc.



III-4 Approximation d'un système fondamental du 2ème ordre par un système fondamental du 1er ordre

Ce paragraphe est à rapprocher du paragraphe III-7 du chapitre précédent. Il y a été établi qu'un système fondamental du deuxième ordre amorti possédant un facteur d'amortissement *suffisamment grand*, pouvait être assimilé, après deux approximations successives, à un système du premier ordre selon :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}=\frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}\approx\frac{K}{(1+\tau_1 p)}\approx\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p}$$

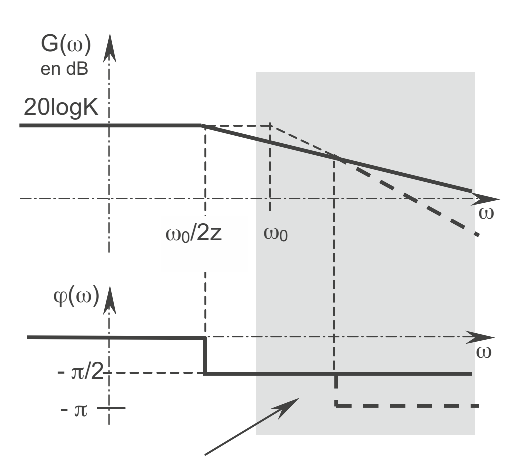
Bien évidemment, comme pour toute modélisation, la précision attendue autorisera ou non cette assimilation.

D'un point de vue fréquentiel, on écrira alors :

$$H(j\omega)=\frac{K}{(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2})+j\frac{2z}{\omega_0}\omega}\approx\frac{K}{1+j\frac{2z}{\omega_0}\omega}$$

Une telle approximation peut donc clairement être raisonnable pour $\omega << \omega_0$, c'est-à-dire pour une entrée sinusoïdale de pulsation très petite devant la pulsation de cassure.

Lorsque cette pulsation se rapproche de la pulsation de cassure, puis la dépasse, la courbe de gain s'éloigne de l'asymptote à - 20 dB/décade pour tendre vers l'asymptote à - 40 dB/décade. Conjointement, la courbe de phase atteint - 90° pour ensuite tendre vers - 180°. Le modèle simplifié du premier ordre n'est plus alors acceptable.



Pour des pulsations élevées, la modélisation simplifiée n'est pas acceptable.

III-5 Système à retard pur

III-5-1 Réponse fréquentielle

Le système à retard pur a pour fonction de transfert une fonction de la forme :
$H(p)=e^{-Rp}$.
où R est un nombre positif, homogène à un temps, appelé retard.

Immédiatement $H(j\omega)=e^{-jR\omega}=\cos(-R\omega)+j\sin(-R\omega)$.

Im
1
Re
-Rω

D'où : $G=|H(j\omega)|=1$ et $\varphi=\mathrm{Arg}[H(j\omega)]=-R\omega$

■ **Remarque**

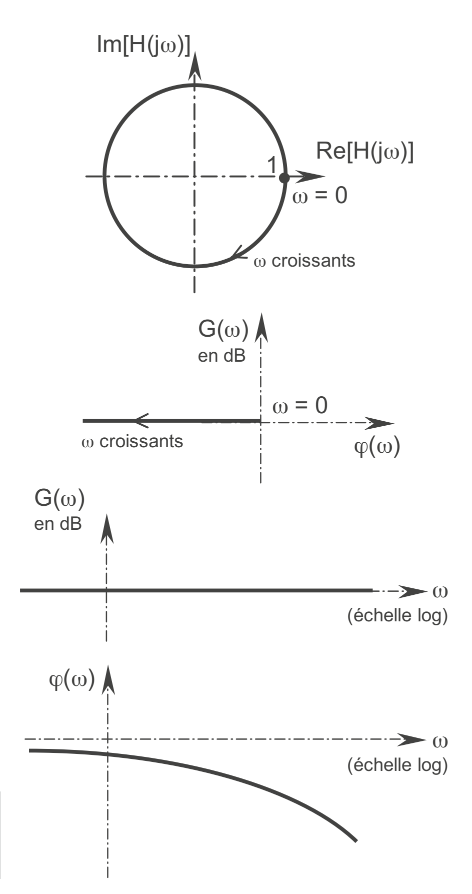
Ces résultats peuvent se retrouver directement, à partir de la définition du retard, sans utiliser la fonction de transfert :

$e(t)=E_0\sin\omega t$ → Système à retard R → $s(t)=E_0\sin[\omega(t-R)]=E_0\sin[\omega t-R\omega]$

Ceci met en évidence que le régime fréquentiel du système à retard pur est immédiatement atteint : il n'y a pas de régime transitoire.

III-5-2 Diagramme de Nyquist

Compte tenu de ce qui précède, le diagramme de Nyquist du système à retard pur est immédiat. Il s'agit du cercle unitaire, parcouru indéfiniment dans le sens horaire.



III-5-3 Diagramme de Black

Tout aussi immédiatement, et puisque :

- le gain est constant et unitaire, soit égal à 0 dB pour toute pulsation,
- la phase est une fonction décroissante de la pulsation,

le diagramme de Black est la demi-droite ci-contre, orientée de la droite vers la gauche.

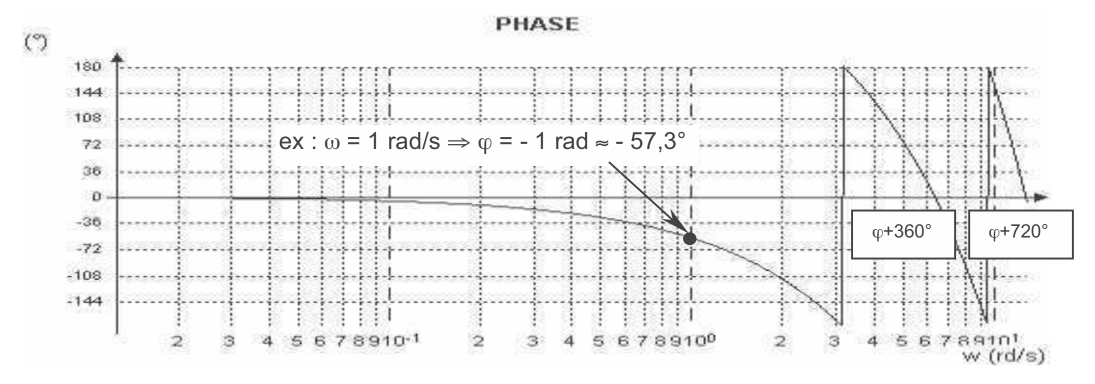
III-5-4 Diagramme de Bode

La courbe de gain est clairement une droite horizontale à 0 dB.

La courbe de phase est celle d'une fonction linéairement décroissante de la pulsation : $\varphi = -R\omega$. Compte tenu de l'échelle logarithmique utilisée sur l'axe des pulsations sur un diagramme de Bode, cette courbe a donc l'allure ci-contre.

On pourra retenir qu'un retard peut être ***source de déphasage important*** pour de fortes pulsations.

■ L'utilisation d'un logiciel de simulation permet d'obtenir la courbe de phase ci-dessous, par exemple pour un retard R = 1 s.



Il est à noter que pour ce tracé, les « oscillations » observées de la phase proviennent du fait que celle-ci est considérée dans l'intervalle [-180° ;+180°[par le logiciel utilisé.
Ainsi :

- pour $\varphi \in$]-180° ;-540°], le tracé est celui de φ + 360°,
- pour $\varphi \in$]-540° ;-900°], le tracé est celui de φ + 720°,
- etc.

Ceci amène naturellement au paragraphe qui suit.

III-6 Continuité de la phase

Les pages précédentes de ce chapitre ont permis d'établir :

- qu'un système linéaire stable, de fonction de transfert H(p), soumis à une entrée sinusoïdale de pulsation ω, fournit une sortie qui, en régime permanent, est également sinusoïdale, de même pulsation et déphasée d'un angle φ appelé phase ;
- que cette phase est une fonction de la pulsation ω, qui s'exprime à partir de la fonction de transfert H(p) selon $\varphi(\omega) = \text{Arg}\,[H(j\omega)]$.

Les systèmes linéaires stables rencontrés en automatique sont tels que ***la phase est une fonction continue de la pulsation qui peut prendre toute valeur dans l'intervalle]-∞ ;+∞[***.

Il convient de bien avoir à l'esprit cette continuité dans deux cas de figure :

■ **1er cas :** utilisation d'un logiciel de tracé.

Certains logiciels de simulation et de tracé considèrent la phase nécessairement dans un intervalle de longueur finie. Par exemple l'intervalle [-180° ;+180°[pour le tracé présenté précédemment pour le système à retard pur. Alors, lorsque sur la plage de pulsations considérée, la phase franchit les bornes de l'intervalle, il convient de savoir opérer les corrections (translations) nécessaires lors de l'interprétation du tracé.

■ **2ème cas :** calcul à l'aide d'une fonction circulaire inverse, classiquement la fonction arctangente.

Cette fonction, en mathématiques, prend ses valeurs dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[$.

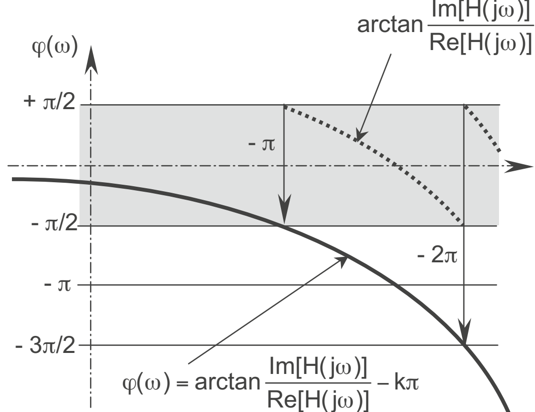
● Pour le système fondamental du premier ordre, la phase peut être calculée par : $\varphi = -\arctan(\tau\omega)$

Ceci ne pose aucun problème puisque pour un tel système $\varphi \in]-\frac{\pi}{2};0[$.

● Mais pour le système fondamental du deuxième ordre, $\varphi \in]-\pi;0[$. Cela nécessite un calcul avec une translation de $-\pi$ au-delà de la pulsation de cassure :

$$\begin{cases} \omega < \omega_0 \Rightarrow \varphi = -\arctan\dfrac{2z\omega/\omega_0}{1-\omega^2/\omega_0^2}, \text{ en acceptant } -\dfrac{\pi}{2} \text{ par continuité en } \omega = \omega_0. \\ \omega > \omega_0 \Rightarrow \varphi = -\arctan\dfrac{2z\omega/\omega_0}{1-\omega^2/\omega_0^2} - \pi \end{cases}$$

● D'une manière générale, il faut ainsi de suite :
- procéder à des translations multiples de π à chaque fois que le terme en arctangente atteint les bornes de son intervalle ;
- compléter par continuité les valeurs où l'arctangente n'est pas définie.



■ Les deux cas de figure présentés peuvent coexister pour un même système : nécessité d'une translation due aux caractéristiques d'un logiciel de tracé ou d'une translation due à la définition mathématique de l'arctangente. L'exemple qui suit illustre ces deux remarques.

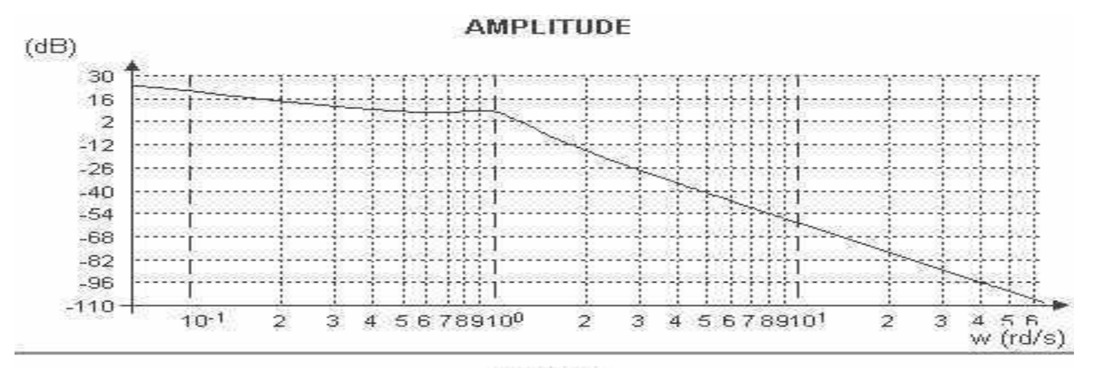
■ **Exemple**

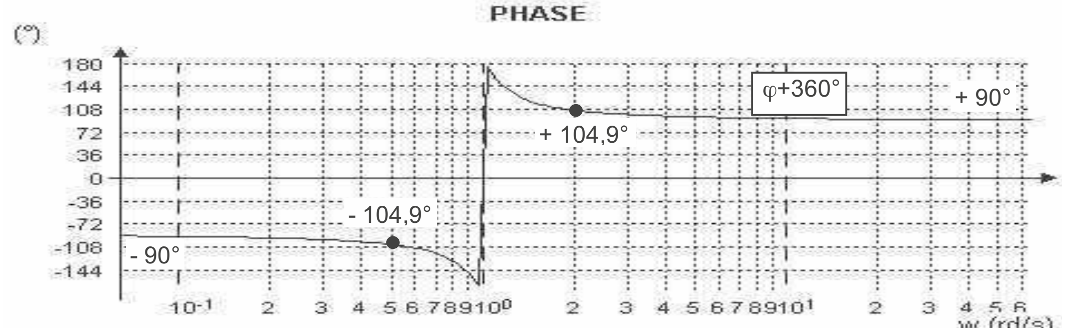
Considérons le système correspondant à l'intégration d'un système fondamental du deuxième ordre, de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{p[1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2]}$$ (intégrateur et système fondamental du 2[ème] ordre en série)

Il s'agit d'un système du troisième ordre, dont la phase pour les hautes pulsations dépassera - 180° pour tendre vers - 90 - 180 = - 270°. On rappelle en effet la propriété d'addition des phases établie au paragraphe III-4.

Par exemple pour K = 1, ω_0 = 1 rad/s et z = 0,2, une simulation sur logiciel permet d'obtenir :





● La discontinuité de la courbe de phase observée pour ω = 1 rad/s n'a bien entendu aucune signification, elle est uniquement due à l'intervalle de [-180° ;+180°[utilisé par le logiciel pour définir la phase. Au delà de cette valeur il faut donc retrancher 360° à la valeur lue. La phase ne tend donc pas vers + 90, mais bien vers 90 - 360 = - 270°.

● Par ailleurs, si on calcule par addition de l'intégrateur et du système du 2[ème] ordre :

$$-90° - \arctan \frac{2z\omega / \omega_0}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = -90° - \arctan \frac{0,4\omega}{1 - \omega^2}$$

il conviendra alors, pour les pulsations supérieures à 1 rad/s, de soustraire 180° à la valeur trouvée pour obtenir la phase :

	ω = 0,5 rad/s	**ω = 2 rad/s**
Valeur lue sur la courbe	- 104,9°	+104,9°
Calcul de $-90° - \arctan \frac{0,4\omega}{1-\omega^2}$	- 104,9°	-75,1°
Phase réelle	**φ = - 104,9°** = valeur lue = valeur calculée	**φ = - 255,1°** = valeur lue - 360° = valeur calculée - 180°

IV - MÉTHODOLOGIE DE TRACÉ DU DIAGRAMME DE BODE ASYMPTOTIQUE D'UN SYSTÈME QUELCONQUE

L'existence de logiciels de simulation et de tracé performants peut sembler rendre obsolètes les méthodes de tracé « manuels » de diagrammes asymptotiques sur papier semi-logarithmique. Elles s'avèrent néanmoins d'un apport précieux lorsqu'une estimation rapide est nécessaire, ou ne serait-ce que pour apporter une aide aux corrections par translation des tracés de phases, exposées précédemment.

L'idée générale qui guide le tracé est la décomposition de la fonction de transfert en un produit de fonctions de transfert dont les diagrammes de Bode asymptotiques sont connus, afin d'utiliser la propriété d'additivité exposée au paragraphe II-4.

IV-1 Exemple 1

Reprenons l'exemple précédent :

$$H(p) = \frac{K}{p[1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2]}$$

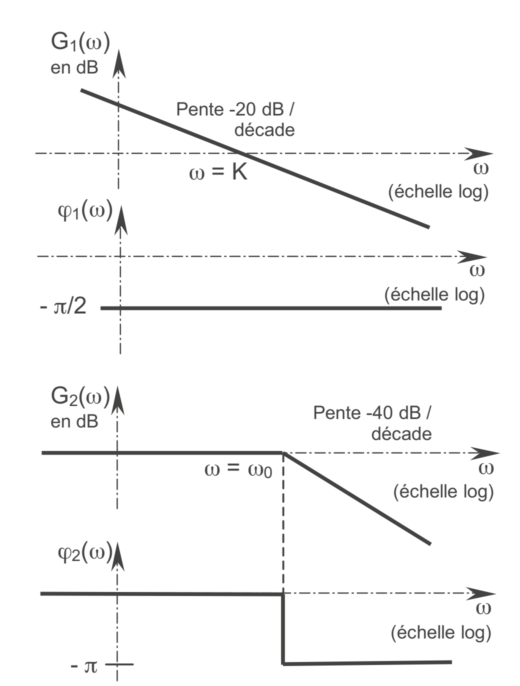
Cette fonction de transfert peut être décomposée selon :

$$H(p) = \frac{K}{p} \times \frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

c'est-à-dire comme le produit des deux fonctions suivantes $H_1(p)$ et $H_2(p)$, dont les diagrammes asymptotiques sont bien connus et rappelés ci-contre :

$$H_1(p) = \frac{K}{p}$$

$$H_2(p) = \frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$



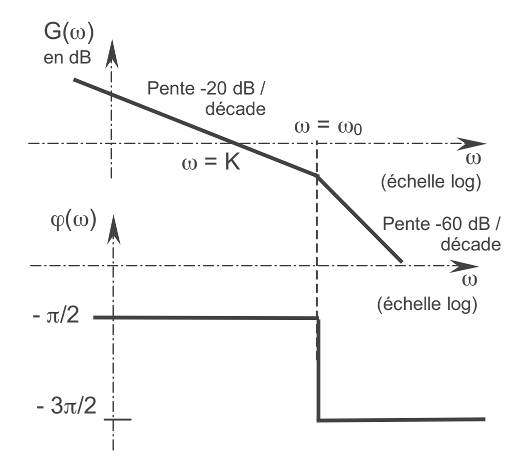
NB1 : On rappelle que, si $z > 1$, $H_2(p)$ peut être elle-même décomposée en le produit de deux fonctions du 1[er] ordre, ce qui permet d'affiner éventuellement son diagramme asymptotique.

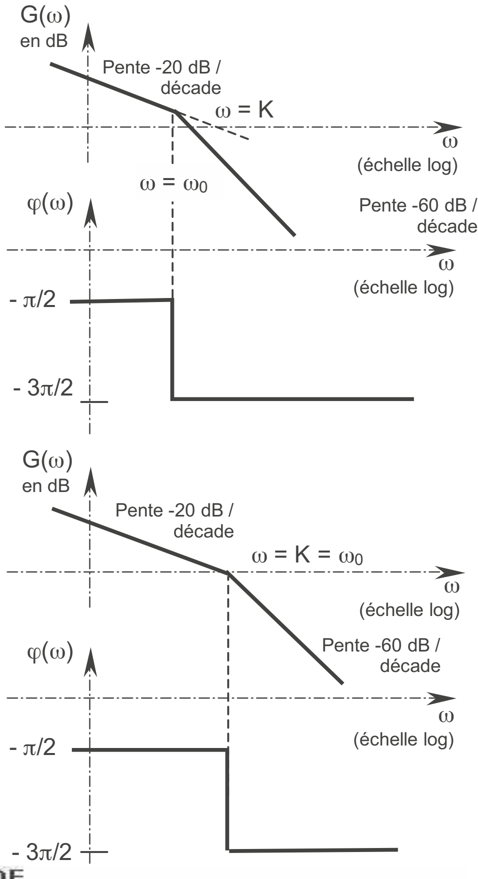
NB2 : La décomposition proposée n'est pas unique puisque le gain K peut être également considéré comme le numérateur du système du deuxième ordre et non de l'intégrateur. Ou encore être traité séparément, ce qui reviendrait alors à considérer H(p) comme le produit de trois fonctions. Cette décomposition est toutefois la plus pratique à mettre en œuvre (cf. IV-3).

D'un point de vue asymptotique, deux domaines de variation de la pulsation peuvent alors être distingués :

- Pour $\omega < \omega_0$, le diagramme du système total possède le comportement asymptotique de l'intégrateur. En effet, pour de telles pulsations, le diagramme asymptotique du système du deuxième ordre présente un gain et une phase nuls.
- Pour $\omega > \omega_0$, le diagramme asymptotique du système du deuxième ordre se superpose à celui de l'intégrateur. Ceci diminue la pente de la courbe de gain de 40 dB supplémentaires par décade, soit au total - 60 dB/décade, et ajoute $-\pi$ rad supplémentaires de déphasage, soit au total $-3\pi/2$ rad (on retrouve les -270° annoncés au paragraphe précédent).

Alors, selon les valeurs relatives de K et de ω_0, on trace les diagrammes asymptotique de H(p) :

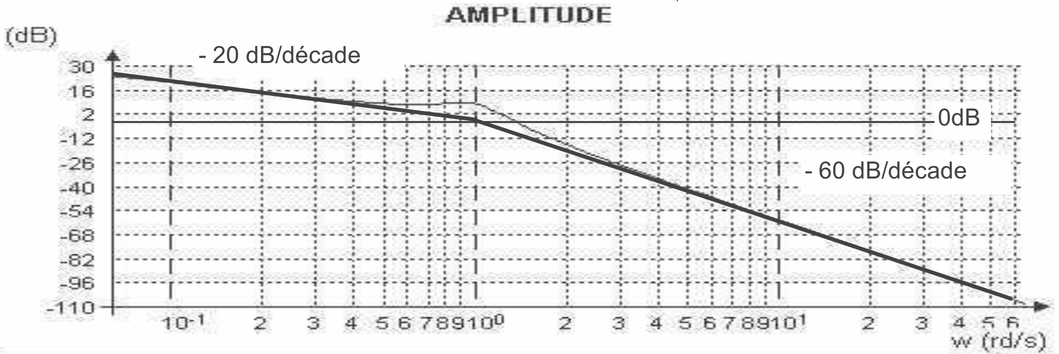


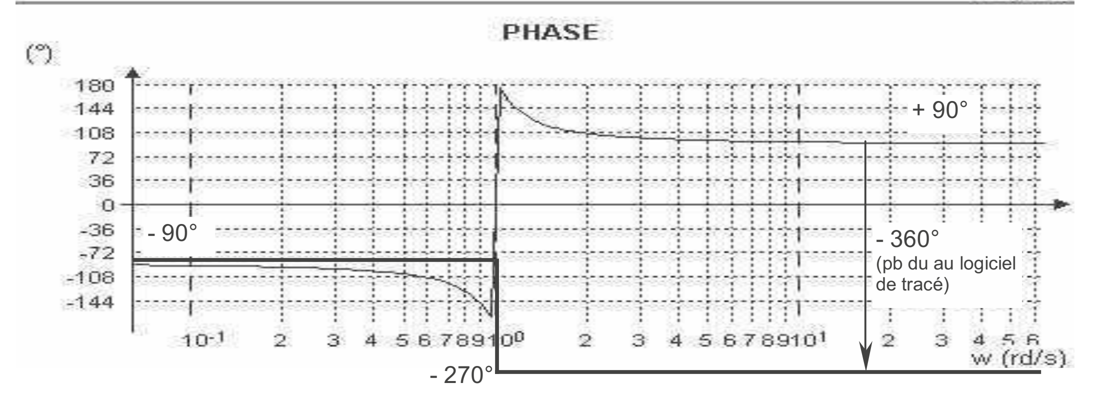


■ Cas particulier

Dans le cas particulier où $K = \omega_0$, le diagramme asymptotique est celui ci-contre.

On peut vérifier la cohérence, à la définition de la phase près, de ce diagramme asymptotique avec le diagramme réel précédemment obtenu pour les valeurs :
$K = 1$
$\omega_0 = 1$ rad/s
$z = 0,2$.





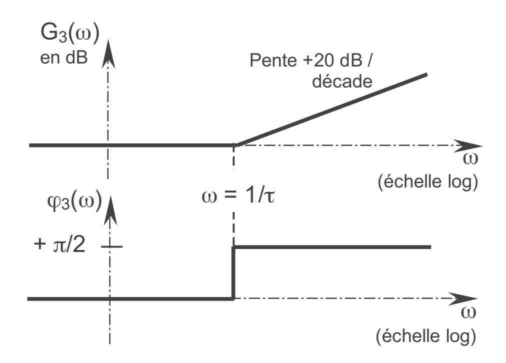
IV-2 Exemple 2

Considérons cette fois la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K(1+\tau p)}{p[1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2]}$$

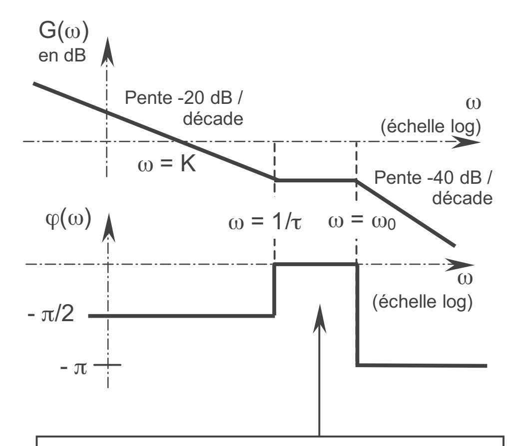
On reconnaît la fonction précédente augmentée d'un polynôme de degré 1 au numérateur.

Cette troisième fonction $H_3(p) = 1+\tau p$ possède le diagramme asymptotique rappelé ci-contre.



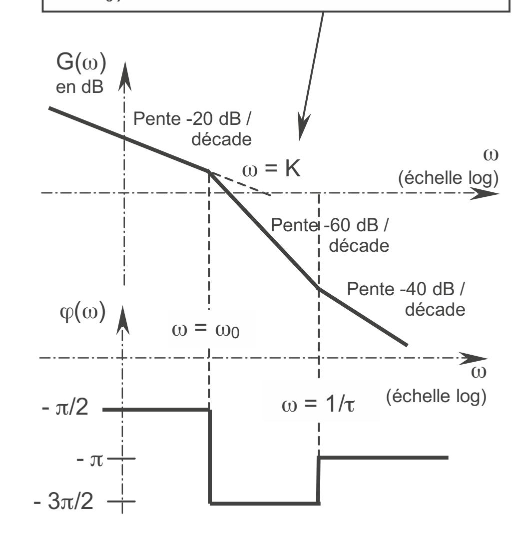
Si, par exemple, les valeurs relatives de K, ω_0, et $1/\tau$ sont telles que $K < 1/\tau < \omega_0$, d'un point de vue asymptotique les trois domaines de pulsations suivants peuvent être distingués, permettant la construction du diagramme total :

- Pour $\omega < 1/\tau$, le diagramme du système total possède le comportement asymptotique de l'intégrateur. En effet, pour de telles pulsations, les diagrammes asymptotiques du système du deuxième ordre et celui du numérateur possèdent un gain et une phase nuls et ne sont donc pas perceptibles.
- Pour $1/\tau < \omega < \omega_0$, le diagramme du numérateur se superpose de manière perceptible à celui de l'intégrateur, mais pas celui du système du deuxième ordre, toujours imperceptible. Ceci augmente la pente de la courbe de gain de 20 dB par décade, qui passe donc de - 20 dB/décade à 0 dB par décade, soit une portion horizontale. La phase, quant à elle, augmente de $\pi/2$ rad et devient donc nulle.
- Pour $\omega > \omega_0$, le diagramme du système du second ordre se superpose enfin de manière perceptible. Ceci diminue la pente de la courbe de gain de 40 dB par décade et ajoute - π rad au déphasage.



■ **Remarque importante :** le caractère asymptotique, en dehors des pulsations extrêmes, n'a de sens que si les différentes pulsations de cassure (ici $1/\tau$ et ω_0) sont suffisamment distinctes.

Une analyse identique permet d'obtenir d'autres diagrammes asymptotiques selon les valeurs relatives de K, ω_0, et $1/\tau$. Par exemple le diagramme ci-contre si $\omega_0 < K < 1/\tau$.



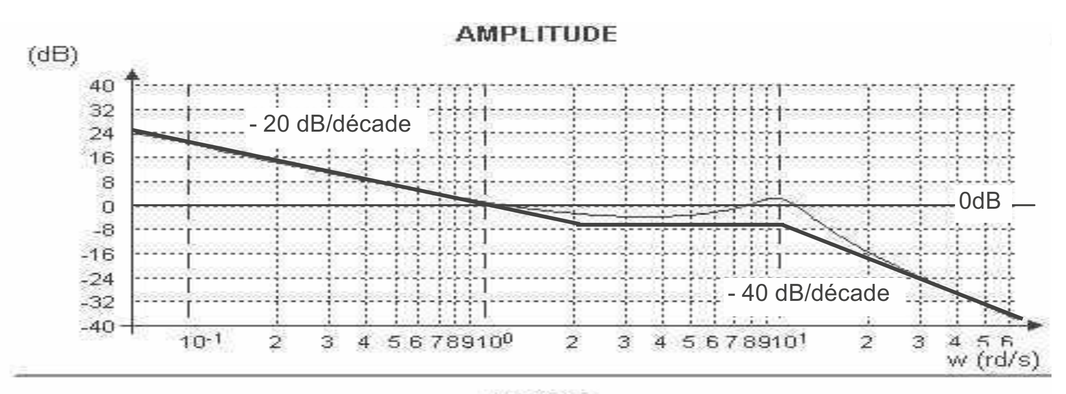
Si ces diagrammes diffèrent, bien entendu, les comportements aux pulsations extrêmes sont les mêmes :

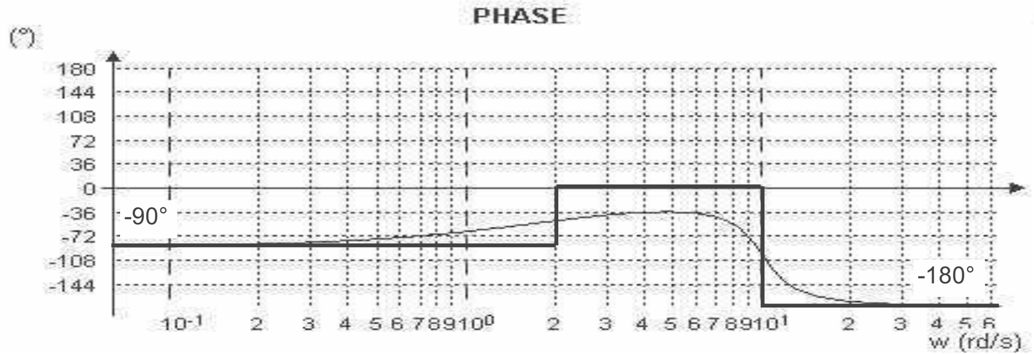
- 20 dB/décade et - $\pi/2$ si $\omega \to 0$
- 40 dB/décade et - π si $\omega \to \infty$

En effet, la première asymptote est définie par le caractère dominant de l'intégrateur, la dernière par la superposition de l'influence de tous les pôles et zéros de la fonction de transfert.

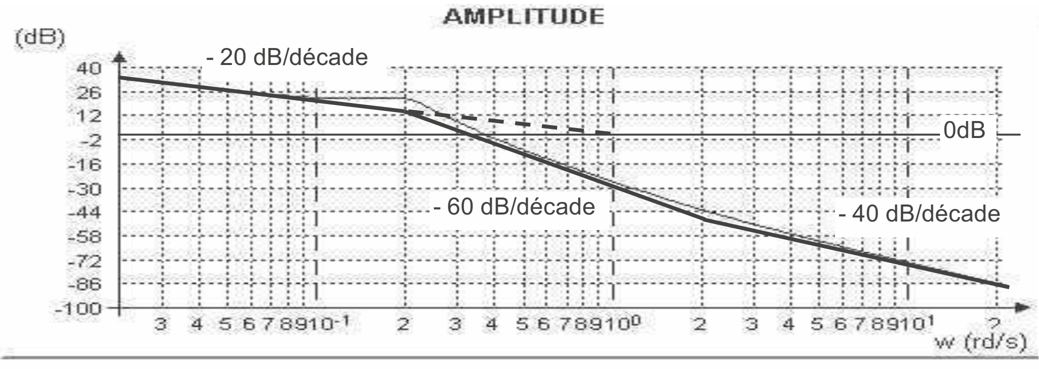
Ces diagrammes asymptotiques peuvent être superposés aux diagrammes réels ci dessous :

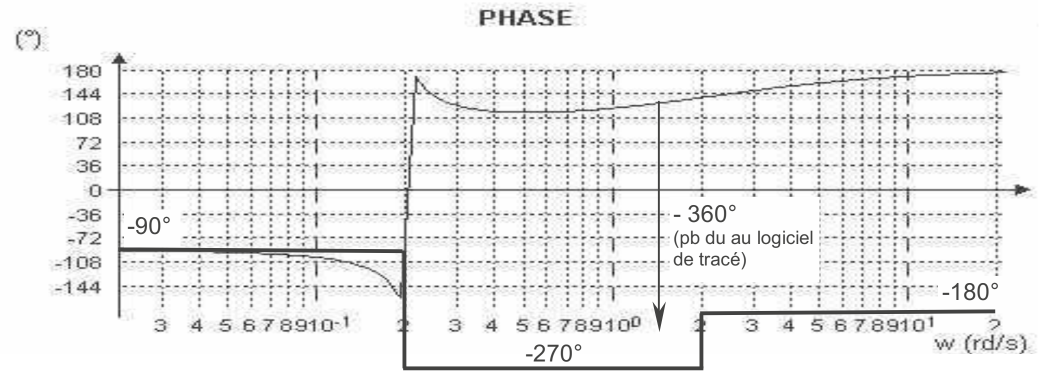
■ **1er cas : $K < 1/\tau < \omega_0$** (obtenu par exemple pour : $K = 1$; $\tau = 0{,}5$ s ; $\omega_0 = 10$ rad/s ; $z = 0{,}2$)





■ **2ème cas : $\omega_0 < K < 1/\tau$** (obtenu par exemple pour : $K = 1$; $\tau = 0{,}5$ s ; $\omega_0 = 0{,}2$ rad/s ; $z = 0{,}2$)





IV-3 Méthode générale dans le cas des systèmes à « zéros stables »

Voir chapitre 4, paragraphe VI-4.

■ Toute fonction de transfert d'un système linéaire stable peut être décrite à l'aide d'un produit de termes du premier et du deuxième ordre généralisés :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + ... + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n} = \frac{K}{p^\alpha} x \prod \frac{1 + a_i p}{1 + \tau_i p} x \prod \frac{1 + a_i p + b_i p^2}{1 + \frac{2z_i}{\omega_{0i}} p + \frac{1}{\omega_{0i}^2} p^2}$$

On se restreint ici au cas, de loin le plus courant, des systèmes dont les zéros sont tous à partie réelle strictement négative (improprement appelés « zéros stables »), c'est-à-dire dont les a_i sont des constantes positives. Le cas contraire est traité au paragraphe qui suit. On peut alors écrire de manière plus générale :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} x \prod (1 + \tau_i p)^{\beta_i} x \prod (1 + \frac{2z_i}{\omega_{0i}} p + \frac{1}{\omega_{0i}^2} p^2)^{\beta_i}$$

La classe α traduit la différence entre le nombre de pôles nuls et le nombre de zéros nuls.
Le signe de chaque β_i traduit la présence du terme correspondant, soit au numérateur, soit au dénominateur.

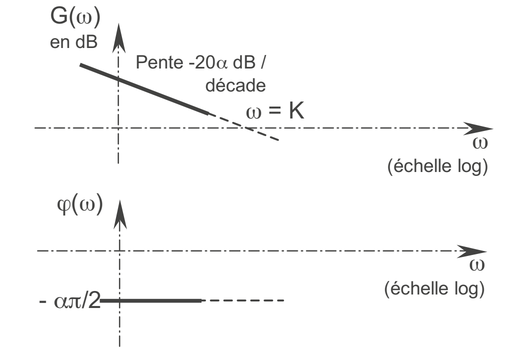
Les formes générales des diagrammes de Bode asymptotiques des termes des formes $(1 + \tau p)^\beta$ et $(1 + \frac{2z_i}{\omega_{0i}} p + \frac{1}{\omega_{0i}^2} p^2)^\beta$ ont été établies aux paragraphes III-2-7 et III-3-5 :

- leurs diagrammes asymptotiques de gain sont une droite à 0dB pour les pulsations inférieures à la pulsation de cassure $1/\tau$ ou ω_0, puis, au delà, une droite de pente 20β ou 40β dB par décade (positive ou négative selon que le terme est au numérateur ou au dénominateur);

- leurs diagrammes asymptotiques de phase sont une droite à 0 rad pour les pulsations inférieures à la pulsation de cassure $1/\tau$ ou ω_0, puis, au delà, une droite à $\beta\pi/2$ ou $\beta\pi$ rad (même précision concernant les signes).

■ La forme générale du diagramme de Bode du terme $\frac{K}{p^\alpha}$ a été établie au paragraphe III-1-5 :

- sa courbe de gain est une droite dont la pente est -20α dB par décade rencontrant l'axe 0 dB en $\omega = K$;
- sa courbe de phase est une droite horizontale au niveau $\varphi = -\alpha\pi/2$ rad.

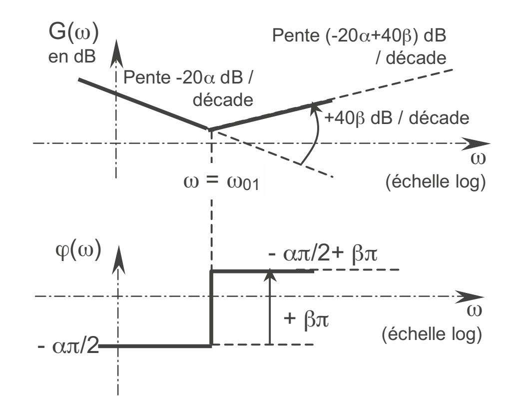


Si un tel terme existe, on le traitera en premier.

Aux basses pulsations, le système complet possède en effet ce comportement asymptotique, puisque pour ces pulsations suffisamment faibles les diagrammes asymptotiques des autres composantes de la fonction de transfert présentent un gain et une phase nuls et ne sont donc pas perceptibles.

■ Ensuite, après avoir classé par ordre croissant les différentes pulsations de cassure, les effets de chaque composante de la fonction de transfert se traduisent successivement, pour chacune à partir de sa propre pulsation de cassure, par :

- une augmentation (ou une diminution selon le signe du β correspondant) de la pente de la courbe de gain de 20β ou 40β dB par décade ;
- une augmentation (ou de même une diminution) de la courbe de phase de $\beta\pi/2$ ou $\beta\pi$ rad.



Par exemple ci-contre, si la plus petite pulsation de cassure ω_{01} provient d'un terme d'ordre 2 à la puissance β au numérateur.

Et ainsi de suite pour chacun des termes.



■ Lorsque tous les termes ont été pris en compte, le comportement asymptotique du système aux fortes pulsations se trouve finalement décrit par :

- une courbe de gain qui est une droite de pente – 20 dB/décade multipliée par la différence de degrés entre le dénominateur et le numérateur de la fonction de transfert ;
- une courbe de phase qui est une droite au niveau $-\pi/2$ rad multiplié par cette même différence de degrés.

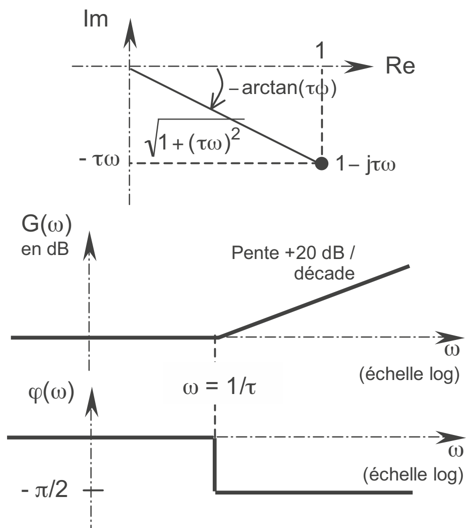
Par exemple pour le système de fonction de transfert de l'exemple 2 $H(p) = \dfrac{K(1+\tau p)}{p[1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2]}$:

le dénominateur est de degré 3 (ordre du système)
le numérateur est de degré 1
ce qui fait une différence de 2 conduisant à - 40 dB/ décade et $-\pi$ rad aux fortes pulsations, comme on peut le vérifier sur le diagramme asymptotique qui a été construit (cf. IV-2).

IV-4 Cas particulier des systèmes à « zéros instables » (ou à réponse inverse)

Dans les développements qui précèdent, la courbe de phase peut se déduire systématiquement de la courbe de gain, selon la propriété qu'à tout tronçon de droite de gain de pente 20β (ou 40β) décibels par décade est associée une phase à $\beta\pi/2$ (respectivement $\beta\pi$) radians.

Cette propriété est due à la restriction qui a été faite aux systèmes dont toutes les constantes a_i des fonctions élémentaires de la décomposition sont positives. ***Elle n'est pas vraie dans le cas contraire***.



Considérons à cet effet, et à titre d'exemple, un terme de la forme $(1 - \tau p)$, avec $\tau > 0$. Son zéro est $1/\tau$, réel positif. Zéro improprement qualifié d'« instable ».

Son gain est : $G(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{1+(\tau\omega)^2}$
soit le même que celui de $1 + \tau p$.

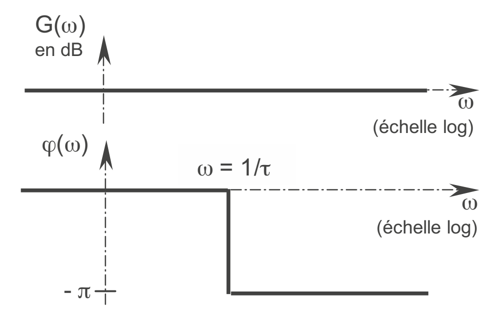
Son argument est : $\varphi = \mathrm{Arg}[H(j\omega)] = -\arctan(\tau\omega)$,
soit l'opposé de celui de $1 + \tau p$.

Son diagramme de Bode asymptotique est alors le diagramme ci-contre : à la droite de gain de pente + 20 décibels par décade est associée une phase à $-\pi/2$ radians.

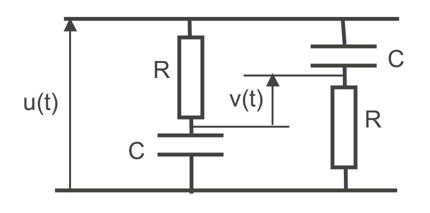
On peut alors construire un terme de gain 0 dB pour toutes les pulsations, mais pour autant déphaseur :

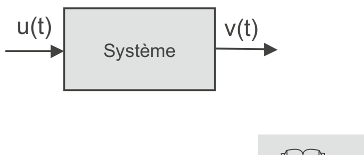
$$\frac{1-\tau p}{1+\tau p} = \frac{1}{1+\tau p} \times (1-\tau p)$$

Les gains des deux termes sont en effet opposés et s'annulent donc deux à deux, alors que les déphasages, égaux, s'ajoutent.



À titre d'exemple, on pourra vérifier que le circuit électrique suivant, de signal d'entrée u(t) et de signal de sortie v(t), présente une telle fonction de transfert, avec τ = RC. Ce circuit déphase une tension sinusoïdale (entre 0 et 180° selon sa pulsation) sans en modifier l'amplitude.



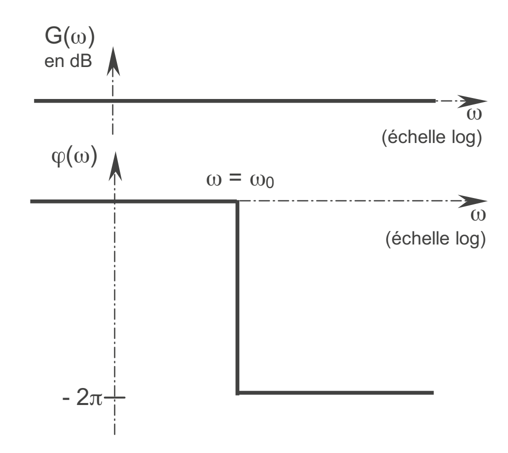


Cours d'électricité

Il en va de même pour un terme du deuxième ordre de la forme :

$$\frac{1-\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

dont le diagramme asymptotique de Bode s'obtient de la même manière et est donné ci-contre.



IV-5 Notion de déphasage minimal

D'après ce qui précède, il existe une infinité de systèmes linéaires qui possèdent la même courbe de gain. Tous ces systèmes ne diffèrent les uns des autres que par la présence, dans leurs fonctions de transferts, de termes multiplicatifs tels que :

$$\frac{1-\tau p}{1+\tau p}$$

$$\frac{1-\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Cette propriété est appelée ***propriété de Bode***.

Ces termes ont pour effet d'augmenter le déphasage par rapport au système qui n'en possède pas. Celui-ci est qualifié de ***système à déphasage minimal***. Tous les autres sont par opposition ***à déphasage non-minimal***.

On rappelle que la présence de « zéros instables » dans les systèmes à déphasage non-minimal procure des comportements temporels en réponse inverse, qui rend leur commande complexe, sortant du cadre de cet ouvrage.

Voir chapitre 4, paragraphe VI-3.

IV-6 Influence d'un retard

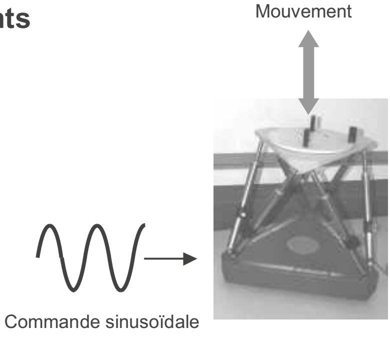
Si une non linéarité de type retard vient s'ajouter à une fonction de transfert linéaire, cela se traduit sur le diagramme de Bode par (voir III-5) :

- aucun effet sur la courbe de gain ;
- une augmentation du déphasage proportionnellement à la pulsation, qui peut donc conduire à un très fort déphasage aux hautes pulsations.

De ce fait, la propriété de Bode, restreinte aux systèmes linéaires, peut être enrichie de l'éventualité de la présence de termes non-linéaires de type retard, conservant le gain mais augmentant le déphasage.

V - COMPORTEMENT DE FILTRE

V-1 Filtres passe-bas et autres comportements



Dans leur grande majorité, les systèmes linéaires rencontrés en automatique et particulièrement les systèmes mécaniques, présentent un comportement fréquentiel de ***filtre*** qualifié de ***passe-bas***, tel qu'il a déjà été décrit pour l'axe asservi du robot parallèle EX800.

Si la pulsation de l'entrée est faible, le système peut suivre la consigne et sa réponse n'est pratiquement pas altérée : rapport d'amplitude quasiment défini par le gain statique et déphasage quasi nul.

En revanche, si les variations de l'entrée sont trop rapides, le système ne peut les suivre et sa réponse se traduit par une forte atténuation d'amplitude, associée à un déphasage important. Un tel système est donc fortement atténuateur aux pulsations élevées, d'autant plus fortement que la différence entre son ordre et le degré du numérateur de sa fonction de transfert est importante.

Lorsque l'ordre du système est supérieur à un, il peut par ailleurs exister, pour certaines pulsations, un phénomène de résonance tel qu'introduit précédemment pour le système fondamental du deuxième ordre.

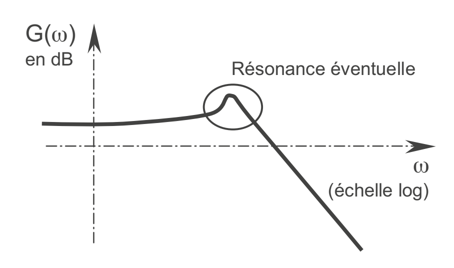
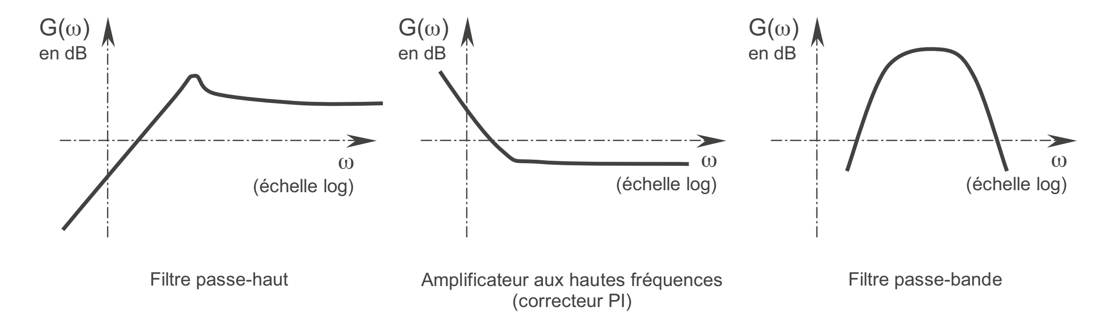


Diagramme de Bode de gain d'un système au comportement de filtre passe-bas

Ce comportement général de filtre passe-bas ne doit pas occulter l'existence de comportements différents, par exemple des systèmes qui sont :

- atténuateurs aux basses fréquences (filtres passe-haut),
- amplificateurs aux basses fréquences ou aux hautes fréquences,
- mixtes (filtre passe-bande, filtre coupe-bande ou rejecteur),
- etc,

dont on trouvera ci-après quelques illustrations sous forme de diagrammes de Bode de gain :



Filtre passe-haut

Amplificateur aux hautes fréquences (correcteur PI)

Filtre passe-bande

De tels systèmes se rencontrent plus particulièrement en électronique et dans la conception des correcteurs en automatique, comme le montrera le prochain chapitre.

V-2 Notion de bande passante

Devant la grande variété de comportements possibles, il est impossible de définir un critère universel de caractérisation d'un système linéaire en tant que filtre. Toutefois, la notion de bande passante est très répandue. Celle-ci se définit comme le domaine de pulsations, ou de fréquences selon le contexte, dans lequel l'atténuation du signal d'entrée est inférieure à une certaine valeur de référence. Ce domaine n'est pas forcément connexe : la bande passante peut être constituée de plusieurs intervalles distincts.

Par exemple on peut définir ***la bande passante à 0 dB***. Il s'agit alors du domaine de pulsations pour lequel la sortie est amplifiée par rapport à l'entrée. Les pulsations qui limitent ce domaine sont appelées ***pulsations de coupure***. Ce sont toutes les pulsations pour lesquelles le gain vaut 0 dB.

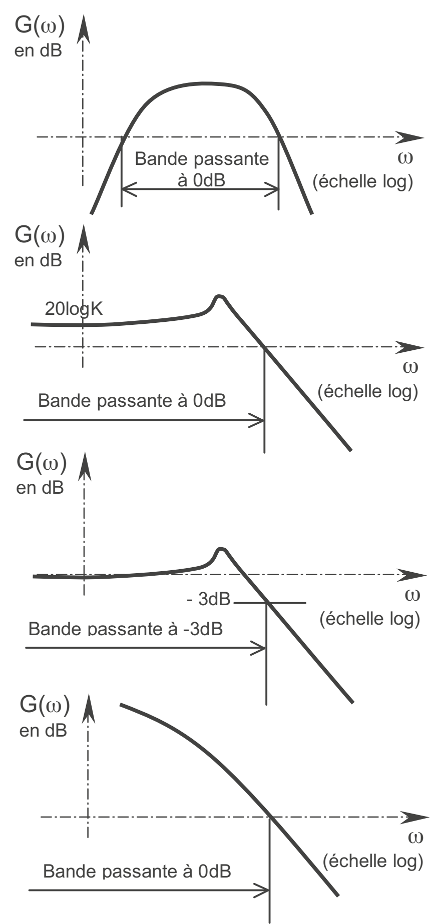
Ce critère d'atténuation présente quelques limites :

- il n'a de sens que si la sortie et l'entrée sont des grandeurs comparables,
- il n'est pas utilisable dans le cas le plus fréquent qui intéresse l'automaticien : celui des systèmes bouclés précis, donc de gain K unitaire, qui sont de fait alors atténuateurs pour toutes les pulsations, puisque 20logK = 0 dB.

On définit alors un autre critère, qui est la ***bande passante à -3 dB***. Il s'agit du domaine de pulsations pour lequel la sortie est atténuée d'une valeur inférieure à 3 dB par rapport à sa valeur asymptotique maximale. Le qualificatif « asymptotique » permet de préciser qu'une éventuelle résonance n'est pas prise en compte pour définir cette valeur maximale.

On rappelle qu'une atténuation de 3 dB correspond à une sortie d'amplitude diminuée de 30% environ ($1/\sqrt{2}$). On peut également rencontrer un critère de bande passante à - 6 dB (atténuation de 50%).

Inversement, un critère de ce type n'est possible que si le système présente un comportement limite permettant de définir une référence, ce qui n'est pas toujours le cas. Il faut alors revenir au critère 0 dB.



■ **Cas particulier du système fondamental du premier ordre**

Dans ce cas particulier où la fonction de transfert est $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$, on définit donc :

- la pulsation de cassure : $\omega_0 = 1/\tau$
- la pulsation de coupure à -3 dB : ω_c

Ces deux pulsations sont identiques, puisque l'on rappelle que pour sa pulsation de cassure $\omega_0 = 1/\tau$, un système fondamental du premier ordre atténue la sortie de 3 dB :

$$G_0 = \left|H(j\omega_0)\right| = \frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega_0)^2}} = \frac{K}{\sqrt{2}}\text{, soit en décibels : } 20\log G_0 = 20\log K - 20\log\sqrt{2} \approx 20\log K - 3\,\text{dB}$$

Cette égalité de ces deux pulsations caractéristiques n'est vraie que pour le système fondamental du premier ordre.

D'une manière générale, il ne faut donc pas confondre ces deux notions. Les pulsations de cassure d'un système sont les pulsations issues de sa décomposition fondamentale à partir des pôles et des zéros de sa fonction de transfert. Elles définissent les différentes parties de son diagramme asymptotique. Les pulsations de coupure sont, selon la nature du système et donc le critère retenu pour définir sa bande passante, soit les pulsations pour lesquelles le gain vaut 0 dB, soit celles pour lesquelles le gain est atténué (en général de 3 dB) à partir d'une certaine valeur de référence.

V-3 Bande passante et rapidité

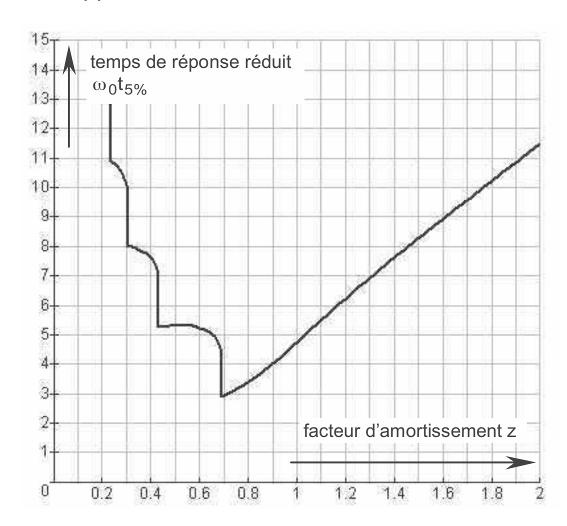
Plus la bande passante (quelle qu'en soit le critère retenu) d'un système couvre des pulsations élevées, plus celui-ci sera apte à suivre des variations rapides de son entrée. La bande passante est donc une caractéristique fréquentielle apportant des informations sur la caractéristique temporelle de rapidité.

Plus la bande passante d'un système est élevée, plus le système est rapide et inversement.

Il est aisé de vérifier cette propriété pour un système fondamental du premier ordre. En effet, la pulsation limite de sa bande passante à -3 dB (pulsation de coupure) est égale à sa pulsation de cassure qui est l'inverse de sa constante de temps. Celle-ci est égale au tiers de son temps de réponse à 5%. Ainsi, plus la bande passante du système sera élevée, plus son temps de réponse à 5% sera faible, ce qui caractérise bien un système rapide.

La vérification dans les mêmes termes pour des ordres supérieurs s'avère délicate, puisque la rapidité l'est tout autant, compte tenu de l'éventualité d'apparition d'oscillations.

Il suffit déjà d'observer combien la caractérisation de la rapidité d'un système du second ordre, dont le temps de réponse dépend à la fois de sa pulsation propre et de son facteur d'amortissement, est complexe. Revoir chapitre 2 (V-5) ou chapitre 4 (III-4) et abaque ci-contre si nécessaire.

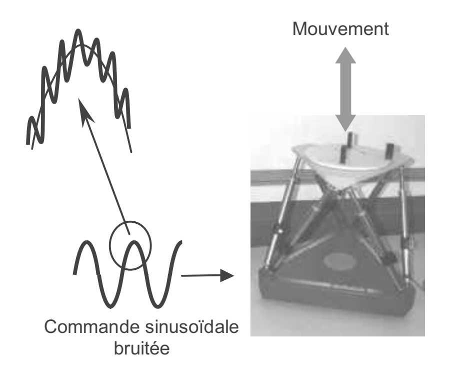


On comprendra toutefois, à partir de l'explication physique d'aptitude à suivre de rapides variations, initialement énoncée, que cette tendance générale est vérifiée pour tous les systèmes. Ceci quitte à user des qualificatifs plus mécaniques de « raide » ou de « nerveux » plutôt que de « rapide », si les oscillations générées nuisent à la rapidité au sens strict de celle-ci caractérisée par un temps de réponse à 5%. Un critère comme le temps de montée peut alors s'avérer ici plus opportun.

V-4 Filtrage d'un signal bruité

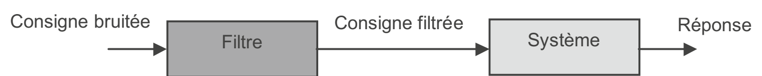
Si le comportement de filtre d'un système linéaire présente l'inconvénient de son inaptitude à réagir à des changements trop rapides, ce comportement peut être mis à profit pour éliminer des bruits pouvant exister dans son signal de commande.

Un bruit est un signal indésirable se superposant à un signal souhaité, appelé signal porteur. Ici, il est considéré se superposer au signal réalisant l'entrée du système linéaire. Ce bruit peut-être considéré comme un signal périodique, sensiblement sinusoïdal. Si tel n'est pas le cas, la théorie de Fourier permet de montrer que tout signal périodique peut-être décrit comme la somme de signaux sinusoïdaux et donc donne toute sa généralité au propos.

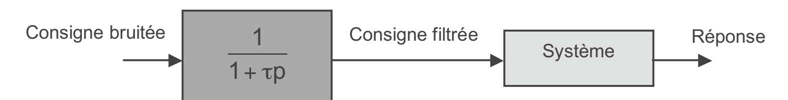


Si la pulsation du bruit est suffisamment éloignée de la bande passante du système, celui-ci filtrera naturellement le bruit, qui sera pratiquement sans effet sur la sortie.

Si ce n'est pas le cas, un filtre artificiel, de bande passante adaptée, peut-être inséré à l'entrée du système afin d'atténuer le bruit. Toute la difficulté du concepteur réside dans l'atténuation maximale du bruit tout en affectant le moins possible le signal désiré, tant en amplitude qu'en phase. De tels filtres peuvent être analogiques (mécaniques, thermiques, électriques, etc.). Ils sont toutefois de plus en plus numériques, obéissant à des algorithmes de plus en plus complexes afin d'en affiner les possibilités.



■ Ces considérations peuvent être illustrées à titre d'exemple pour un simple filtre passe-bas du premier ordre de gain unitaire, à partir de l'algorithme numérique mis au point au paragraphe IV du chapitre 4.

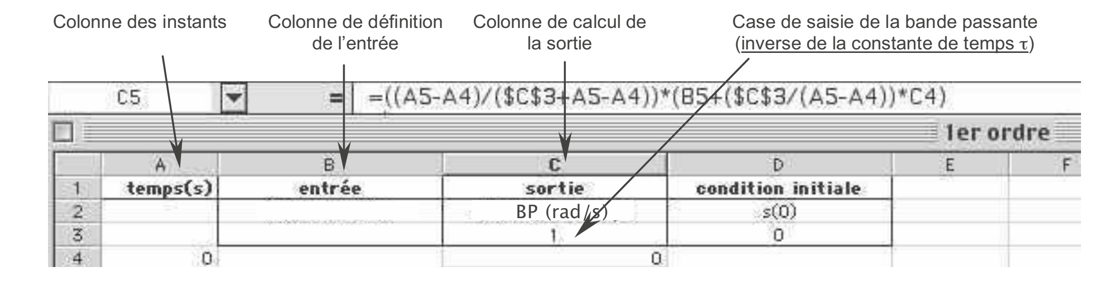


La variable temps étant discrétisée à la période d'échantillonnage T_e, l'algorithme d'un tel filtre est construit à partir de la relation :

$$s(t) = \frac{T_e}{\tau + T_e}\left[e(t) + \frac{\tau}{T_e}s(t - T_e)\right]$$

qui établit la valeur de la sortie s(t) du filtre à l'instant t en fonction de sa valeur précédente et de la valeur de l'entrée au même instant. Cet algorithme doit être complété de la valeur initiale s(0).

La mise en œuvre informatique effectuée au chapitre 4 à l'aide d'un tableur peut alors être reprise :



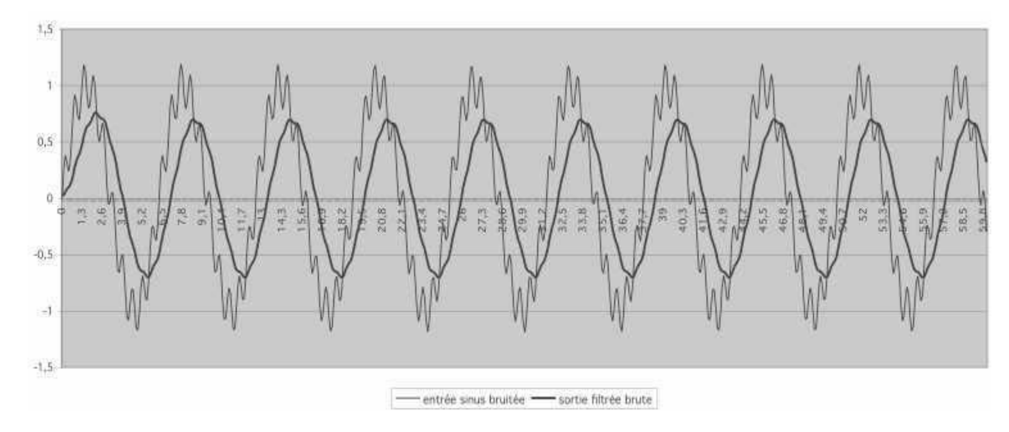
On peut alors visualiser le traitement par le filtre d'une entrée sinusoïdale bruitée par un signal de pulsation 10 fois supérieure et d'amplitude 20% : $e(t) = \sin(\omega t) + 0,2\sin(10\omega t)$.

B4 = =SIN(B3*A4)+0,2*SIN(10*B3*A4)

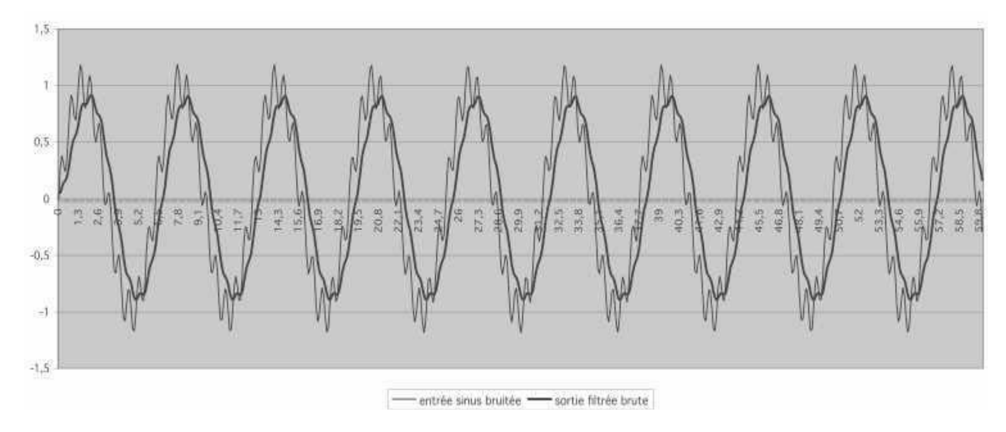
	A	B	C	D
1	**temps(s)**	**entrée sinus bruitée**	**sortie filtrée brute**	
2		pulsation (rad/s) :	BP (rad/s) :	
3		1	1	
4	0	0		
5	0,1	0,268127614	0,024375238	
6	0,2	0,380528816	0,056752836	

Ici la bande passante du filtre et la pulsation de la porteuse du signal d'entrée sont identiques. La pulsation du bruit est dix fois supérieure. Puisque le filtre est un filtre passe-bas du premier ordre :

- le signal porteur sera atténué de 3 dB (division par $\sqrt{2}$ de son amplitude) et déphasé de - 45° ;
- le bruit sera très fortement atténué (pratiquement 20 dB, soit une division par 10 de son amplitude) et donc pratiquement imperceptible :



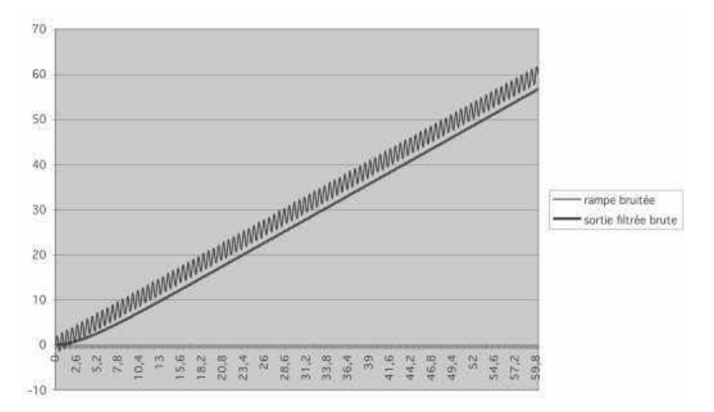
Le signal porteur est donc lui aussi modifié par le filtre (atténuation et déphasage). Pour qu'il soit moins affecté, il faudrait augmenter la bande passante du filtre, mais alors le bruit serait, à son tour, moins atténué également. Par exemple, si on multiplie par deux la bande passante du filtre, on obtient le résultat suivant, préservant mieux la porteuse, mais aussi le bruit…



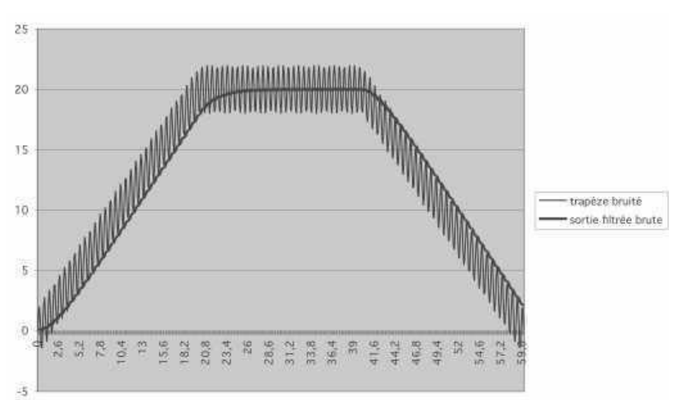
Un compromis est en pratique nécessaire. On mesure ici la difficulté du filtrage de signaux, d'autant plus délicate si la pulsation du bruit est relativement proche de celle du signal porteur.

Par ailleurs, comme l'illustrent les exemples ci-dessous, le filtre agit également sur le signal porteur si celui-ci est autre qu'une sinusoïde.

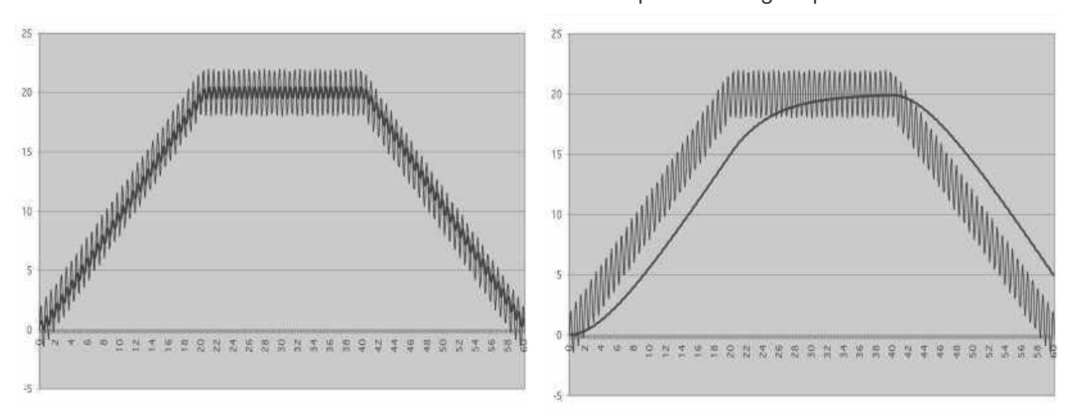
Ci-contre, on observe que si l'entrée est une rampe bruitée, le filtre permet d'atténuer le bruit, mais en affectant la rampe.



Il en va de même pour une entrée trapézoïdale bruitée par exemple.



La modification de la bande passante du filtre conduira alors à la nécessité d'un compromis entre une atténuation suffisante du bruit et une déformation acceptable du signal porteur :



Augmentation de la bande passante du filtre :
→ moindre déformation du trapèze porteur
→ moindre atténuation du bruit

Diminution de la bande passante du filtre :
→ déformation forte du trapèze porteur
→ atténuation forte du bruit

Parmi les solutions à ce problème figure un post traitement du signal (mais celui-ci doit être adapté à chaque nature de signal) ou l'utilisation de filtres plus complexes à très grande bande passante.

■ On peut citer, pour terminer l'exposé, l'exemple des filtres coupe-bande (ou rejecteurs), qui n'atténuent que dans une bande de pulsations étroite, qu'il convient alors de centrer sur celle du bruit à traiter.

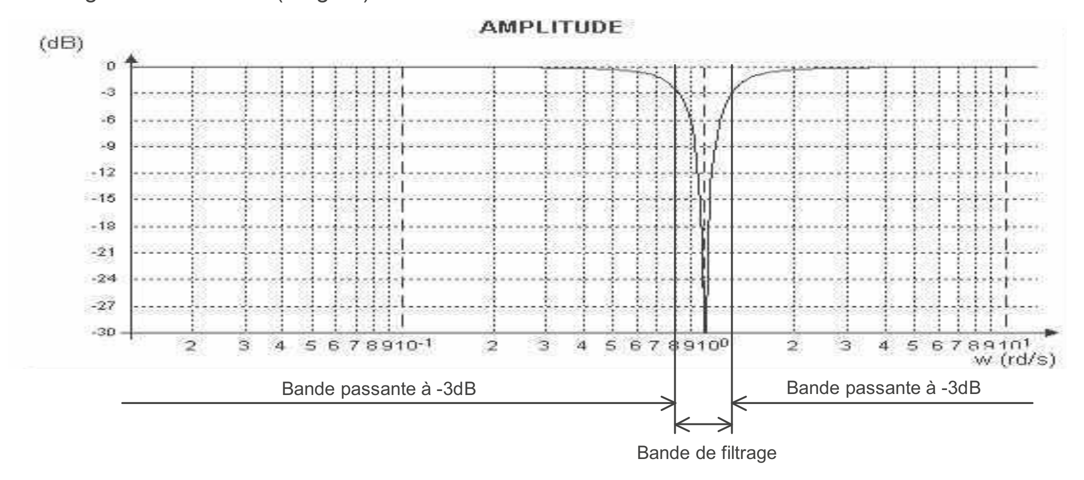
Soit par exemple un filtre du deuxième ordre, de fonction de transfert :

$$H(p)=\frac{1+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

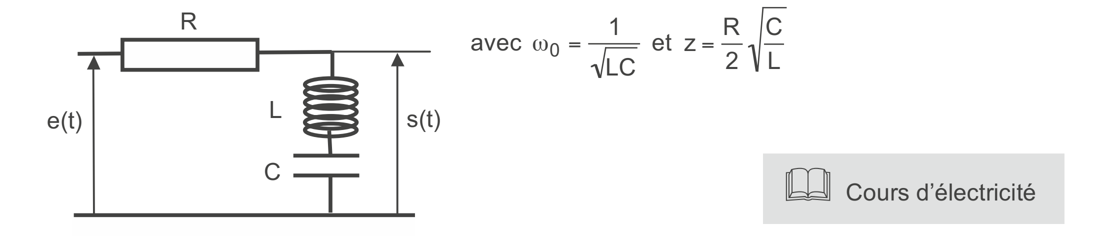
La bande de pulsation fortement filtrée sera d'autant plus étroite que le facteur d'amortissement z sera faible, par exemple, pour :

- $\omega_0 = 1$ rad/s
- $z = 0{,}2$

le diagramme de Bode (de gain) est le suivant :

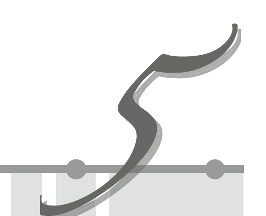


Cette fonction de transfert peut-être obtenue à partir d'un algorithme numérique, ou à partir d'un circuit électrique de type RLC, en prenant la tension de sortie aux bornes de l'ensemble {condensateur, bobine} :



avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $z = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

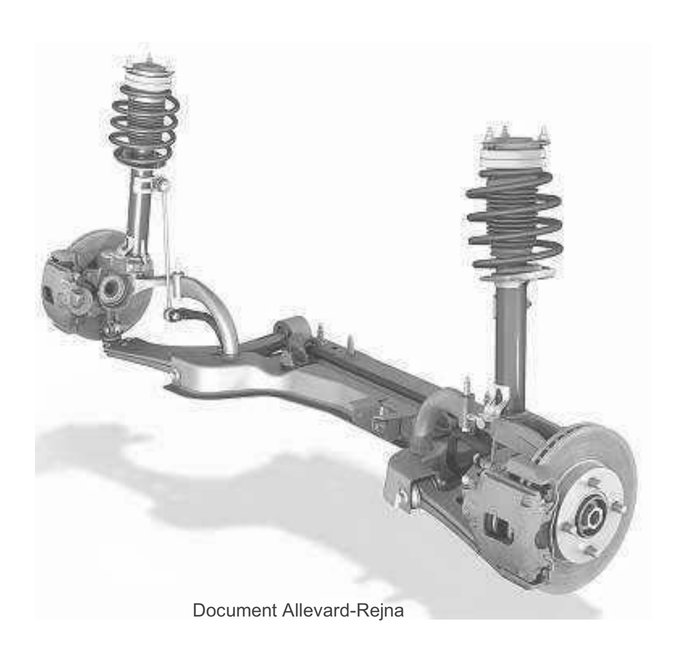
EXERCICES



I - SUSPENSION AUTOMOBILE

I-1 Présentation

Une suspension automobile est principalement constituée, pour chaque roue, de deux ensembles cinématiques, l'un lié au pivot de roue, l'autre lié au châssis du véhicule, entre lesquels est disposé un couple ressort-amortisseur appelé jambe de force.

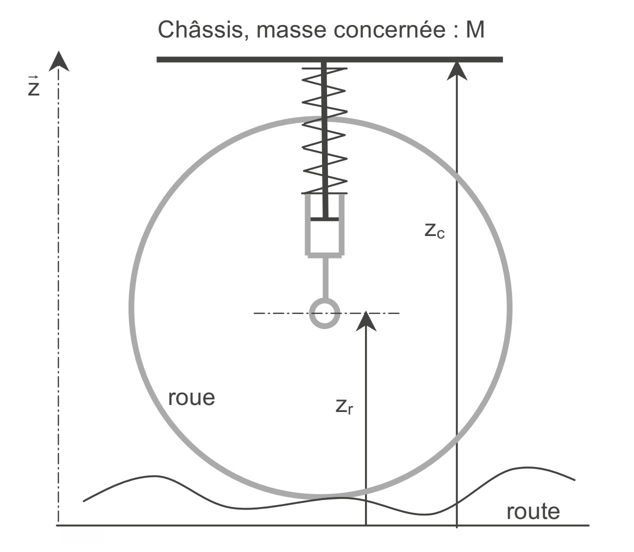


Document Allevard-Rejna

La fonction de ce système est d'assurer la tenue de route du véhicule en maintenant le contact entre chaque roue et le sol, tout en fournissant le confort attendu aux passagers.

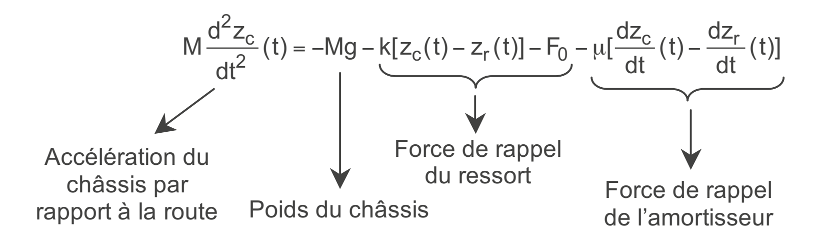
Le ressort réagit en fournissant une force de rappel proportionnelle à l'écrasement de la suspension alors que l'amortisseur fournit une force proportionnelle à la vitesse de cet écrasement.

Une modélisation simplifiée de ce système, pour une roue, est fournie ci-contre. La masse suspendue équivalente à la partie du châssis concernée est notée M. Elle résulte de la répartition des masses dans le véhicule et de sa dynamique : phase de freinage, d'accélération, etc. Les liaisons mécaniques entre le châssis et la suspension, en dehors de la jambe de force (couple ressort-amortisseur), ne sont pas représentées.



Le mouvement vertical de la roue par rapport au sol, imposé par les fluctuations de la route, est paramétré par une altitude z_r par rapport à une route idéale, celui du châssis par une altitude z_c.

Une étude dynamique du dispositif permet alors d'écrire l'équation différentielle suivante :

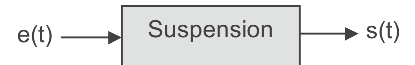


F_0 traduit une précontrainte du ressort, k est sa raideur. μ est le coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur. Les différents frottements des liaisons non prises en compte dans le modèle peuvent par ailleurs être considérés comme inclus dans ces caractéristiques.

Lorsque la suspension est immobile, on note respectivement z_{r0} et z_{c0} les positions verticales de la roue et du châssis. Cette équation s'écrit alors :

$$0 = -Mg - k[z_{c0} - z_{r0}] - F_0$$

Pour finir, on note respectivement les positions relatives de la roue et du châssis par rapport à ce point de fonctionnement selon :
$e(t) = z_r(t) - z_{r0}$, considérée comme l'entrée du système de suspension,
$s(t) = z_c(t) - z_{c0}$, réponse de la suspension à la sollicitation imposée par le mouvement de la roue :



L'objectif de l'exercice est de modéliser le comportement fréquentiel de la suspension.

I-2 Travail demandé

Question 1 : fonction de transfert

Déterminer la fonction de transfert de la suspension à partir de la modélisation précédemment fournie.

Question 2 : diagramme de Bode asymptotique

Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de ce système, selon la valeur relative de la masse M concernée du châssis par rapport aux caractéristiques du ressort et de l'amortisseur.

Commenter le résultat.

I-3 Correction

Question 1 : fonction de transfert

$$e(t) = z_r(t) - z_{r0} \Rightarrow z_r(t) = e(t) + z_{r0}$$
$$s(t) = z_c(t) - z_{c0} \Rightarrow z_c(t) = s(t) + z_{c0}$$

Ce qui permet de réécrire l'équation différentielle selon :

$$M\frac{d^2s}{dt^2}(t) = \underbrace{-Mg - k[z_{c0}(t) - z_{r0}(t)] - F_0}_{0} - k[s(t) - e(t)] - \mu[\frac{ds}{dt}(t) - \frac{de}{dt}(t)]$$

Soit $M\dfrac{d^2s}{dt^2}(t) = -k[s(t) - e(t)] - \mu[\dfrac{ds}{dt}(t) - \dfrac{de}{dt}(t)]$

ou encore : $M\dfrac{d^2s}{dt^2}(t) + \mu\dfrac{ds}{dt}(t) + ks(t) = \mu\dfrac{de}{dt}(t) + ke(t)$

qui s'écrit dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, en notant classiquement E(p) et S(p) les transformées respectives de e(t) et s(t) :

$Mp^2S(p) + \mu pS(p) + kS(p) = \mu pE(p) + kE(p)$

Cette écriture fournit la fonction de transfert du système étudié : $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{\mu p + k}{Mp^2 + \mu p + k}$

Soit sous forme canonique : $\boxed{H(p) = \dfrac{1 + \frac{\mu}{k}p}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{M}{k}p^2}}$

Il s'agit d'un système du deuxième ordre généralisé.

Sa pulsation propre ω_0 est fournie par $\dfrac{M}{k} = \dfrac{1}{\omega_0^2}$, soit $\omega_0 = \sqrt{k/M}$.

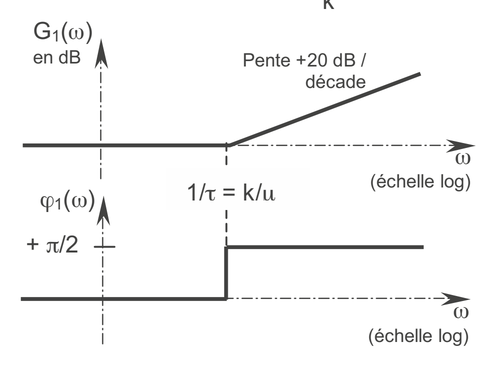
Son facteur d'amortissement z est fourni par $\dfrac{\mu}{k} = \dfrac{2z}{\omega_0}$, soit $z = \dfrac{\mu}{2\sqrt{kM}}$.

Le numérateur fait apparaître une constante de temps $\tau = \dfrac{\mu}{k}$.

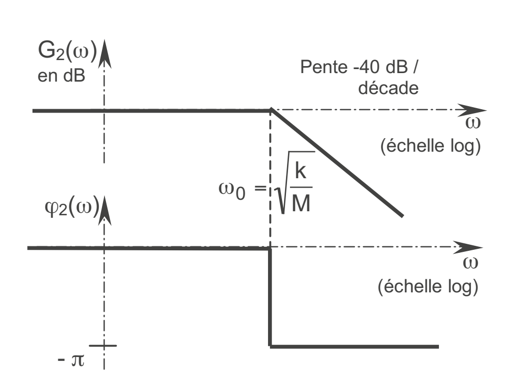
<u>Question 2 :</u> diagramme de Bode asymptotique

Le diagramme de Bode asymptotique sera donc la superposition de deux diagrammes élémentaires :

Contribution du numérateur $1 + \dfrac{\mu}{k}p$:



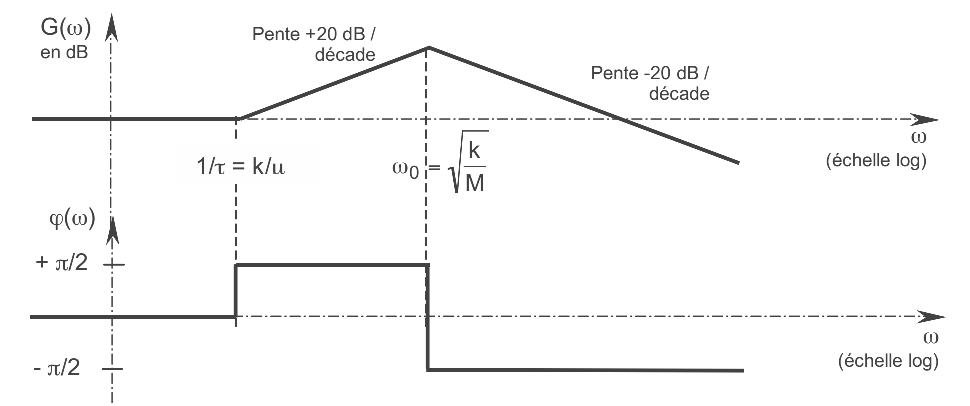
Contribution du dénominateur : $1 + \dfrac{\mu}{k}p + \dfrac{M}{k}p^2$:



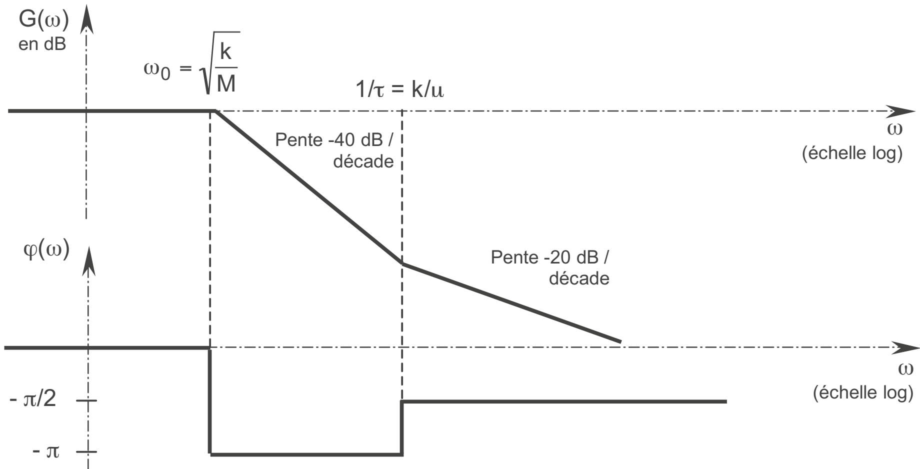
Le diagramme de Bode résultant dépend donc des valeurs respectives des deux pulsations de cassure.

Il faut donc comparer $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{k}{\mu}$ à $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$, soit M et $\dfrac{\mu^2}{k}$.

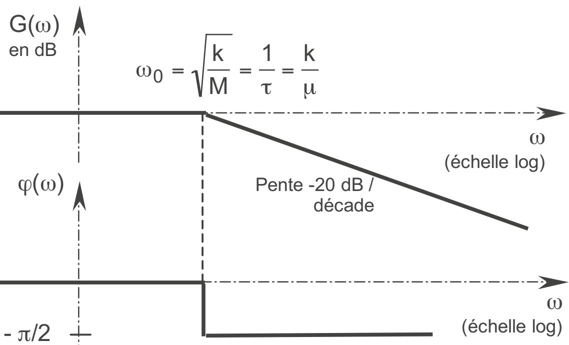
- Si $\frac{k}{\mu} < \sqrt{\frac{k}{M}}$, soit si $M < \frac{\mu^2}{k}$, le diagramme de Bode asymptotique du système est :



- Si $\frac{k}{\mu} > \sqrt{\frac{k}{M}}$, soit si $M > \frac{\mu^2}{k}$, il vient par contre :



- Si $\frac{k}{\mu} = \sqrt{\frac{k}{M}}$, soit si $M = \frac{\mu^2}{k}$,
  le diagramme est le cas très particulier ci-contre.



■ On constate que, bien entendu, dans les trois cas, les comportements aux très hautes et aux très basses pulsations sont identiques.

Aux très basses pulsations (vitesse très réduite du véhicule et/ou variations de la route de grande période, soit très « lentes »), le système transmet intégralement les oscillations de la roue au châssis. La suspension se comporte comme un solide rigide.

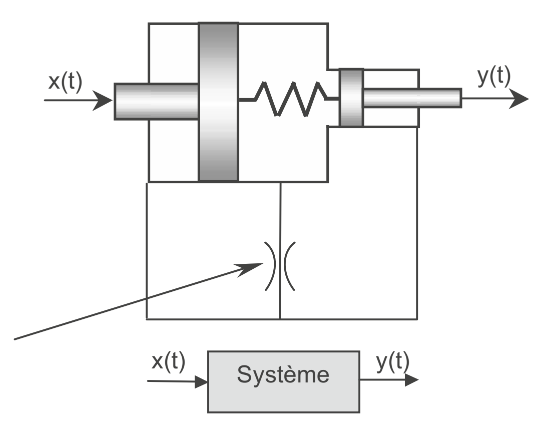
Aux hautes pulsations (vitesse élevée du véhicule et/ou irrégularités de la route de faible période, soit très « rapides »), le système se comporte comme un filtre basse bas, ne transmettant pratiquement pas les oscillations de la roue au châssis.

En revanche, pour des pulsations de l'ordre des pulsations de cassure, le comportement est notoirement différent selon les cas. Indépendamment de toute considération de type résonance (hors de propos sur un diagramme asymptotique), le diagramme asymptotique prévoit un domaine fréquentiel d'amplification des oscillations dans le premier cas, qui serait celui d'une masse « trop faible » du véhicule par rapport aux caractéristiques de la suspension.

II - CORRECTEUR MÉCANIQUE À AVANCE DE PHASE

II-1 Présentation

Un correcteur mécanique à avance de phase, utilisé dans certains asservissements purement mécaniques, a déjà été présenté au chapitre 4 : il d'agit de l'écarecteur, dont on rappelle ci-contre schématiquement la réalisation.



Il est constitué de deux pistons en série de sections différentes, reliés par un ressort, séparant deux chambres d'un fluide supposé incompressible.

Un orifice calibré met en communication les deux chambres en autorisant entre elle un certain débit de fuite

Sous certaines hypothèses simplificatrices (cf. chapitre 4, VI-1), la fonction de transfert du système s'écrit sous la forme :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1+ap}{1+\tau p}$$ avec $a > \tau$ (la commande s'effectuant sur le piston de plus grande section)

II-2 Travail demandé

<u>Question 1 :</u> diagramme de Bode asymptotique

11) Établir le diagramme de Bode asymptotique de ce système.

12) En déduire l'allure de son diagramme réel et décrire succinctement les trois zones de son comportement fréquentiel.

<u>Question 2 :</u> points particuliers du diagramme de Bode

21) Déterminer la pulsation ω_m pour laquelle le déphasage est maximum.

22) Calculer la valeur du déphasage φ_m et du gain G_m pour cette pulsation ω_m.

23) Montrer que pour cette pulsation ω_m le diagramme réel de gain croise le diagramme asymptotique.

<u>Question 3 :</u> diagrammes de Black et de Nyquist

À partir des considérations précédentes, donner l'allure des diagrammes de Black et de Nyquist du système.

II-3 Correction

<u>Question 1 :</u> diagramme de Bode asymptotique

11) Le système présente deux pulsations de cassure : $\omega_1 = 1/a$ et $\omega_2 = 1/\tau$, avec $\omega_1 < \omega_2$.

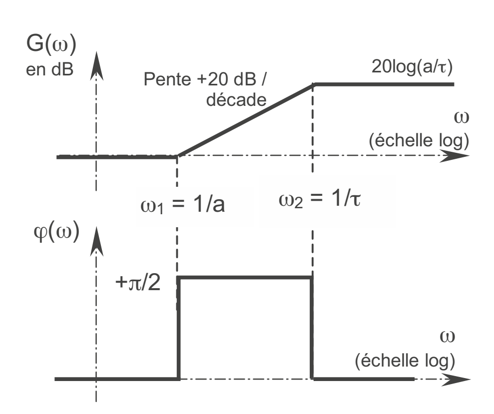
Pour $\omega < \omega_2 = 1/\tau$, le diagramme asymptotique de Bode est celui du terme (1+ap) soit :

- pour $\omega < \omega_1 = 1/a$: une courbe de gain selon une droite à 0 dB et une phase constamment nulle ;
- pour $\omega > \omega_1 = 1/a$: une courbe de gain selon une droite de pente +20 dB/décade et une courbe de phase horizontale à + 90°.

Pour $\omega > \omega_2 = 1/\tau$, vient se superposer le diagramme asymptotique de Bode du terme $\dfrac{1}{1+\tau p}$:

- la pente de la courbe de gain est diminuée de 20 dB/décade ; elle redevient donc nulle, le gain asymptotique étant celui atteint asymptotiquement pour $\omega_1 = \omega_2$;
- la phase est diminuée de 90° et redevient donc nulle.

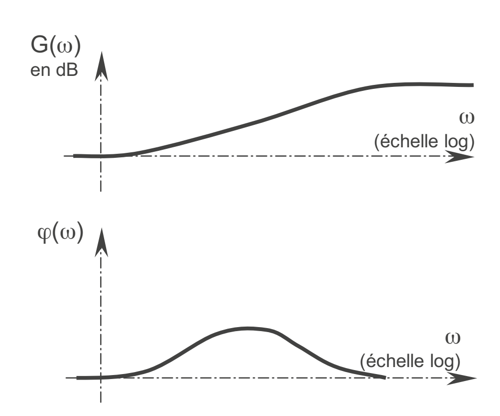
D'où le diagramme asymptotique demandé :



L'équation de l'asymptote centrale est :
$G(\omega) = 20\log a + 20\log\omega$
soit pour $\omega = 1/\tau$:
$G(1/\tau) = 20\log a + 20\log\frac{1}{\tau} = 20\log\frac{a}{\tau}$
ce qui fournit le niveau de la troisième asymptote.

Ce résultat peut aussi se retrouver directement à partir de la fonction de transfert, en écrivant que si la pulsation est suffisamment grande :
$$|H(j\omega)| = \lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{1+ja\omega}{1+j\tau\omega}\right| = \frac{a}{\tau}$$
soit en décibel $G(\infty) = 20\log\frac{a}{\tau}$.

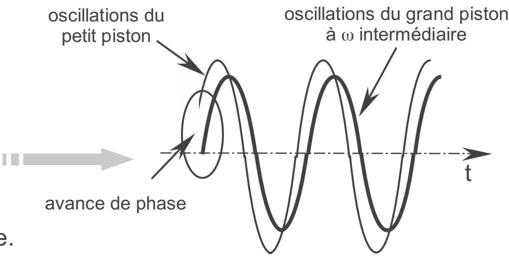
12) L'allure du diagramme réel est donc :



Aux faibles pulsations, le système se comporte comme un simple gain unitaire : les oscillations exercées sur le piston de grande section sont intégralement restituées par le petit piston.

Aux fortes pulsations, le système se comporte comme un amplificateur : les oscillations exercées sur le piston de grande section sont restituées amplifiées, mais en phase, par le petit piston.

Pour des pulsations intermédiaires, le petit piston oscille en <u>avance de phase</u> par rapport au grand piston, en amplifiant son amplitude.



Cette caractéristique donne son nom au système.

<u>Question 2 :</u> points particuliers du diagramme de Bode

21) L'expression du déphasage est : $\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}[H(j\omega)] = \arctan a\omega - \arctan \tau\omega$

Son extremum est défini par $\frac{d\varphi}{d\omega}(\omega_m) = 0$.

Il s'agit bien d'un maximum, compte tenu du diagramme asymptotique.

On calcule alors : $\frac{d\varphi}{d\omega}(\omega) = \frac{a}{1+(a\omega)^2} - \frac{\tau}{1+(\tau\omega)^2} = \frac{a[1+(\tau\omega)^2] - \tau[1+(a\omega)^2]}{[1+(a\omega)^2][1+(\tau\omega)^2]}$

dont on cherche les racines du numérateur, soit à résoudre : $a[1+(\tau\omega)^2] - \tau[1+(a\omega)^2] = 0$

Cette équation du second degré possède une seule racine positive qui est la pulsation cherchée :

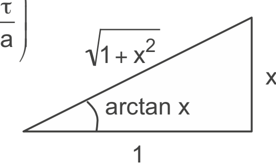
$$\boxed{\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a\tau}}}$$

22) Pour cette pulsation, le déphasage vaut :

$\varphi_m = \arctan a\omega_m - \arctan \tau\omega_m = \arctan\sqrt{\frac{a}{\tau}} - \arctan\sqrt{\frac{\tau}{a}}$

soit $\sin\varphi_m = \sin\left(\arctan\sqrt{\frac{a}{\tau}}\right).\cos\left(\arctan\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right) - \cos\left(\arctan\sqrt{\frac{a}{\tau}}\right).\sin\left(\arctan\sqrt{\frac{\tau}{a}}\right)$

Sachant que : $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



il vient :

$$\sin\varphi_m = \frac{\sqrt{a/\tau}}{\sqrt{1+a/\tau}}.\frac{1}{\sqrt{1+\tau/a}} - \frac{1}{\sqrt{1+a/\tau}}.\frac{\sqrt{\tau/a}}{\sqrt{1+\tau/a}} = \frac{a}{a+\tau} - \frac{\tau}{a+\tau}$$

soit $\boxed{\sin\varphi_m = \frac{a-\tau}{a+\tau}}$ ou encore, puisque $\varphi_m \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $\varphi_m = \arcsin\frac{a-\tau}{a+\tau}$.

Le gain quant à lui vaut :

$$|H(j\omega_m)| = \frac{\sqrt{1+(a\omega_m)^2}}{\sqrt{1+(\tau\omega_m)^2}} = \frac{\sqrt{1+a/\tau}}{\sqrt{1+\tau/a}} = \sqrt{\frac{a}{\tau}}$$

soit en décibels : $\boxed{G_m = 20\log\sqrt{\frac{a}{\tau}} = 10\log\frac{a}{\tau}}$ Ce gain est <u>la moitié</u> du gain maxi $G(\infty) = 20\log\frac{a}{\tau}$

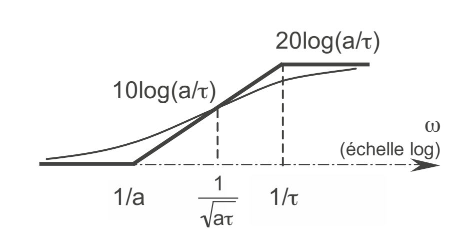
23) Pour la pulsation $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a\tau}}$, il vient d'être établi que le gain est la moitié du gain maxi.

Reste donc à montrer, que <u>sur une échelle logarithmique</u>, ω_m est également à la moitié de l'intervalle [1/a ; 1/τ] des deux cassures.

On calcule alors :

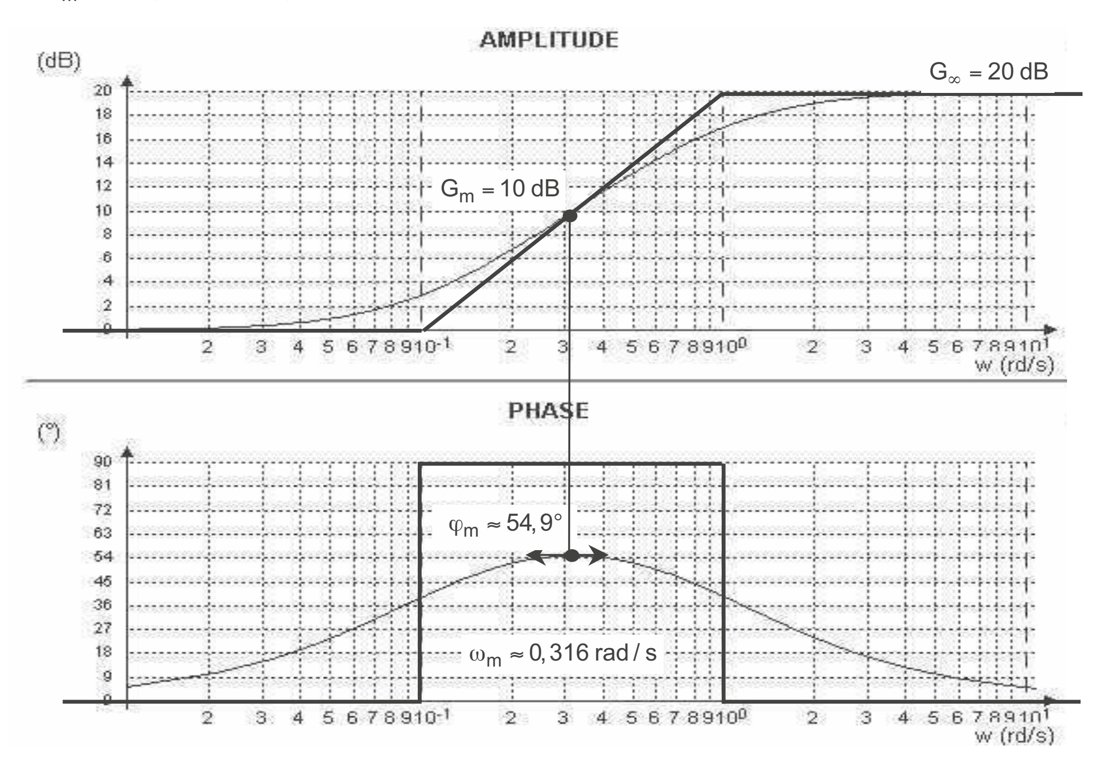
$\frac{1}{2}[\log\frac{1}{a} + \log\frac{1}{\tau}] = \frac{1}{2}\log\frac{1}{a\tau} = \log\frac{1}{\sqrt{a\tau}}$

ce qui prouve le résultat.



Ces différents résultats peuvent être rassemblés sur un diagramme de Bode obtenu par simulation informatique, par exemple pour a = 10 s et τ = 1 s, soit :

$$\begin{cases} \omega_m = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,316 \text{ rad/s} \\ \varphi_m = \arcsin \dfrac{9}{11} \approx 54,9° \\ G_m = 20 \log \sqrt{10} = 10 \log 10 = 10 \text{ dB, moitié de } G_\infty = 20 \text{ dB.} \end{cases}$$



<u>Question 3 :</u> diagrammes de Black et de Nyquist

Ces diagrammes se déduisent immédiatement des observations précédentes :

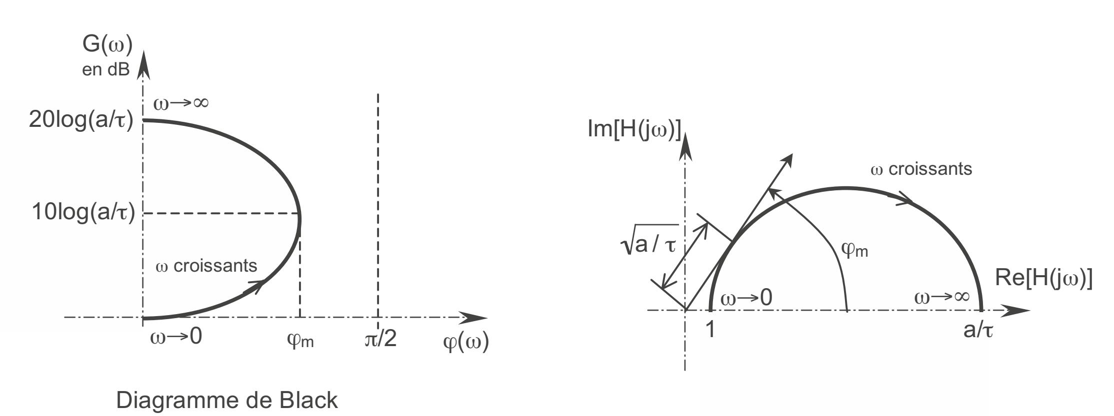
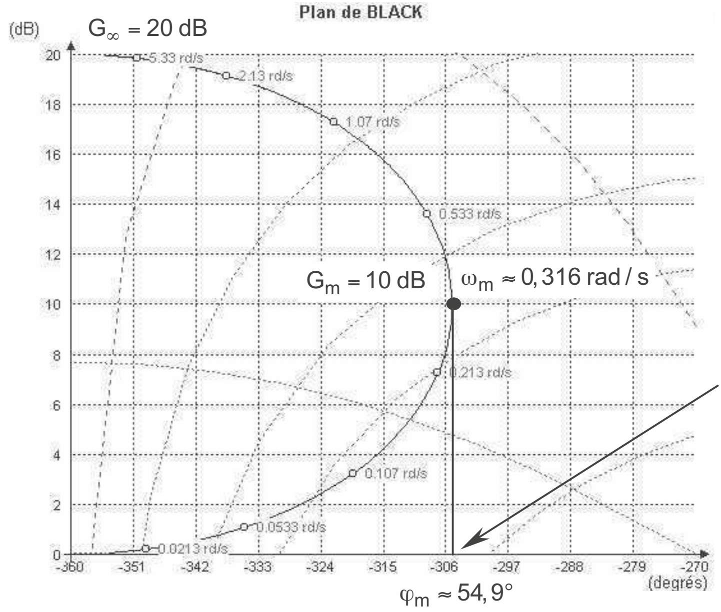
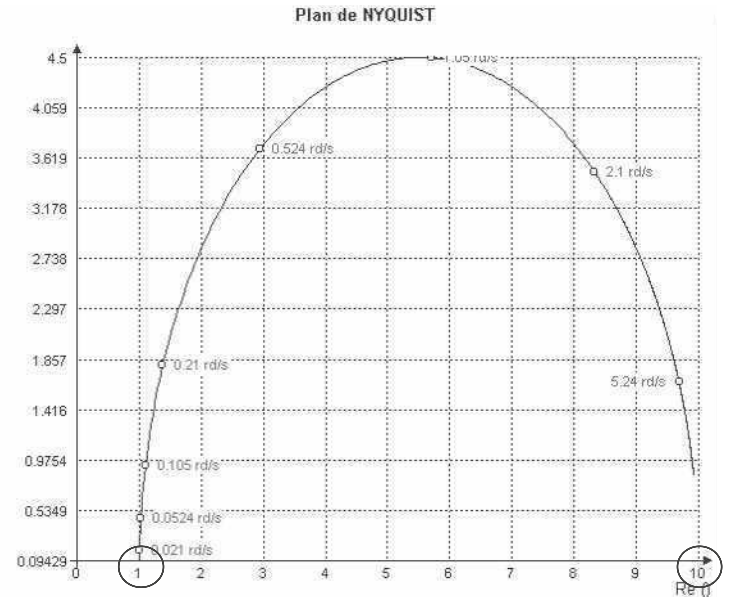


Diagramme de Black

Les différentes particularités signalées peuvent être retrouvées sur les tracés suivants, toujours pour a = 10 s et τ = 1 s :



NB : le tracé automatique réalisé par le logiciel utilisé pour ce diagramme de Black, fournit en fait la phase modulo 360°. Il convient donc ici d'opérer une translation de +360° aux valeurs indiquées pour la phase.

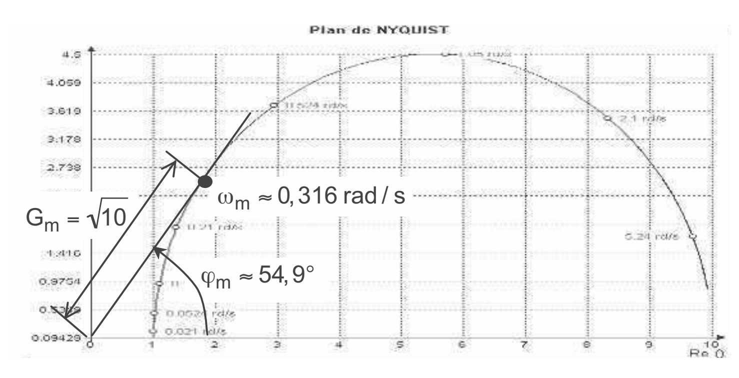


Sur un diagramme de Nyquist, les mesures ne sont pratiquement possibles que si les axes Re et Im sont à la même échelle, ce qui n'est pas le cas sur le tracé automatique ci-contre.

Sur ce tracé, on se contentera d'observer les valeurs mini (1, soit 0 dB) et maxi (10, soit 20 dB) du gain.

En modifiant les échelles on obtient le tracé ci-contre, sur lequel des mesures peuvent être effectuées.

Bien entendu, selon les fonctionnalités du logiciel de tracé utilisé, ces manipulations sont plus ou moins aisées. Toutefois, elles illustrent bien le fait que le diagramme de Nyquist est mal adapté à ce genre de mesures quantitatives précises.



III - OPTIQUE ADAPTATIVE

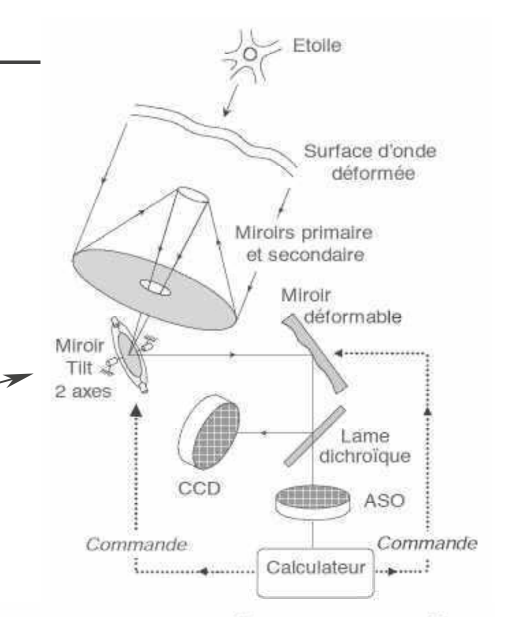
D'après une épreuve du Concours Commun Mines-Ponts PSI.

III-1 Présentation

Le système global a déjà été présenté lors des exercices du chapitre 1.

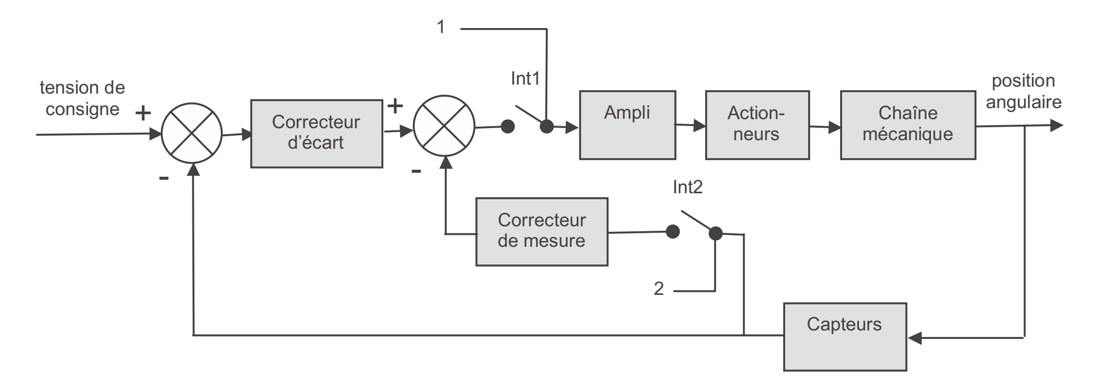
On s'intéresse ici à la conception de la commande de position angulaire du miroir de correction de tilt, qui agit directement sur l'image constituée par les miroirs primaire et secondaire.

Ce miroir est mis en position selon deux axes perpendiculaires, commandés indépendamment l'un de l'autre, selon la structure opérative donnée ci-dessous.



1 : anneau central
2 : anneau intermédiaire
3 : bâti
4 : pivots élastiques
5 : berceau de miroir
6 : miroir
7 : capteurs capacitifs
8 : actionneurs inductifs
9 : contrepoids

La commande de la position angulaire d'un axe se fait selon la chaîne fonctionnelle :

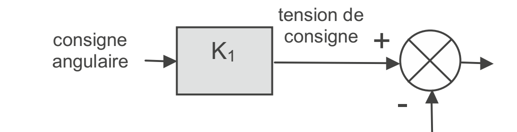


- Int1 et Int2 sont deux interrupteurs, fermés en fonctionnement.
- Les points 1 et 2 permettent des relevés expérimentaux.
- La tension de consigne est une tension, image de la position angulaire attendue.
- Le correcteur d'écart est un correcteur PID qui assure la précision de l'asservissement.
- Le correcteur de mesure permet d'élaborer un retour tachymétrique.
- L'amplificateur est le préactionneur qui fournit le courant aux actionneurs. Il se comporte comme un gain $K_2 = 0,1$ A/V.
- Les actionneurs inductifs, dont le fonctionnement est comparable à celui de haut-parleurs, fournissent globalement à la chaîne mécanique un couple proportionnel à leur intensité de commande selon $K_3 = 1,2$ Nm/A.
- La chaîne mécanique a subi un certain nombre d'essais permettant de la modéliser selon la fonction de transfert du deuxième ordre :

  $$\frac{1/k}{1+Tp+(J/k)p^2}$$, avec :

  k, raideur torsionnelle des deux pivots élastiques réalisant l'axe : k = 24 Nm/rad ;
  J, moment d'inertie de la partie mobile (supposé constant) : $J = 3,6\ 10^{-3}$ kg.m^2 ;
  T, traduisant les éléments dissipatifs divers : T = 1 ms.
- Les capteurs capacitifs ont globalement un gain $K_4 = 4125$ V/rad.

Un transducteur d'entrée, non représenté ci-dessous car intégré dans la carte de commande, permet par ailleurs d'élaborer la tension de consigne avec un gain K_1 V/rad.



III-2 Travail demandé

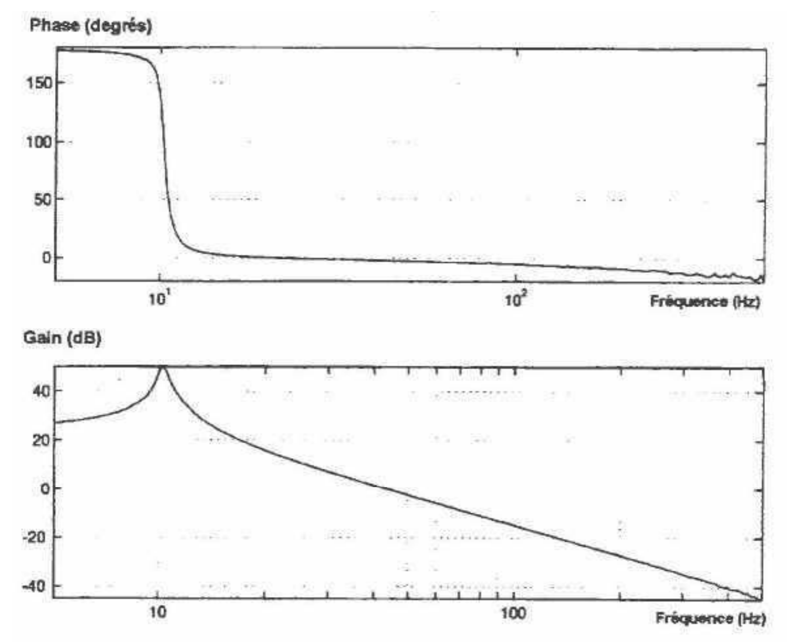
<u>Question 1 :</u> validation du modèle en boucle ouverte

La fonction de transfert en boucle ouverte est définie de la manière suivante :

- interrupteurs Int1 et Int2 ouverts
- signal d'entrée en 1
- signal de sortie en 2.

11) Déterminer cette fonction de transfert en boucle ouverte FTBO(p), tracer son diagramme de Bode asymptotique et tracer l'allure du diagramme réel.

12) Un relevé est réalisé dans les mêmes conditions sur un prototype.
Une tension d'entrée sinusoïdale de fréquence variable de 5 à 500 Hz est imposée au point 1 et on relève au point 2 la tension image des oscillations angulaires du miroir en régime permanent. Le relevé obtenu est le suivant :



Attention, le dispositif expérimental fournit la phase augmentée de 180°. Il convient donc de retrancher 180° aux valeurs lues ci-contre.

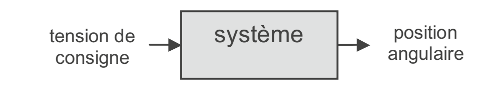
Vérifier que ce prototype possède un comportement fréquentiel en boucle ouverte conforme à celui prévu par le modèle.

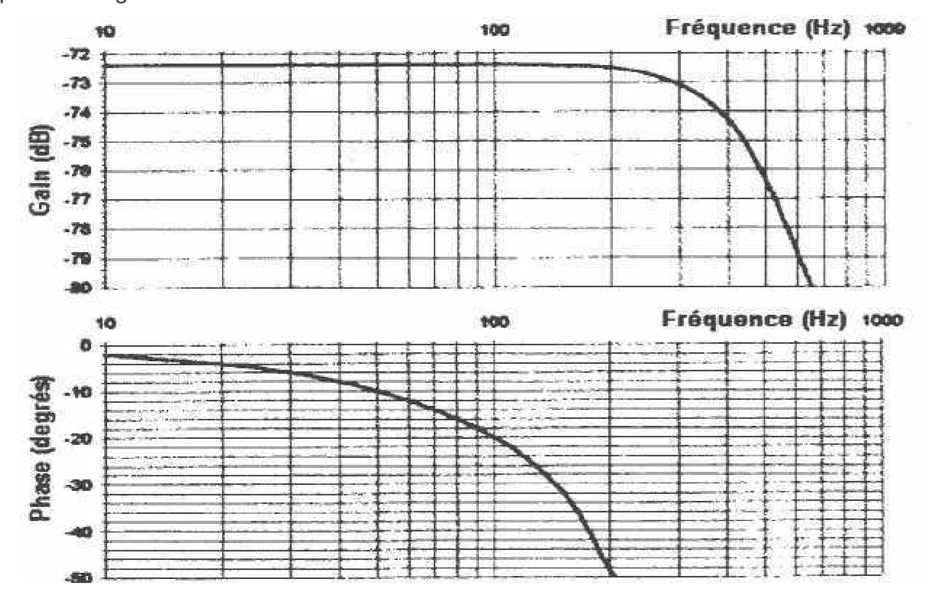
<u>Question 2 :</u> validation du modèle en boucle fermée, essais sur un premier prototype

Les interrupteurs Int1 et Int2 sont maintenant fermés.

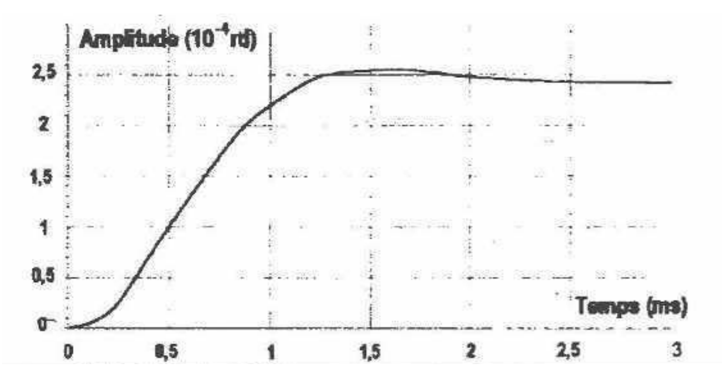
21) Quelle doit être la valeur du gain K_1 du transducteur d'entrée afin que la précision assurée par le correcteur PID se traduise bien par une erreur nulle en régime permanent ?

22) Après conception des correcteurs, une modélisation informatique permet d'obtenir le diagramme de Bode suivant pour le système dont l'entrée est la tension de consigne (sans le transducteur d'entrée donc) et la sortie la position angulaire :





Cette même simulation donne accès à la réponse à un échelon de 1V :



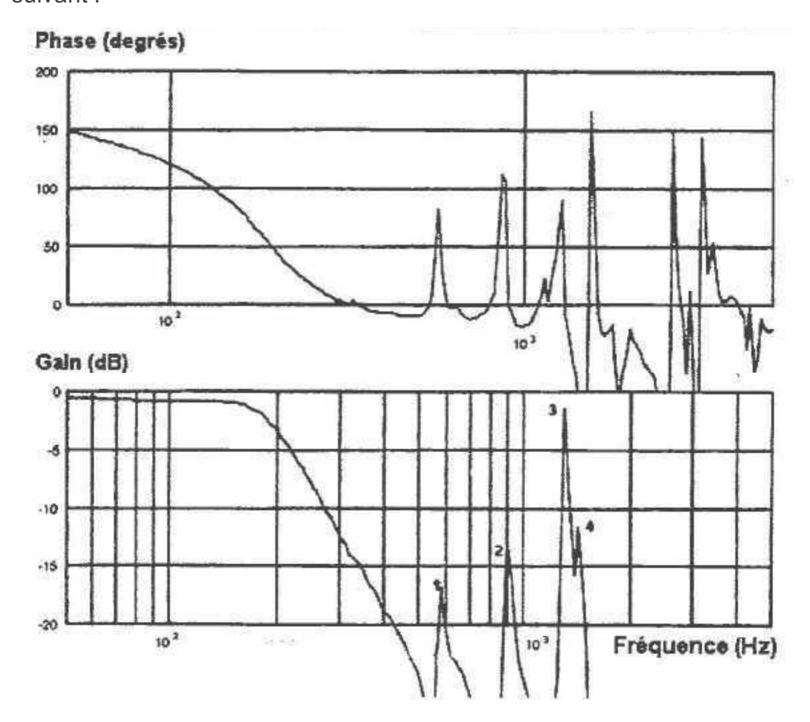
Vérifier la cohérence des caractéristiques statiques obtenues à l'aide de ces deux essais.
Faire le lien entre cette caractéristique et le fait que l'entrée considérée est la tension de commande et non la consigne angulaire.

23) En boucle fermée, le cahier des charges impose les performances suivantes :

Temps de réponse à 90% de la valeur finale	2 ms maxi
Premier dépassement en réponse indicielle	10% maxi
Plage de fréquences sans atténuation	100 Hz mini
Bande passante à -3 dB	400 Hz mini
Retard de phase à 50 Hz	20° maxi

Vérifier que le modèle théorique vérifie bien le cahier des charges.

24) Un essai fréquentiel est réalisé sur le prototype, en imposant en entrée une tension de consigne sinusoïdale de fréquence variable de 5 à 500 Hz et en relevant au point 2 la tension image des oscillations angulaires du miroir en régime permanent. Le diagramme obtenu est le suivant :



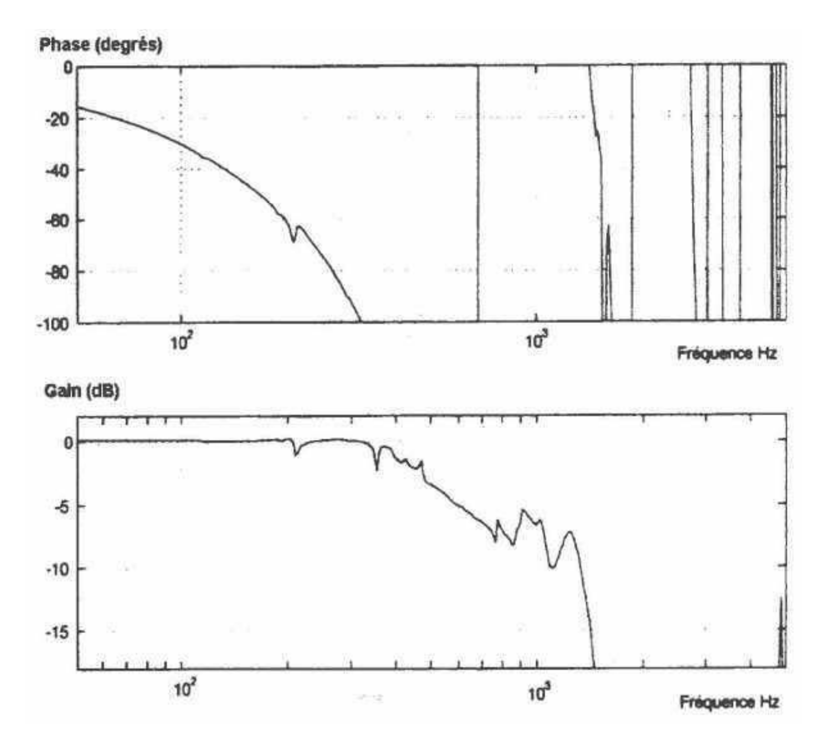
Attention, le dispositif expérimental fournit ici encore la phase augmentée de 180°. Il convient donc encore une fois de retrancher 180° aux valeurs lues ci-contre.

Justifier le gain statique de 0 dB cette fois relevé.
Indiquer les performances attendues par le cahier des charges qui ne sont pas satisfaites.

Question 3 : second prototype

Une étude dynamique permet d'identifier les défauts du premier prototype comme provenant principalement de la masse trop élevée de l'anneau intermédiaire. On réalise un nouveau prototype avec un anneau allégé, que l'on soumet à une analyse fréquentielle dans les mêmes conditions que le premier prototype :

- tension de consigne imposée en entrée,
- sortie mesurée sur la tension au point 2.



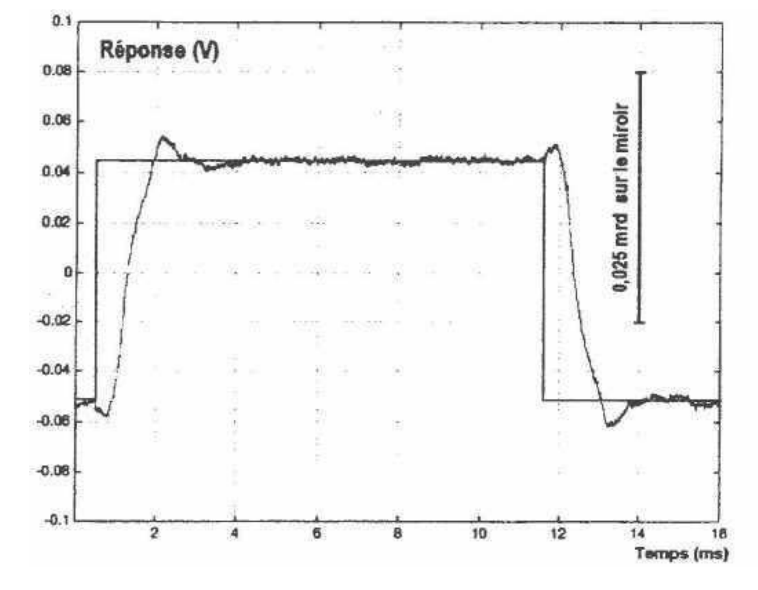
Pour ce deuxième protopype, le dispositif expérimental fournit cette fois directement la phase comptée à partir de zéro.

31) Conclure quant au respect, d'un point de vue fréquentiel, du cahier des charges par le second prototype.

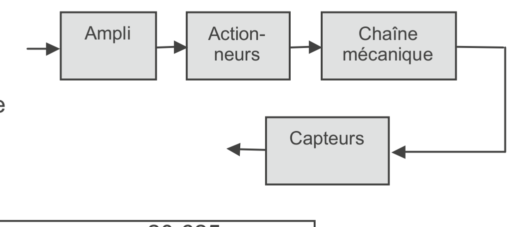
32) Les aspects fréquentiels étant concluants, reste à vérifier le comportement temporel, à partir d'un essai indiciel.

Le résultat ci-contre est la réponse obtenue en tension au point 2 pour une tension consigne en échelon de 0,1 V (maintenue pendant 11ms).

Conclure quant au respect du cahier des charges.



III-3 Correction



<u>Question 1 :</u> validation du modèle en BO

11) Telle qu'elle est définie, la fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$FTBO(p) = \frac{K_2K_3K_4}{k[1 + Tp + (J/k)p^2]}$$

Soit, compte tenu des valeurs numériques : $\boxed{FTBO(p) = \dfrac{20,625}{1 + 10^{-3}p + 1,5.10^{-4}p^2}}$

On vérifie que le gain $(K_2K_3K_4)/k = 20,625$ est bien sans dimension : entrée et sortie de la chaîne sont des tensions. On peut calculer sa valeur en décibels : 20log(20,625) = <u>26,3 dB</u>

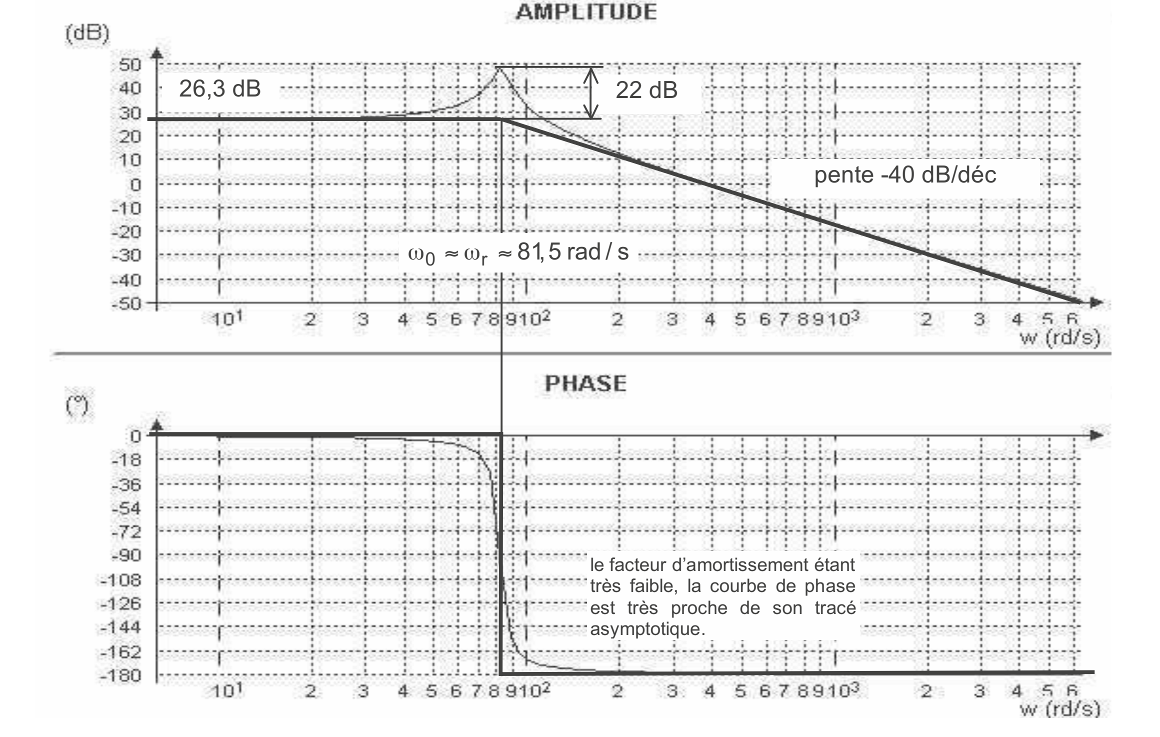
Il s'agit d'un système fondamental du second ordre, dont on peut déterminer la pulsation propre non amortie et le facteur d'amortissement, soit, avec les notations habituelles :

- $\dfrac{1}{\omega_0^2} = 1,5.10^{-4}\ s^2$ d'où $\omega_0 = 81,65\ rad.s^{-1}$;
- $\dfrac{2z}{\omega_0} = 10^{-3}\ s$ d'où z = 0,04, valeur très faible conduisant à une résonance très marquée.

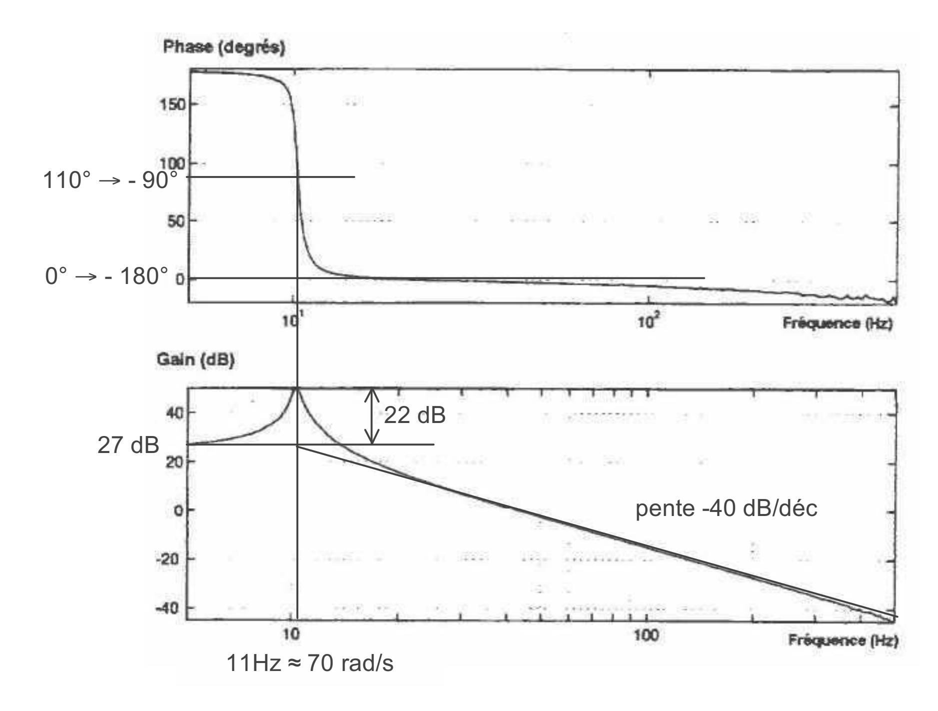
Le diagramme de Bode est donc celui d'un système fondamental du second ordre très faiblement amorti présentant une cassure pour la pulsation 81,65 rad/s et un phénomène de résonance de caractéristiques :

- pulsation de résonance : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2} = 81,52\ rad.s^{-1}$ proche de ω_0 puisque z est faible ;
- gain à la résonance augmenté du facteur : $\dfrac{1}{2z\sqrt{1-z^2}} = 12,5$, soit 20log(12,5) ≈ 22 dB

D'où le tracé :



12) Le tracé expérimental est obtenu exactement dans les mêmes conditions d'entrée et sortie que le tracé précédent issu de la modélisation. On peut y mesurer les différentes grandeurs indiquées ci-dessous, à la précision de la figure près :



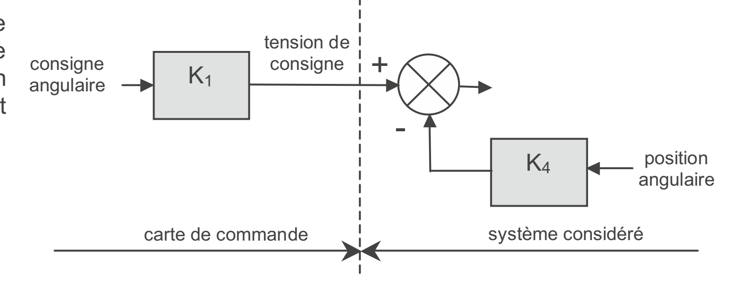
L'allure globale des courbes et les mesures correspondent bien au modèle, sauf :

- une légère différence sur la pulsation cassure qui est plutôt de l'ordre de 70 rad/s,
- une phase qui descend légèrement au-dessous de -180°, laissant à penser que des phénomènes augmentant l'ordre de la fonction de transfert ont été négligés dans la modélisation. D'ailleurs, de manière correspondante, la courbe de gain s'emble s'infléchir au delà de -40 dB/décade à partir d'une centaine de Hz.

<u>Question 2 :</u> validation du modèle en boucle fermée, essais sur un premier prototype

21) Classiquement, afin que l'écart nul corresponde à une erreur nulle, il faut que le gain du transducteur d'entrée soit celui du capteur, d'où :

$K_1 = K_4 = 4125$ V/rad



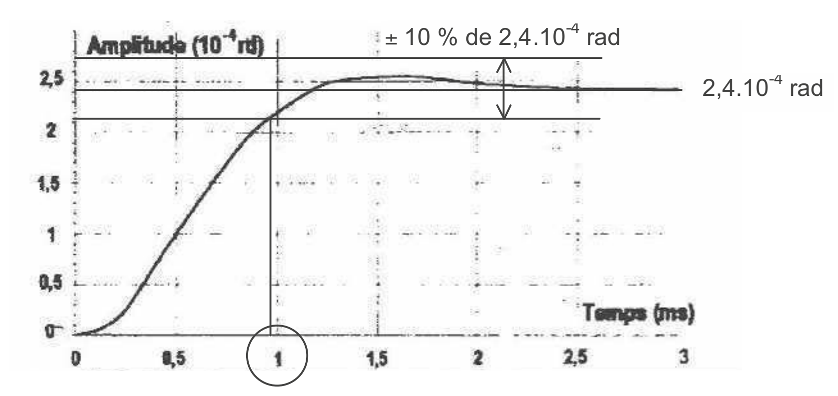
22) Sur le diagramme de Bode issu de la modélisation on mesure un gain statique de <u>-72,3 dB</u>, ce qui correspond à un gain en boucle fermée de $10^{-72,3/20} \approx \boxed{2,42.10^{-4}\ \text{rad/V}}$.

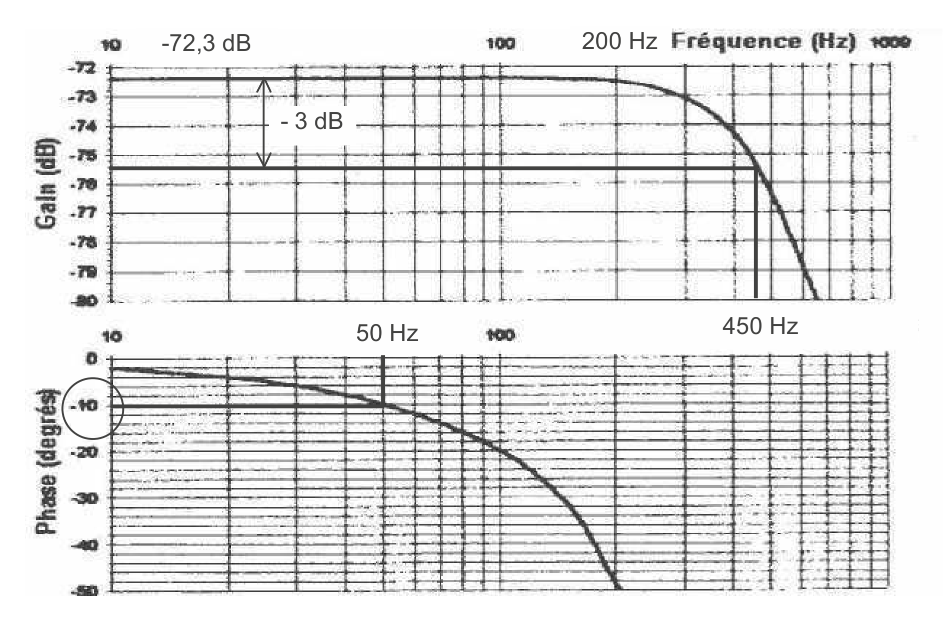
Ce gain est cohérent avec la valeur finale de $2,4.10^{-4}$ rad lue sur la réponse à un échelon de 1 V.

On vérifie que ce gain est bien $2,42.10^{-4} \approx \dfrac{1}{4125} = \dfrac{1}{K_1}$ rad/V.

Ceci est cohérent avec la définition du système considéré, dont l'entrée est la <u>tension</u> issue de la carte de commande.

23) On effectue les relevés suivants afin de mesurer les performances attendues par le cahier des charges :





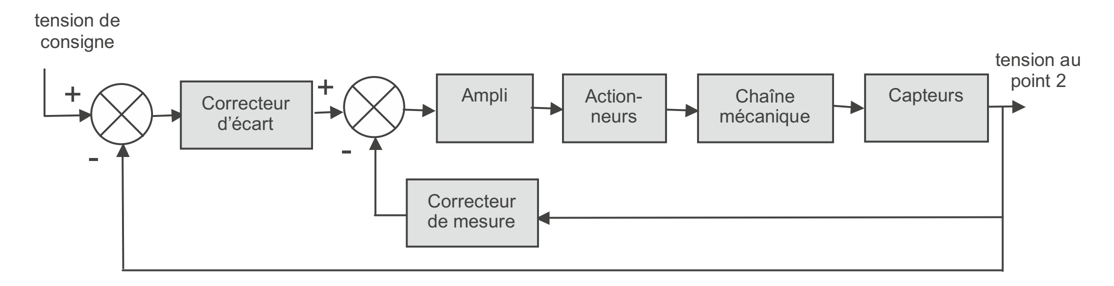
D'où les performances comparées :

Performance	**Attendue par le cahier des charges**	**Prévue par le modèle**	**Validation**
Temps de réponse à 90% de la valeur finale	2 ms maxi	≈ 1 ms	✓
Premier dépassement en réponse indicielle	10% maxi	≈ 5%	✓
Plage de fréquences sans atténuation	100 Hz mini	≈ 200Hz	✓
Bande passante à -3 dB	400 Hz mini	≈ 450 Hz	✓
Retard de phase à 50 Hz	20° maxi	≈ 10°	✓

Le modèle théorique prévoit donc bien la validation du cahier des charges.

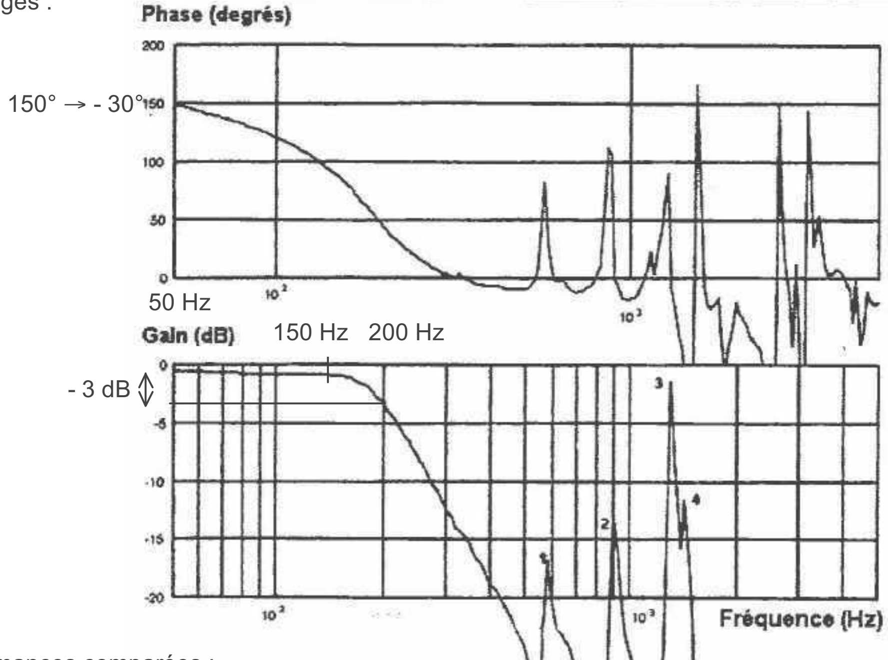
24) Sur le prototype, l'essai fréquentiel est réalisé en relevant, non pas la position angulaire comme précédemment, ce qui est matériellement impossible, mais son image à la sortie du capteur, c'est-à-dire la tension au point 2.

Cela modifie la fonction de transfert qui est donc celle du système décrit par le schéma bloc qui suit.



Le gain de ce système, précis et à retour unitaire, est clairement unitaire, ce que confirme le relevé expérimental qui montre un gain de sensiblement 0 dB aux basses fréquences. Une autre façon de voir est de se souvenir que le gain de la fonction de transfert précédente était l'inverse de celui du capteur. Cf. questions 21 et 22. Le gain de la fonction de transfert évaluée sur le prototype devant être augmenté de celui du capteur, on retrouve bien le résultat.

On effectue les relevés suivants afin de mesurer les performances fréquentielles attendues par le cahier des charges :



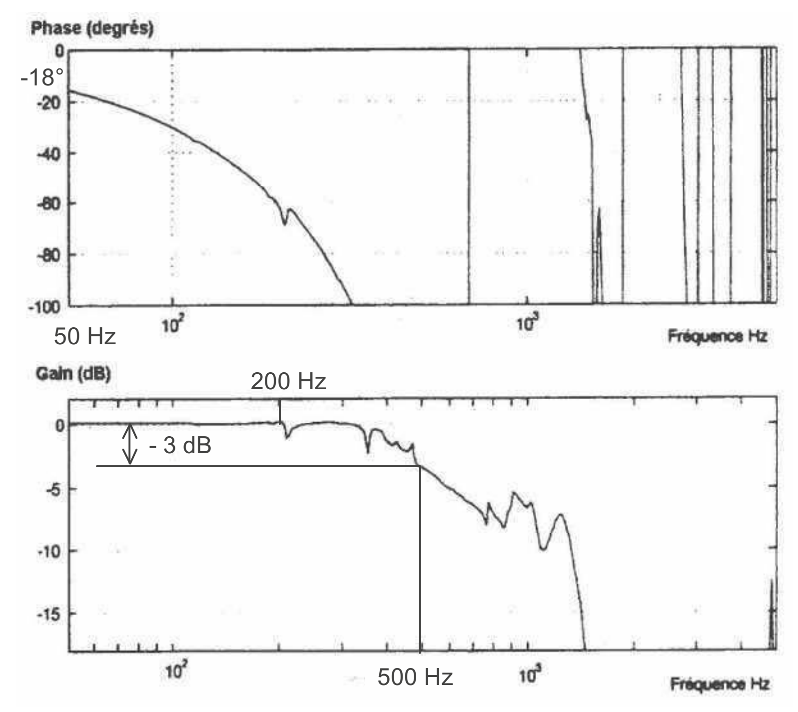
D'où les performances comparées :

Performance	Attendue par le cahier des charges	Mesurée sur le prototype	Validation
Plage de fréquences sans atténuation	100 Hz mini	≈ 150Hz	✓
Bande passante à -3 dB	400 Hz mini	≈ 200 Hz	
Retard de phase à 50 Hz	20° maxi	≈ 30°	

Seule la première performance est réalisée. La bande passante à -3 dB est insuffisante et le déphasage à 50 Hz est trop important. Par ailleurs, d'importants pics de résonance non prévus par le modèle apparaissent au delà de 500 Hz. Même si le cahier des charges n'y fait pas référence, cela peut sembler préjudiciable à la tenue du système s'il est sollicité sur ces fréquences.

<u>Question 3 :</u> second prototype

31) On effectue les relevés suivants que l'on compare aux attentes :

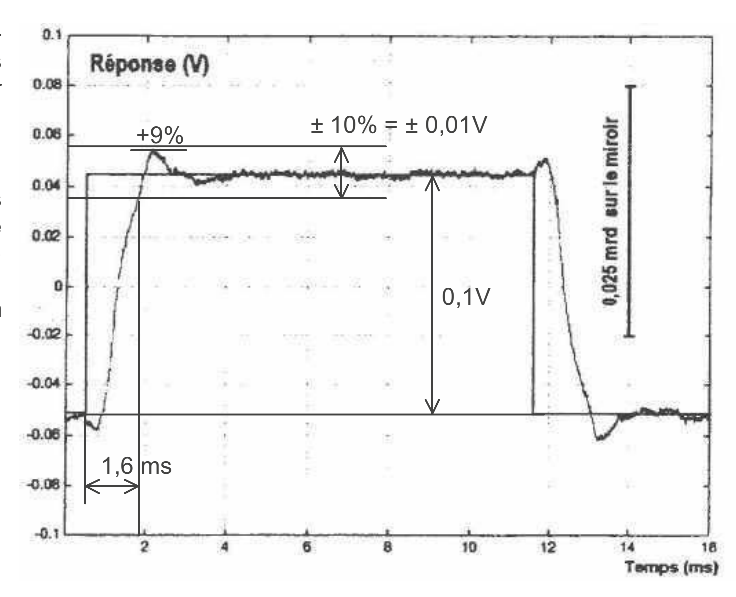


Performance	Attendue	Prototype 2	Validation
Plage de fréquences sans atténuation	100 Hz mini	≈ 200 Hz	✓
Bande passante à -3 dB	400 Hz mini	≈ 500 Hz	✓
Retard de phase à 50 Hz	20° maxi	≈ 18°	✓

Pour ce second prototype, le cahier des charges est donc validé en ce qui concerne les aspects fréquentiels. Par ailleurs, les pics de résonance au-delà de 500 Hz ont été fortement diminués.

32) On effectue les relevés ci-contre qui valident les performances attendues. Voir tableau.

Les améliorations apportées sur ce second prototype permettent donc de satisfaire le cahier des charges, tant d'un point de vue temporel que d'un point de vue fréquentiel.

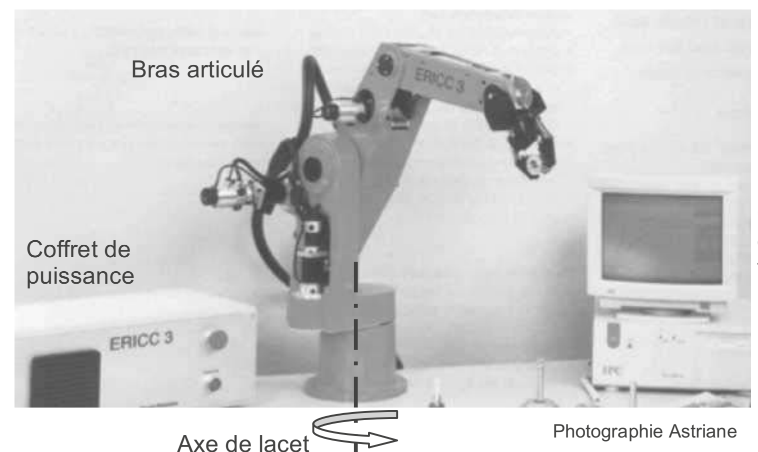


Performance	Attendue	Prototype 2	Validation
Temps de réponse à 90% de la valeur finale	2 ms maxi	≈ 1,6 ms	✓
Premier dépassement en réponse indicielle	10% maxi	≈ 9%	✓

IV - AXE DE LACET DU ROBOT ERICC 3

IV-1 Présentation

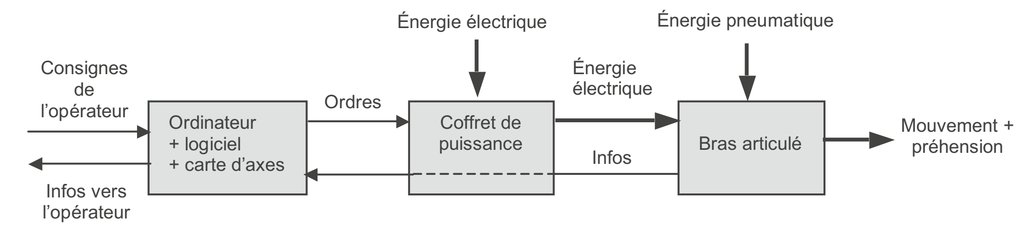
Le robot Ericc 3 est un robot série 5 axes , proposé pour le laboratoire de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur des classes préparatoires scientifiques. Il est commercialisé par la société Astriane (http://www.astriane.com) à partir d'un robot initialement développé par le constructeur ABB (http://www.abb.fr).



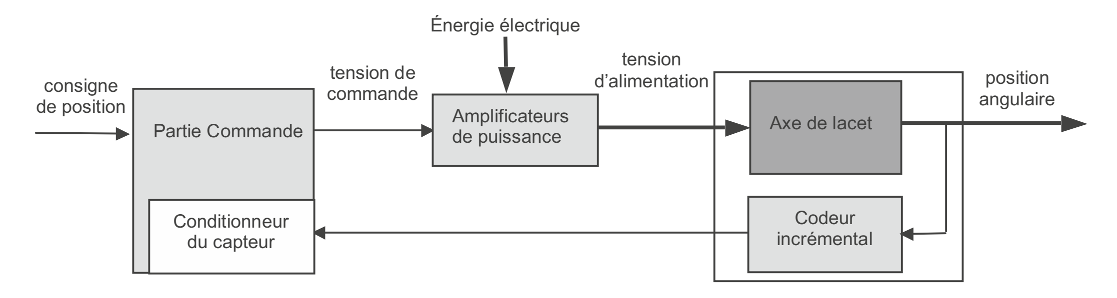
Photographie Astriane

Le système opérationnel entier est constitué :

- d'un ordinateur équipé d'un logiciel de commande et d'une carte d'axes qui assure l'ensemble des asservissements (comparateurs + correcteurs) ;
- d'un coffret de puissance comportant principalement les alimentations électriques et les préactionneurs (amplificateurs de puissance) des cinq moteurs ;
- d'un bras articulé comportant la partie opérative (cinq axes + pince pneumatique), le préactionneur du vérin de la pince pneumatique (électrovanne) et les différents capteurs.

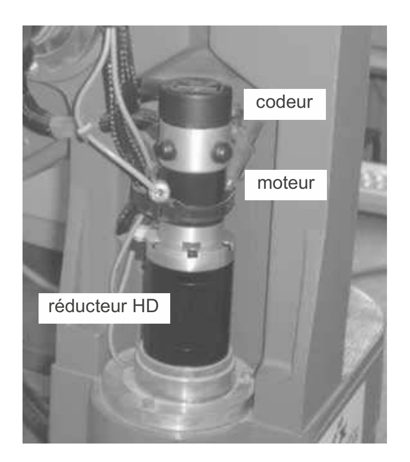


On s'intéresse ici à la chaîne fonctionnelle de l'axe de lacet qui permet le positionnement angulaire du bras autour de son axe vertical. Les différentes composantes de cette chaîne fonctionnelle peuvent être identifiées et localisées dans les trois sous-ensembles précédents, selon le schéma :

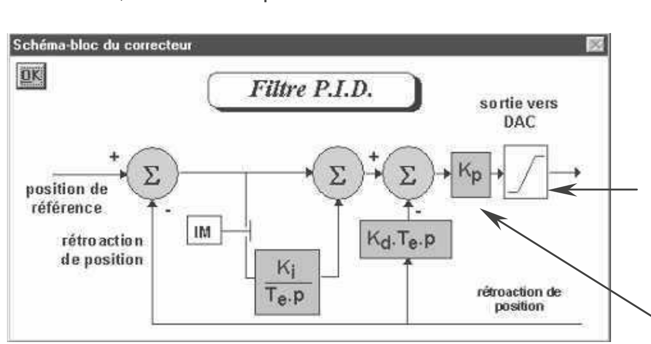


La partie opérative est constituée d'un moteur à courant continu (associé à son codeur), d'un réducteur de type Harmonic Drive (http://www.harmonicdrive.fr) puis d'un réducteur poulie - courroie crantée.


réducteur Harmonic Drive



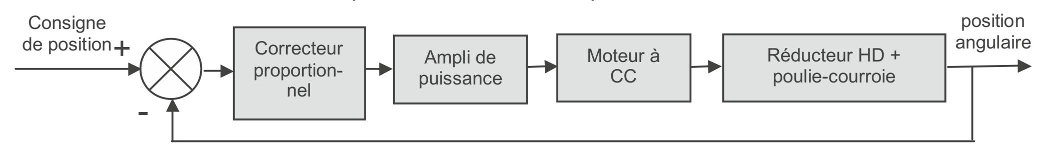
L'ensemble partie commande et amplification de puissance est réalisé selon la structure de correcteur PID à dérivation sur le retour, comme indiqué ci-dessous.



L'amplification de puissance limite la tension d'alimentation du moteur à courant continu à ± 10 V.

Dans cette étude, le correcteur PID sera réglé comme un simple gain K_p (intégrant le gain du capteur de position et celui de l'amplificateur de puissance), soit ci-dessus $K_i = 0$ et $K_d = 0$.

La structure de la chaîne étudiée peut donc être décrite par le schéma :



- Les blocs en série « correcteur proportionnel » et « Ampli de puissance » sont équivalents à un simple gain K_p, avec une <u>saturation</u> en sortie à ± 10 V.
- Le bloc « Moteur à CC » de sortie sa vitesse de rotation, peut être modélisé comme un système fondamental du 1er ordre si ses effets inductifs sont négligeables (ou du 2ème ordre sinon) :

  $$M(p) = \frac{K_m}{1+Tp}$$

- Le bloc « Réducteur HD + poulie-courroie » est un simple gain R correspondant au rapport de réduction global, associé à une intégration puisque sa sortie est la position angulaire :

  $$R(p) = \frac{R}{p}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte du système, <u>hors situation de saturation de l'amplificateur de puissance</u>, est donc d'ordre 2 et de classe 1 si les effets inductifs sont négligeables (d'ordre 3 et de classe 1 sinon). La fonction de transfert en boucle fermée est donc d'ordre 2 (ou d'ordre 3), de classe 0 et de gain 1 :

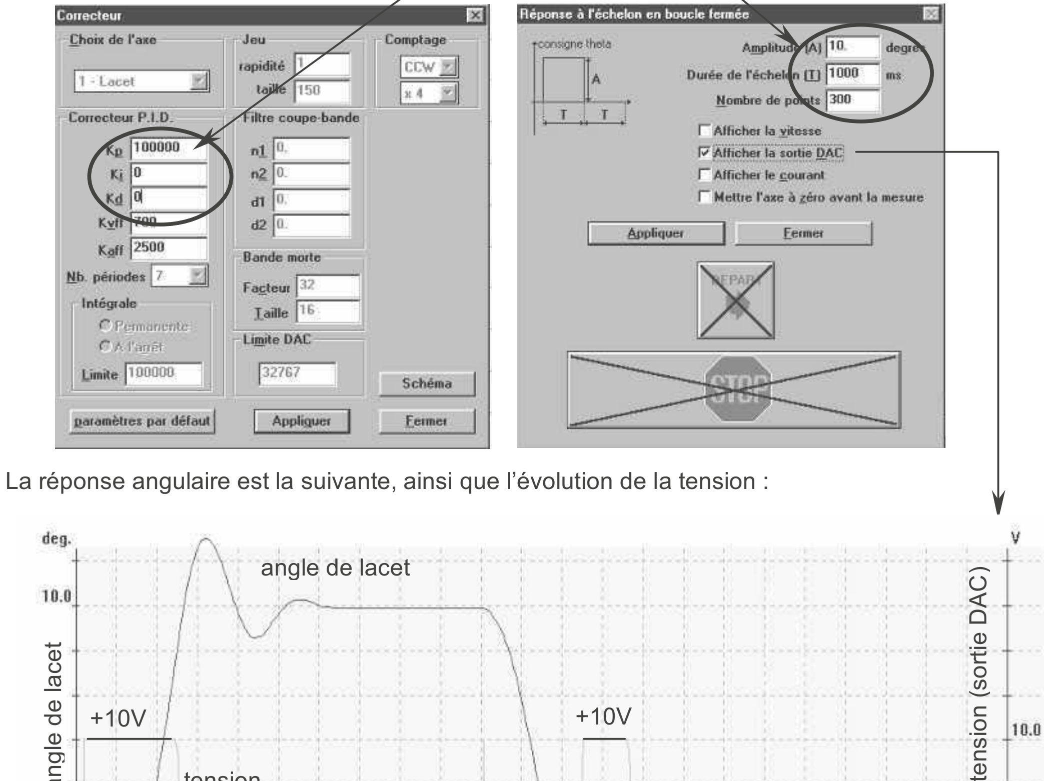
$$FTBO(p) = \frac{K_pK_mR}{p(1+Tp)} \quad \text{et} \quad FTBP(p) = \frac{1}{1+\frac{1}{K_pK_mR}p+\frac{T}{K_pK_mR}p^2} = \frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

L'objectif de cet exercice est de procéder à un essai de réponse indicielle et à une étude fréquentielle, afin de valider l'hypothèse autorisant à négliger les effets inductifs et d'identifier alors les coefficients z et ω_0 de la fonction de transfert.

IV-2 Travail demandé

<u>Question 1 :</u> réponse indicielle

11) Pour un réglage du gain à K_p = 100000, on commande un échelon de 10°.



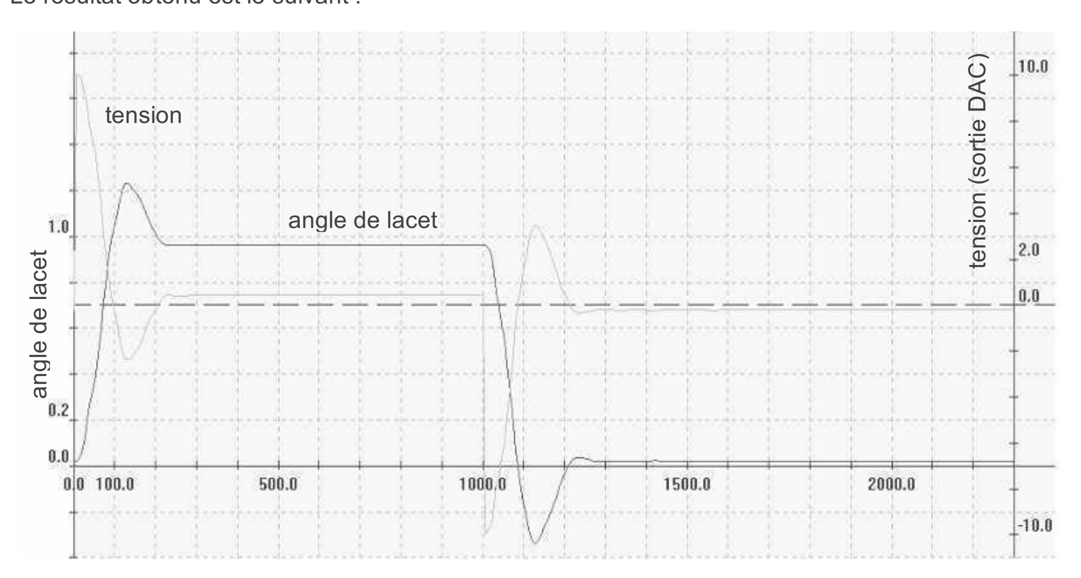
La réponse angulaire est la suivante, ainsi que l'évolution de la tension :

Quels sont les éléments cohérents avec le modèle fondamental du deuxième ordre proposé ?

Relever l'instant du premier dépassement, ainsi que la pseudo période des oscillations. Leur rapport est-il caractéristique d'un système fondamental du deuxième ordre ?

Quelle est l'origine principale de ce ralentissement ?

12) Pour éviter l'apparition de la saturation de tension, on procède à un échelon de seulement 1°. Le résultat obtenu est le suivant :

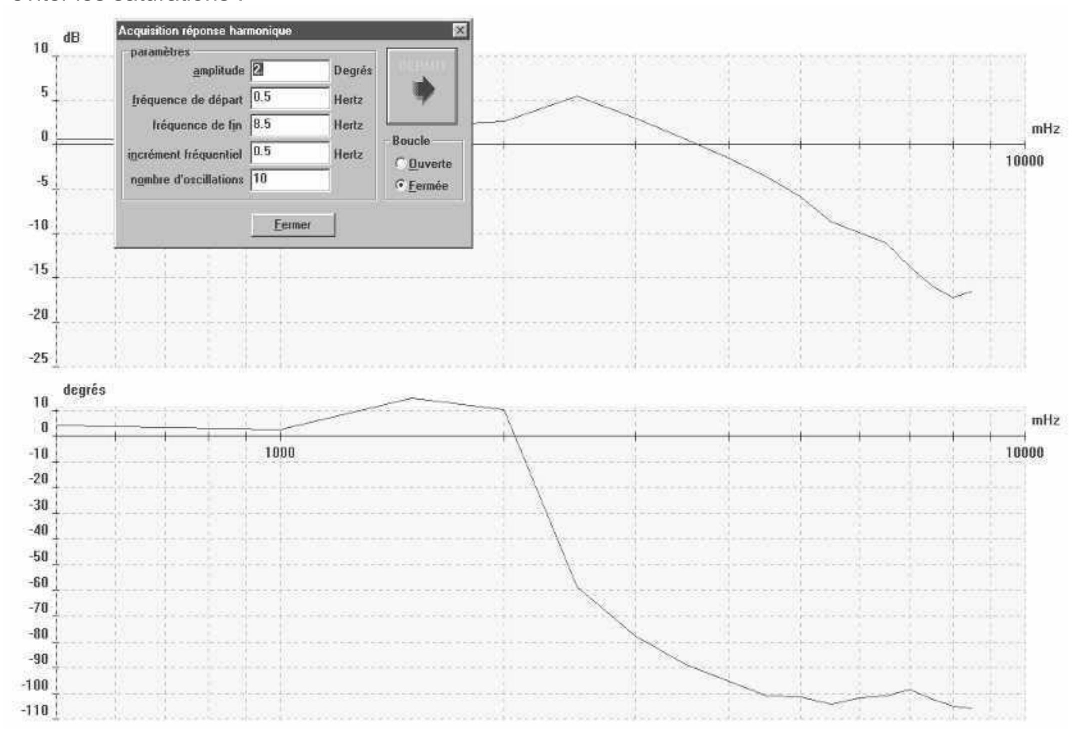


Qu'observe-t-on ?

13) À partir des résultats précédents, proposer un modèle du second ordre du système en l'absence de saturation de la tension.

<u>Question 2 :</u> réponse fréquentielle

Le logiciel de pilotage permet d'exercer un balayage fréquentiel de commande, puis le tracé du diagramme de Bode de la chaîne de lacet, soit pour une amplitude de 2°, suffisamment faible pour éviter les saturations :



21) Quels sont les premiers éléments observés cohérents avec le modèle fondamental du deuxième ordre proposé ? Quelles en sont les limites ?

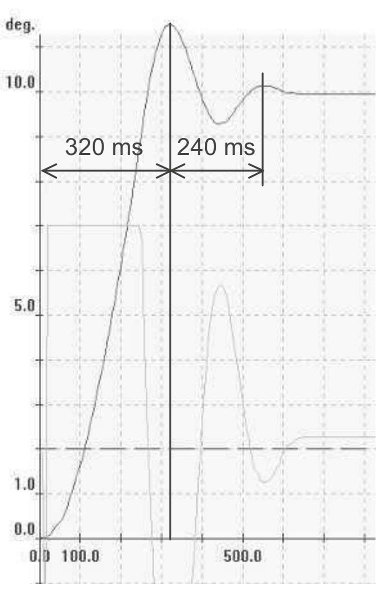
22) À partir de ce diagramme de Bode, mesurer la pulsation propre non amortie et le facteur d'amortissement du système modélisé comme un second ordre et comparer ces valeurs à celles évaluées à partir de la réponse indicielle. Conclusion.

IV-3 Correction

Question 1 : réponse indicielle

11) On observe tout d'abord que le système est précis : la réponse tend bien sensiblement, à la précision près du codeur, vers les 10° de consigne. Ceci confirme le gain unitaire.

De plus, la tangente horizontale à l'origine et les oscillations correspondent bien à l'allure de la réponse indicielle d'un système fondamental du second ordre faiblement amorti.



On relève :

- l'instant du premier dépassement : $t_1 \approx 0,32$ s
- la pseudo période des oscillations : $T \approx 0,24$ s

Or, pour un système fondamental du second ordre, ces temps sont dans le rapport $t_1 = T/2$, ce qui n'est donc pas du tout le cas.

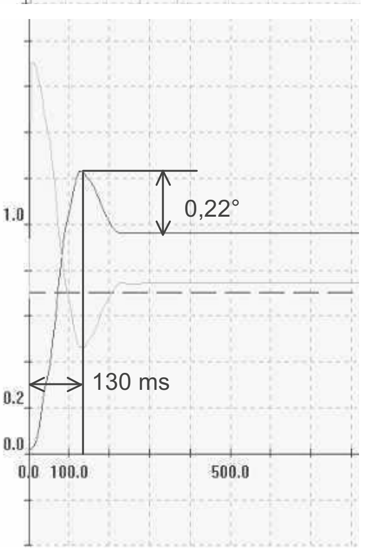
Le système est fortement ralenti compte tenu de la saturation de tension qui limite la vitesse du moteur.

12) Lorsque la consigne n'est plus que de 1°, on observe que la tension ne sature plus.

On observe également qu'alors la réponse n'est pas tout à fait précise, certainement à cause de la tension alors trop faible pour vaincre les quelques frottements. Toutefois, on peut considérer cette imprécision comme négligeable et confirmer, à peu près le gain unitaire.

Seule la première oscillation est matériellement perceptible.





13) On relève :

- l'instant du premier dépassement : $t_1 \approx 0,13$ s
- le niveau du premier dépassement : $D_1 \approx 0,22° = 22\%$

On peut noter que l'instant du premier dépassement est cette fois à peu près cohérent avec la pseudo période des oscillations mesurée précédemment (0,24s).

Sachant que $D_1 = e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$, il vient, en retenant la racine positive :

$$z = \frac{-\ln D_1}{\sqrt{\pi^2 + (\ln D_1)^2}} \approx \boxed{0,43}$$

On peut alors calculer le niveau du 3ème dépassement (2ème maximum) qui est :

$D_3 = e^{-\frac{3\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} = 0,011°$, effectivement imperceptible.

Par ailleurs, l'instant du premier dépassement vaut : $t_1 = \dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$.

Il vient donc : $\omega_0 = \dfrac{\pi}{t_1\sqrt{1-z^2}} \approx \boxed{26{,}7\ \text{rad/s}}$

Ainsi, en l'absence de saturation de la tension, le modèle suivant peut être proposé pour le système :

$$\text{FTBP}(p) = \frac{1}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2} \quad \text{avec } z = 0{,}43 \text{ et } \omega_0 = 26{,}7 \text{ rad/s}$$

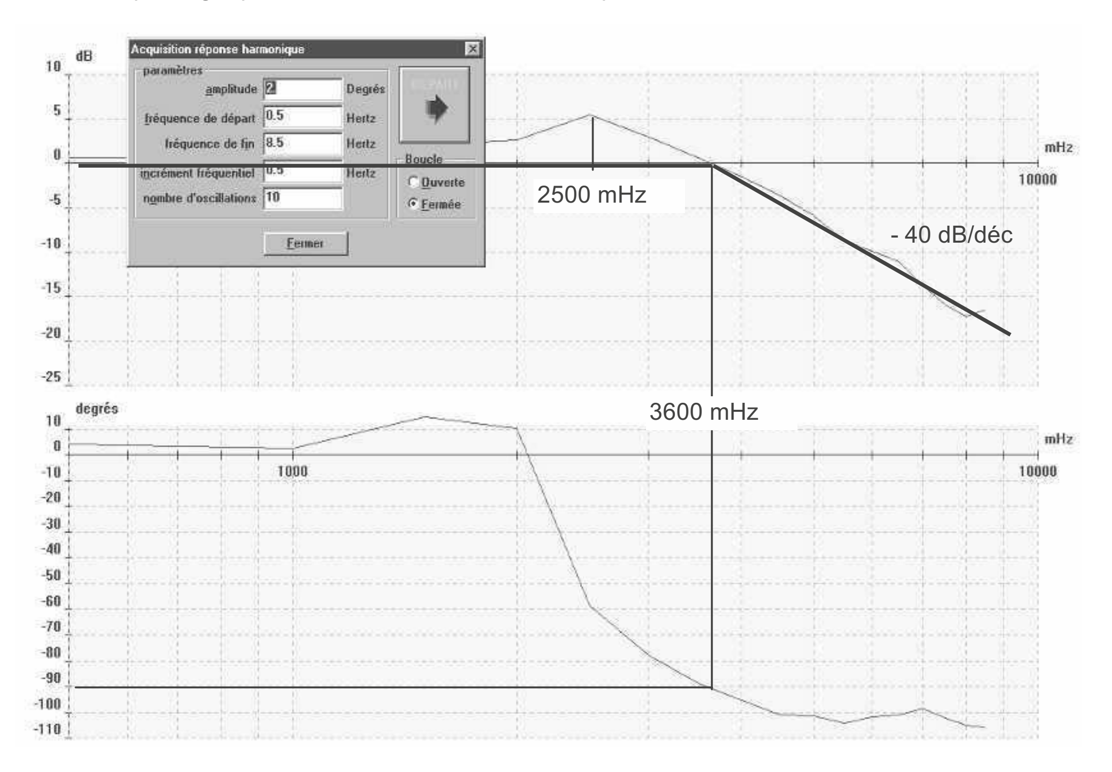
<u>Question 2 :</u> réponse fréquentielle

21) Les éléments immédiatement cohérents avec le modèle proposé sont :

- un gain statique de 0 dB ;
- un comportement asymptotique à -40 dB/décade aux grandes fréquences ;
- un phénomène de résonance compatible avec $z < 1/\sqrt{2}$.

En revanche, on observe quelques limites sur la courbe de phase :

- un comportement d'avance de phase entre 1000 et 2000 mHz ;
- un déphasage qui semble se limiter à -110° et ne pas tendre vers -180°.



22) Si on considère l'avance de phase comme une erreur de mesure et si on limite l'étude à des fréquences inférieures à 5000 mHz (5Hz), un modèle fondamental du deuxième ordre semble acceptable. Au delà de 5 Hz, des saturations de tension doivent apparaître.

La pulsation qui déphase de -90° est alors la pulsation propre non amortie ω_0. On mesure pour ce déphasage une fréquence de 3,6 Hz. On peut noter que cette fréquence est en accord total avec la cassure des asymptotes.

D'où $\omega_0 = 2\pi x 3{,}6 = \boxed{22{,}6\,\text{rad/s}}$ à rapprocher des 26,7 rad/s mesurés sur la réponse indicielle.

Par ailleurs, la pulsation de résonance est donnée par $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2}$. On mesure une fréquence de résonance de l'ordre de 2,5 Hz. Elle permet donc de calculer z par la relation :

$$z = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2}{2}} \boxed{\approx 0,5}$$ à rapprocher de 0,43 mesuré sur la réponse indicielle.

Les résultats, compte tenu des différentes imprécisions de mesures sont relativement cohérents.

En conclusion, et après quelques arrondis, on acceptera, en situation d'absence de saturation de la tension, et pour des fréquences d'utilisation n'excédant pas 5 Hz, le modèle suivant pour l'axe de lacet :

$$\boxed{FTBP(p) = \frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2} \text{ avec } z \approx 0,45 \text{ et } \omega_0 \approx 25 \text{ rad/s}}$$

Remarque : Le gain à la résonance dépend du facteur d'amortissement, soit pour z = 0,45 :

$$G_r = 20\log\frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}} \approx 2 \text{ dB}$$

On peut alors s'étonner de la valeur de 5 dB relevée expérimentalement. Une saturation de la tension devrait au contraire limiter la résonance. Par contre il n'est pas improbable que des phénomènes inductifs au niveau du bobinage du moteur, augmentant l'ordre de la fonction de transfert par rapport au modèle, viennent accentuer cette résonance.

V - ROBOT POUR LA CHIRURGIE ENDOSCOPIQUE

D'après une épreuve du Concours Banque PT.

V-1 Présentation

Les avancées technologiques dans le domaine de la chirurgie permettent actuellement de réaliser des opérations de très grande complexité avec des avantages pour le patient qui proviennent de la limitation des zones de dissection, ce qui réduit considérablement le traumatisme opératoire.

Plusieurs étapes ont été récemment franchies lors de la mise au point des solutions limitant l'étendue des incisions dans le corps du patient, et permettant néanmoins au chirurgien l'accès aux organes à soigner.



Celui-ci est aujourd'hui installé devant un poste de commande et de contrôle pour commander à distance des robots portant les outils chirurgicaux.
Ce poste nommé "console" contient :

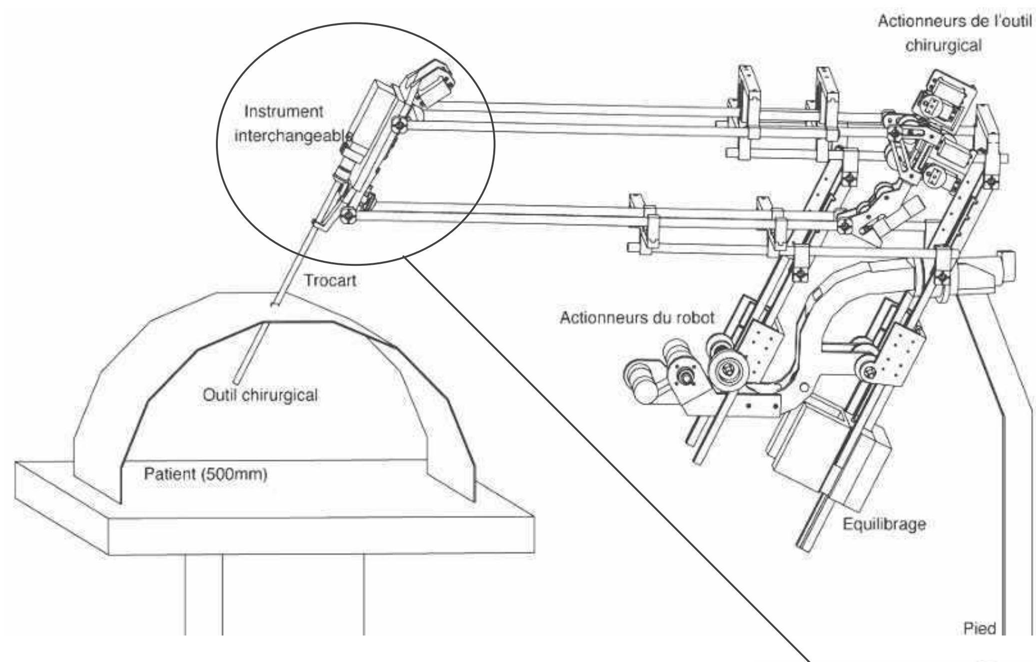
- les dispositifs d'acquisition des mouvements du chirurgien,
- un écran vidéo pour le retour d'image provenant de l'endoscope,
- un écran de contrôle du système informatique.

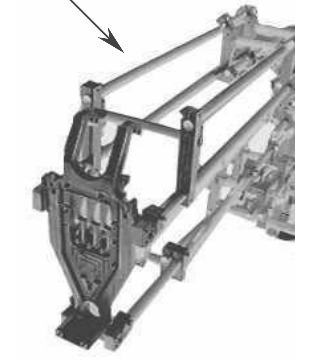
Outre le confort opératoire pour le chirurgien, le principal avantage du système robotisé est de permettre le traitement des ordres générés par la console, avant que ceux-ci ne soient transmis aux robots esclaves.

On peut par exemple utiliser ce traitement pour :

- limiter les débattements des outils,
- filtrer les mouvements vibratoires,
- changer d'échelle et permettre des déplacements infinitésimaux.

On s'intéresse ici à un prototype de robot appelé "Endoxirob" ou "robot pour la chirurgie endoscopique" (cf. http://www.endoxirob.com). Ce robot a été présenté pour la première fois en 2002 au "Salon International des Techniques et Énergies du Futur" de Toulouse.

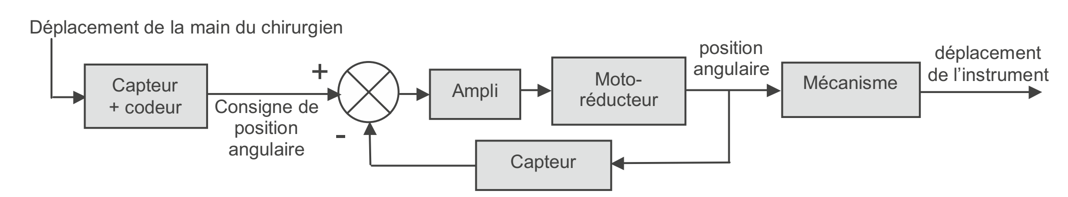




Sur l'extrémité du bras de robot, les instruments chirurgicaux sont interchangeables. L'échange d'instruments s'effectue rapidement pendant l'utilisation du robot.

Le choix technologique des ingénieurs a été de placer les actionneurs électriques de l'outil chirurgical non pas sur l'instrument chirurgical lui-même, mais sur la structure du robot ; ce choix a conduit à la conception d'une interface mécanique spécifique, à poussoirs, permettant le transfert des actions de commande des actionneurs vers l'outil chirurgical. La photographie ci-contre montre la plaque d'extrémité du bras de robot, sur laquelle l'instrument chirurgical vient se positionner et se fixer. Des ouvertures usinées permettent le passage des poussoirs.

Le schéma bloc ci-dessous présente la commande du déplacement de l'instrument :

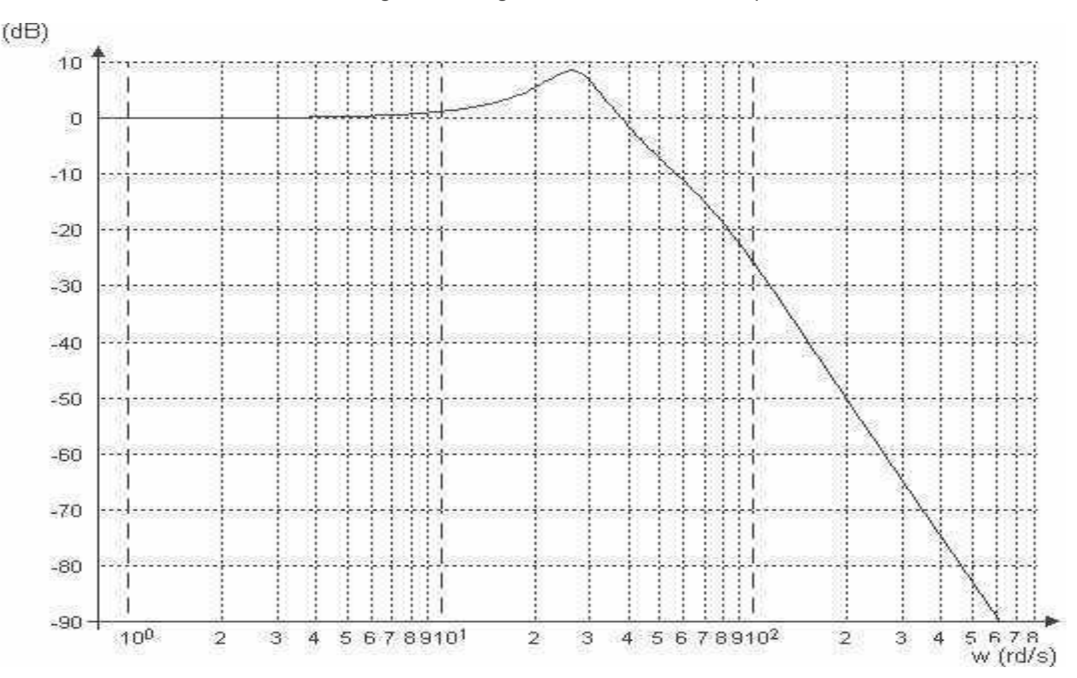


La console permet de capter le déplacement de la main et de le coder (et éventuellement le filtrer, cf. plus loin) afin d'élaborer la tension de consigne de position angulaire du moto-réducteur. La position angulaire est ensuite transformée en position linéaire de l'instrument, par un mécanisme de transformation de mouvement à crémaillère.

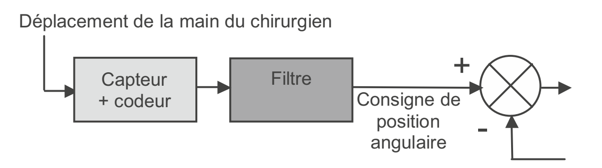
La fonction de transfert du système décrit par le schéma bloc précédent est estimée à :

$$H(p) = \frac{D_{instrument}(p)}{D_{main}(p)} = \frac{1}{(1+0,014p+0,00017p^2)(1+0,015p+0,0014p^2)}$$

On donne ci-dessous la courbe de gain du diagramme de Bode correspondant.



L'objectif de l'exercice est la conception d'un filtre à insérer en série dans le bloc d'élaboration de la consigne angulaire, afin de limiter l'amplitude de l'instrument lors du tremblement de la main du chirurgien, tout en préservant une bande passante suffisante au système.



V-2 Travail demandé

<u>Question 1 :</u> Analyse de la fonction de transfert

11) Déterminer le diagramme de Bode asymptotique de la fonction H(p) et le représenter en superposition sur la courbe de gain donnée ci-dessus.

12) Qu'observe-t-on en termes de résonance ?

13) Quelle est l'amplitude du mouvement pris par l'instrument, lorsque la main du chirurgien est prise d'un tremblement sensiblement sinusoïdal d'amplitude 1 mm et de période 0,25 s ?

<u>Question 2 :</u> Choix de filtres

Afin de limiter l'amplitude du mouvement de l'instrument lors du tremblement de la main du chirurgien, on souhaite insérer, comme indiqué plus haut, un filtre dans la chaîne fonctionnelle, en amont du comparateur. On propose trois filtres du premier ordre de fonctions de transfert respectives :

$$F_1(p) = \frac{1}{1+0,04p} \; ; \; F_2(p) = \frac{1}{1+0,1p} \; ; \; F_3(p) = \frac{1}{1+0,5p}$$

21) Tracer, sur le diagramme de gain de H(p), les diagrammes asymptotiques de ces trois filtres.

22) Choisir parmi ces trois filtres, ceux qui atténuent la résonance constatée pour le tremblement de période 0,25 s de la main du chirurgien.

23) Le filtre retenu ne doit, bien entendu, pas filtrer les mouvements souhaités par le chirurgien. On considère qu'un mouvement dont la période est supérieure à 1 s est un mouvement volontaire, et non un tremblement. Un tel mouvement ne doit pas être atténué de plus de 1 dB. Retenir en conséquence le filtre qui convient.

Cette exigence aurait pu être formulée en termes de bande passante, en imposant une bande passante à -1 dB d'au moins 1 Hz. Mais le cahier des charges impose en fait, pour des raisons de rapidité en comportement temporel (réponse à un échelon ou à une rampe), une bande passante plus exigeante, à savoir une bande passante à -3 dB d'au moins 4 Hz.

24) Vérifier cette bande passante sur les tracés précédents, pour le filtre retenu.

<u>Question 3 :</u> Analyse de la fonction de transfert

Les différents résultats ont été établis à partir du diagramme asymptotique du filtre. Pour une meilleure précision, tracer graphiquement la courbe de gain du système corrigé par le filtre retenu et vérifier les différentes exigences.



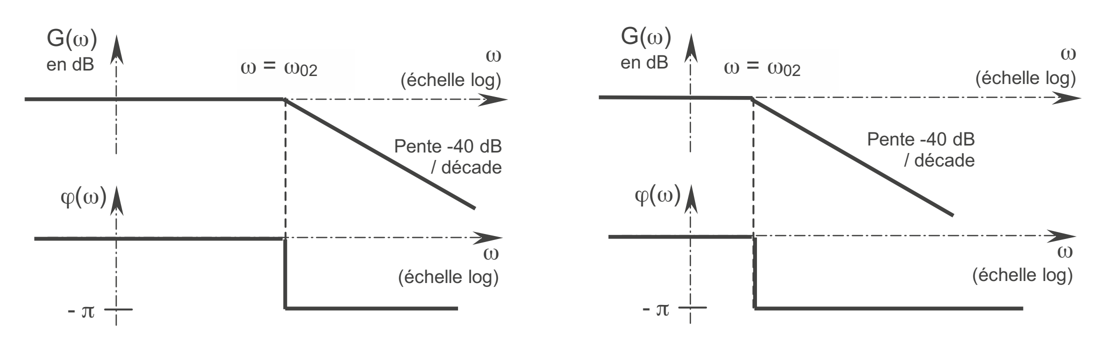
V-3 Correction

<u>Question 1 :</u> Analyse de la fonction de transfert

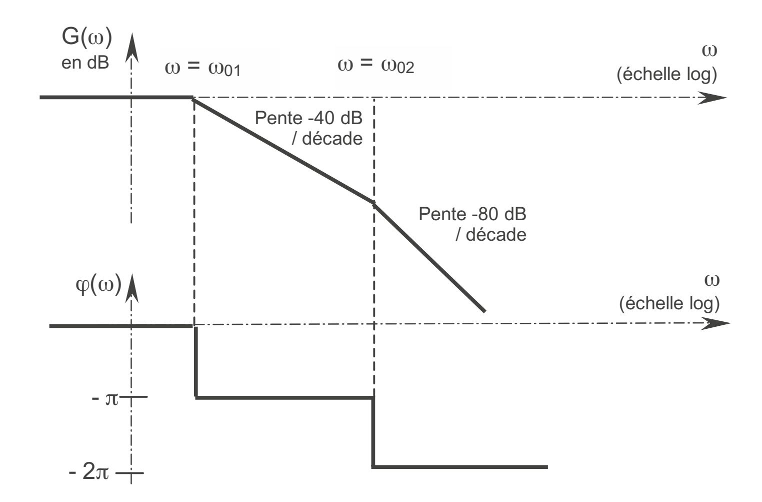
11) La fonction de transfert s'écrit comme le produit de deux fonctions de transfert du deuxième ordre :

$$\begin{cases} H_1(p) = \dfrac{1}{1+0,015p+0,0014p^2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{2z_1}{\omega_{01}}p+\dfrac{1}{\omega_{01}^2}p^2} \text{ avec } \omega_{01} = 26,7 \text{ rad/s et } z_1 = 0,20 \\ H_2(p) = \dfrac{1}{1+0,014p+0,00017p^2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{2z_2}{\omega_{02}}p+\dfrac{1}{\omega_{02}^2}p^2} \text{ avec } \omega_{02} = 76,7 \text{ rad/s et } z_2 = 0,54. \end{cases}$$

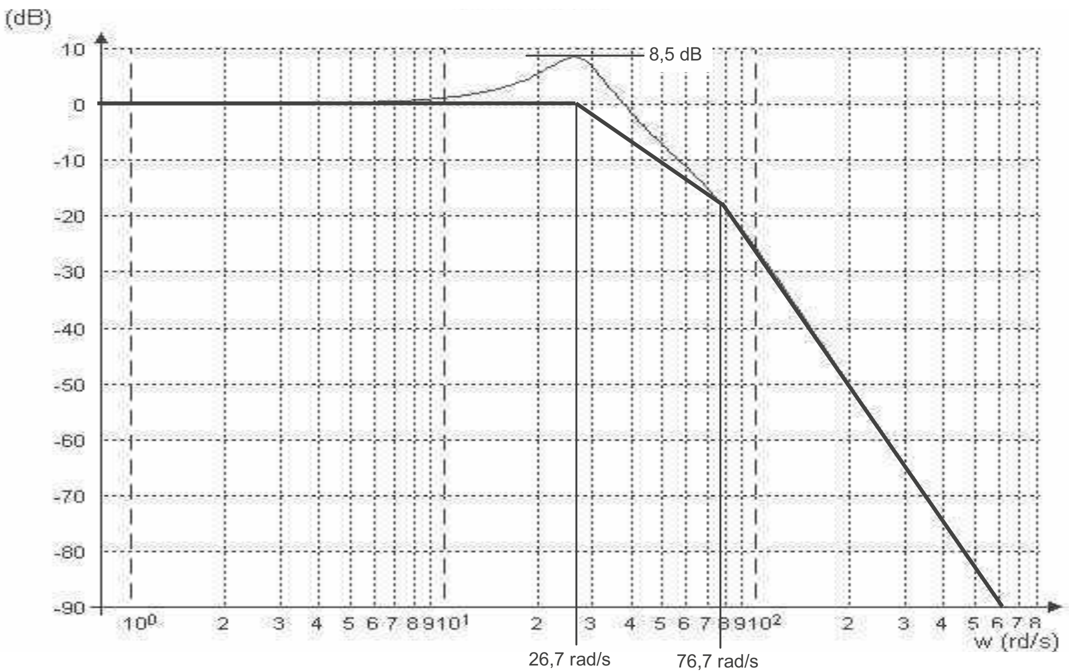
Leurs diagrammes de Bode asymptotiques sont donnés ci-dessous :



Et leur somme graphique permet classiquement d'obtenir le diagramme asymptotique de la fonction produit H(p) :



On peut alors superposer le diagramme asymptotique de gain sur le diagramme réel, comme demandé, et en vérifier la cohérence :



12) Le système possède donc deux pulsations de résonance :

$$\omega_{r1} = \omega_{01}\sqrt{1-2z_1^2} = 25,6 \text{ rad/s de niveau } G_{r1} = 20\log\frac{1}{2z_1\sqrt{1-z_1^2}} = 8,2 \text{ dB}$$

$$\omega_{r2} = \omega_{02}\sqrt{1-2z_2^2} = 49,5 \text{ rad/s de niveau } G_{r2} = 20\log\frac{1}{2z_2\sqrt{1-z_2^2}} = 0,83 \text{ dB}$$

On constate que la deuxième résonance, intrinsèquement assez faible, est quasiment totalement atténuée par la présence de la fonction $H_1(p)$, conduisant déjà pour une pulsation de 49,5 rad/s à une forte atténuation (de l'ordre de 10 dB). Seule la première résonance est perceptible, très légèrement amplifiée par la fonction $H_2(p)$ puisque l'on mesure +8,5 dB.

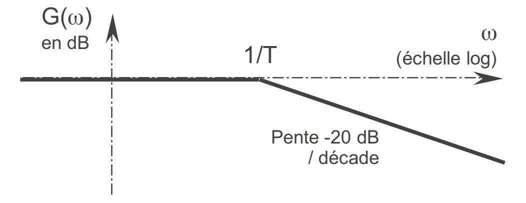
13) Un tremblement de la main du chirurgien selon une période de 0,25 s correspond à une pulsation de $2\pi/0{,}25 \approx 25{,}1$ rad/s. Ce tremblement se trouve être quasiment à la pulsation de résonance à 8,5 dB, il est donc amplifié selon le rapport :

$$10^{8{,}5/20} \approx 2{,}66$$

Ainsi si l'amplitude du tremblement de la main du chirurgien est de 1mm, celle de l'instrument sera de 2,66 mm, ce qui, bien entendu, est inacceptable.

Question 2 : Choix de filtres

21) Les trois filtres proposés sont des filtres passe-bas du premier ordre, dont les diagrammes asymptotiques de gain sont rappelés ci-contre, en fonction de la constante de temps T. Ils présentent donc respectivement une cassure (bande passante à -3 dB) de :

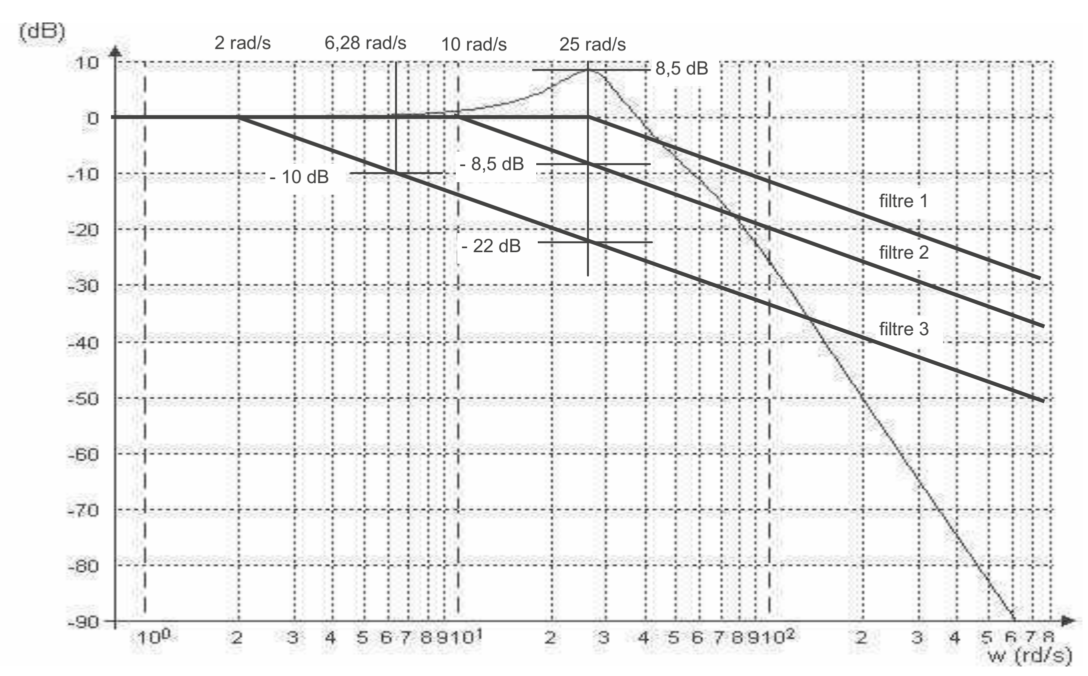


$1/T_1 = 1/0{,}04 = 25$ rad/s

$1/T_2 = 1/0{,}1 = 10$ rad/s

$1/T_3 = 1/0{,}5 = 2$ rad/s.

On peut donc tracer leurs diagrammes asymptotiques en superposition sur le diagramme de H(p) :



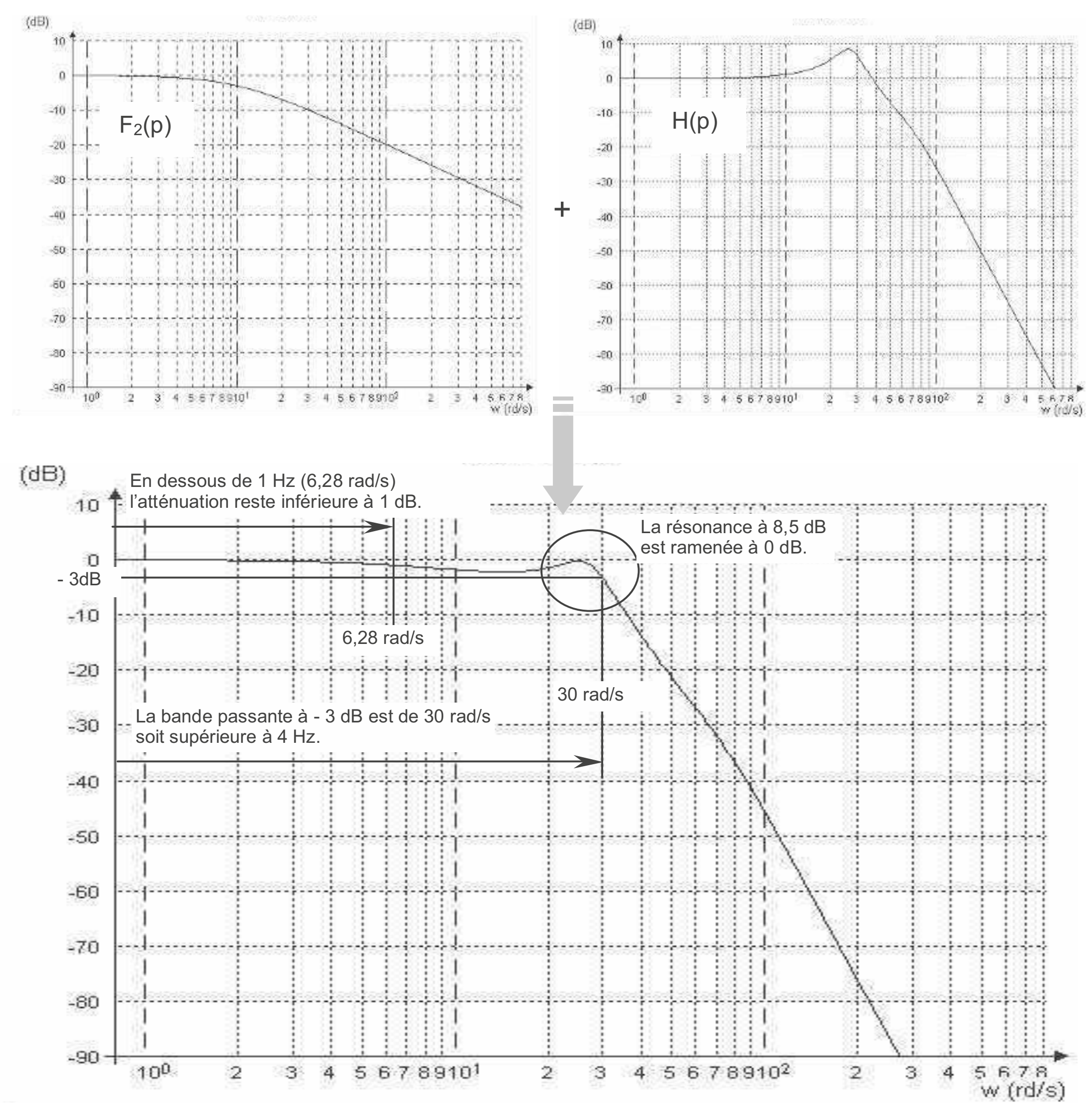
22) Il est clair que le filtre 1 présente une bande passante trop importante. La fréquence de résonance de l'ordre de 25 rad/s correspond en effet à sa pulsation de cassure, pour laquelle il n'atténue donc que de 3 dB, ce qui est insuffisant pour atténuer la résonance de 8,5 dB.
Par contre, les deux autres filtres atténuent correctement la résonance. Si on considère qu'une pulsation de 25 rad/s est pour ces deux filtres suffisamment éloignée de leurs pulsations de cassure pour pouvoir confondre leur diagramme réel et leur diagramme asymptotique, on lit respectivement une atténuation de 8,5 dB pour le filtre 2 (exactement la valeur nécessaire donc) et 22 dB pour le filtre 3 (largement suffisant).

23) Un mouvement volontaire de période 1 s correspond à une fréquence de 1 Hz ou encore à une pulsation de $2\pi \approx 6{,}28$ rad/s. Pour une telle pulsation, le filtre 1 atténue de 10 dB ce qui est très largement supérieur à ce qui est admis. Par contre le filtre 2 n'est encore quasiment pas atténuateur pour une telle pulsation. En conclusion, le filtre qui atténue le phénomène de résonance, sans atténuer les mouvements volontaires de basse fréquence, est donc le filtre 2.

24) Une bande passante de 4 Hz correspond à $8\pi \approx 25{,}1$ rad/s soit sensiblement la pulsation de résonance à 8,5 dB du système. Or, il a déjà été mesuré (question 22) que pour cette pulsation, le filtre 2 atténue environ de 8,5 dB. Aussi, le gain du système corrigé sera de l'ordre de 0 dB pour cette pulsation. La bande passante à -3 dB sera donc supérieure à 4 Hz comme attendu.

Question 3 : Vérification de la bande passante

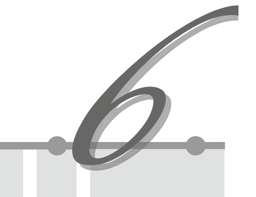
Un tracé suffisamment correct peut-être obtenu graphiquement en additionnant les diagrammes du filtre 2 et du système non filtré point par point. On trouvera ci-dessous, pour une meilleure précision, un tracé obtenu par logiciel :



On peut y vérifier que :

- Le système est atténuateur pour toutes les pulsations et en particulier au niveau de la résonance qui est donc correctement atténuée (situation limite de gain 0 dB).
- Pour des pulsations volontaires de la part du chirurgien, c'est-à-dire inférieures à 1 Hz (6,28 rad/s), l'atténuation reste imperceptible car inférieure à 1 dB.
- La bande passante à -3 dB est de l'ordre de 30 rad/s (soit 4,8 Hz), ce qui est bien supérieur aux 4 Hz minimum attendus pour assurer une rapidité correcte du système.

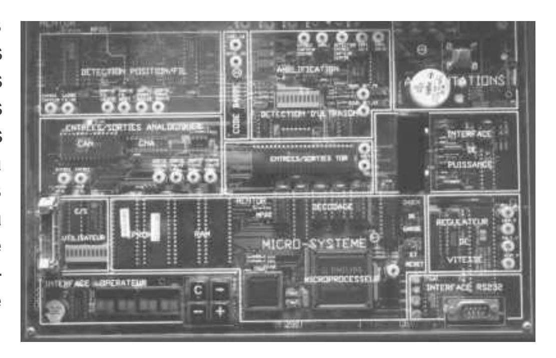
CORRECTION DES SYSTÈMES ASSERVIS



Ce dernier chapitre présente les bases de la correction des systèmes asservis. Celle-ci consiste en une modification de la structure de l'asservissement, lorsque celui-ci ne peut pas répondre aux performances attendues, en termes de précision, rapidité et stabilité.

Plusieurs solutions peuvent être retenues. La plus simple consiste à concevoir un élément appelé correcteur qui agit directement à partir de l'écart. Cf. Chapitre 2. Mais il est également possible de modifier la structure de l'asservissement lui-même, en introduisant des boucles internes plus ou moins sophistiquées. Dans ce chapitre, seules les solutions les plus élémentaires sont présentées. Elles permettent de traiter la grande majorité des problèmes rencontrés en automatique industrielle.

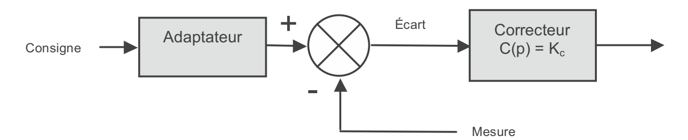
D'un point de vue technologique, les correcteurs sont aujourd'hui principalement des composants électroniques, parfois encore analogiques, mais de plus en plus numériques, implémentés dans des microcontrôleurs de commande. Les différentes constantes caractéristiques de la fonction de transfert de ces correcteurs sont alors accessibles et modifiables par programmation à l'aide d'un interfaçage avec un ordinateur et de l'utilisation d'un logiciel souvent spécifique. Ci-contre la carte de commande du chariot filoguidé Mentor Sciences, avec son microcontrôleur.



I - LA CORRECTION PROPORTIONNELLE

I-1 Définition et rappels

■ La correction proportionnelle est la plus simple des corrections. Elle consiste à introduire un correcteur agissant à partir de l'écart, dont ***la fonction de transfert est un simple gain*** (ci-dessous K_c), réglable.



On attend alors de la valeur de ce gain qu'elle assure les performances de précision, de rapidité et de stabilité attendues.

Les nombreux exemples déjà rencontrés dans cet ouvrage, ainsi que certains résultats démontrés, ont permis de constater un certain nombre de propriétés de cette correction proportionnelle. En particulier l'augmentation du gain :

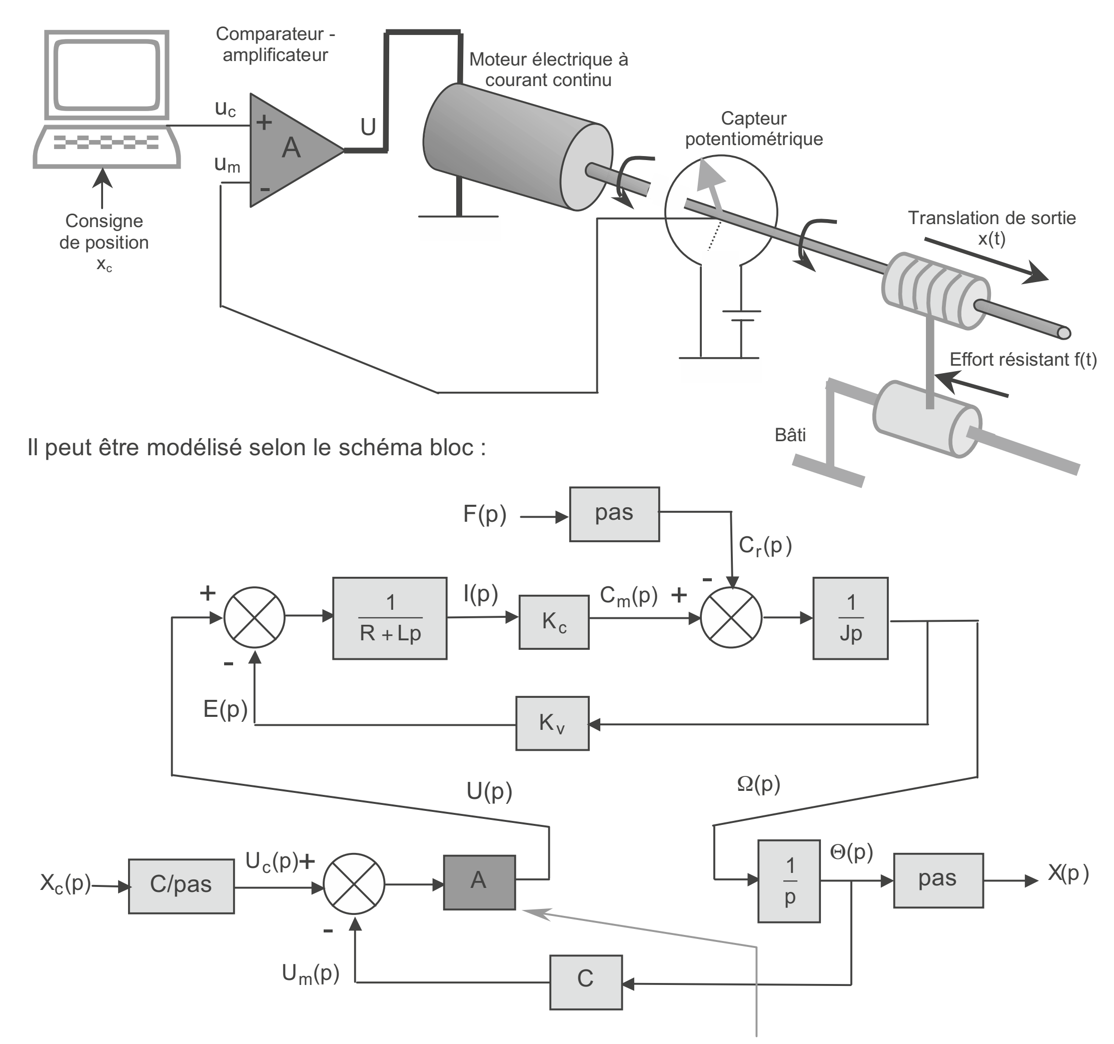
- permet, si nécessaire, d'***augmenter la précision*** de l'asservissement,
- peut introduire et/ou accentuer des oscillations de la réponse temporelle (impulsionnelle, indicielle, etc.), jusqu'à éventuellement ***déstabiliser*** le système,
- dans la limite introduite par ces oscillations, améliore la ***rapidité*** du système.

En particulier, concernant la précision, on sait qu'un système non perturbé n'est parfaitement précis pour une entrée en échelon que s'il existe au moins une intégration dans la boucle. Dans le cas contraire (classe nulle de la FTBO), il est d'autant plus précis que le gain de la boucle est grand. Ainsi, s'il existe au moins un intégrateur dans la boucle, la valeur du gain du correcteur proportionnel est bien entendu sans effet sur la précision, qui est acquise. En revanche, en l'absence d'intégrateur, l'augmentation du gain du correcteur, auquel le gain de boucle est proportionnel, permet d'augmenter la précision.

On sait également, qu'en présence d'une perturbation constante, la précision impose que « l'intégration ait eu lieu avant le lieu d'action de la perturbation ». Dans le cas contraire, l'effet de la perturbation est d'autant moins notoire que le gain de boucle, encore une fois, est grand. D'où, toujours l'intérêt en termes de précision, d'une augmentation du gain du correcteur.

Revoir le chapitre 3, paragraphe VII, si nécessaire.

■ L'asservissement de position par moteur à courant continu et système vis-écrou, présenté au chapitre 3, paragraphe V-6, permet d'observer assez clairement ces propriétés générales :



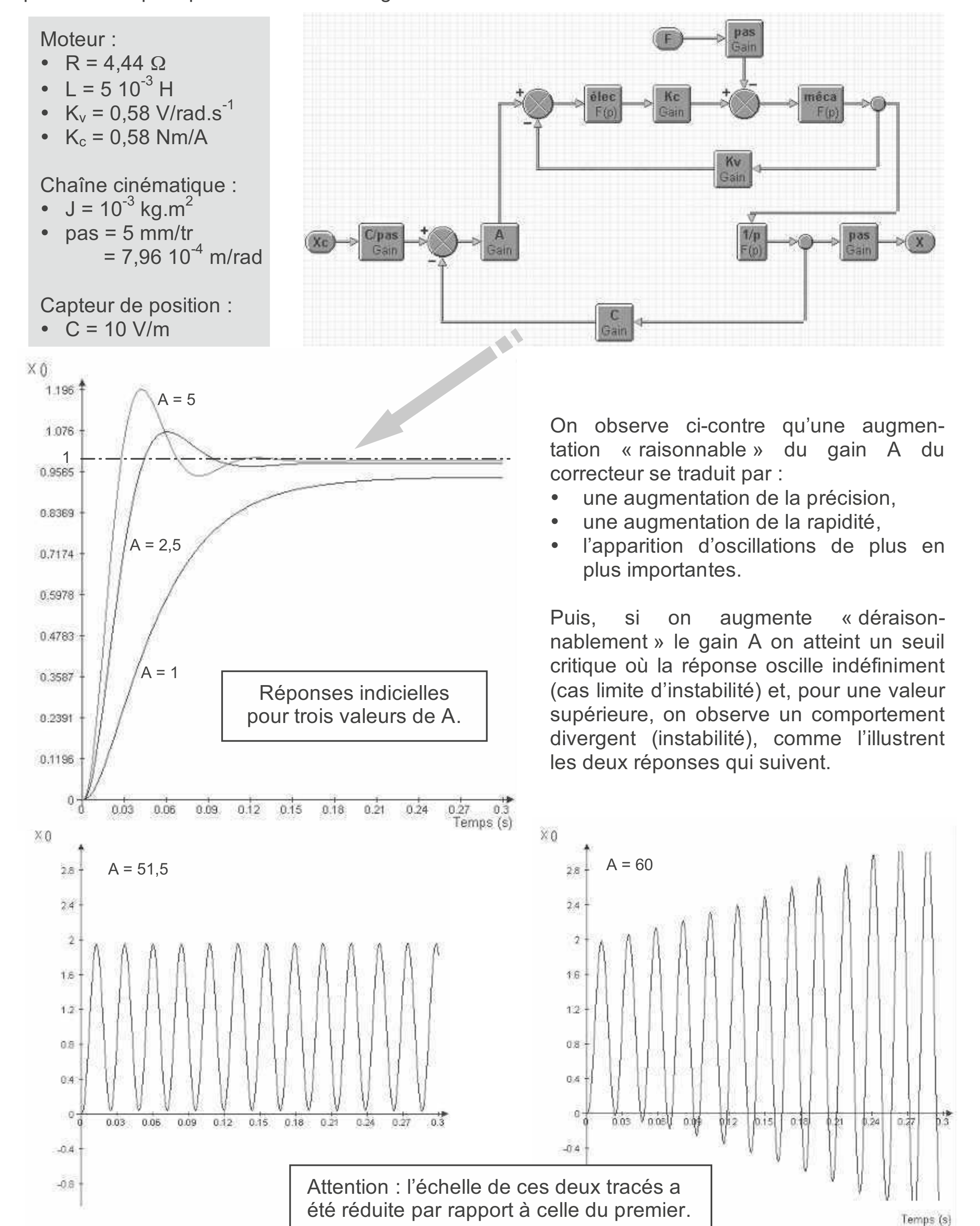
Il peut être modélisé selon le schéma bloc :

où le comparateur-amplificateur réalise la fonction de correcteur proportionnel de gain A.

Alors, dans le domaine de Laplace, la translation X(p) obtenue pour une consigne $X_c(p)$ et sous un effort résistant F(p) s'écrit :

$$X(p)=\frac{1}{1+\frac{K_v}{CA}p+\frac{RJ}{CAK_c}p^2+\frac{LJ}{CAK_c}p^3}X_c(p)-\frac{R\,pas^2}{ACK_c}\,\frac{1+\frac{L}{R}p}{1+\frac{K_v}{CA}p+\frac{RJ}{CAK_c}p^2+\frac{LJ}{CAK_c}p^3}F(p)$$

Ce système peut être simulé à l'aide d'un logiciel, comme par exemple ci-dessous pour une consigne en échelon unitaire, sous un effort résistant de 100N, avec les différentes caractéristiques précisées et pour plusieurs valeurs du gain A du correcteur :



Réponses indicielles pour trois valeurs de A.

Attention : l'échelle de ces deux tracés a été réduite par rapport à celle du premier.

On observe ci-contre qu'une augmentation « raisonnable » du gain A du correcteur se traduit par :

- une augmentation de la précision,
- une augmentation de la rapidité,
- l'apparition d'oscillations de plus en plus importantes.

Puis, si on augmente « déraisonnablement » le gain A on atteint un seuil critique où la réponse oscille indéfiniment (cas limite d'instabilité) et, pour une valeur supérieure, on observe un comportement divergent (instabilité), comme l'illustrent les deux réponses qui suivent.

NB : La valeur critique du gain peut être calculée à partir du polynôme caractéristique :

$$1+\frac{K_V}{CA}p+\frac{RJ}{CAK_c}p^2+\frac{LJ}{CAK_c}p^3$$

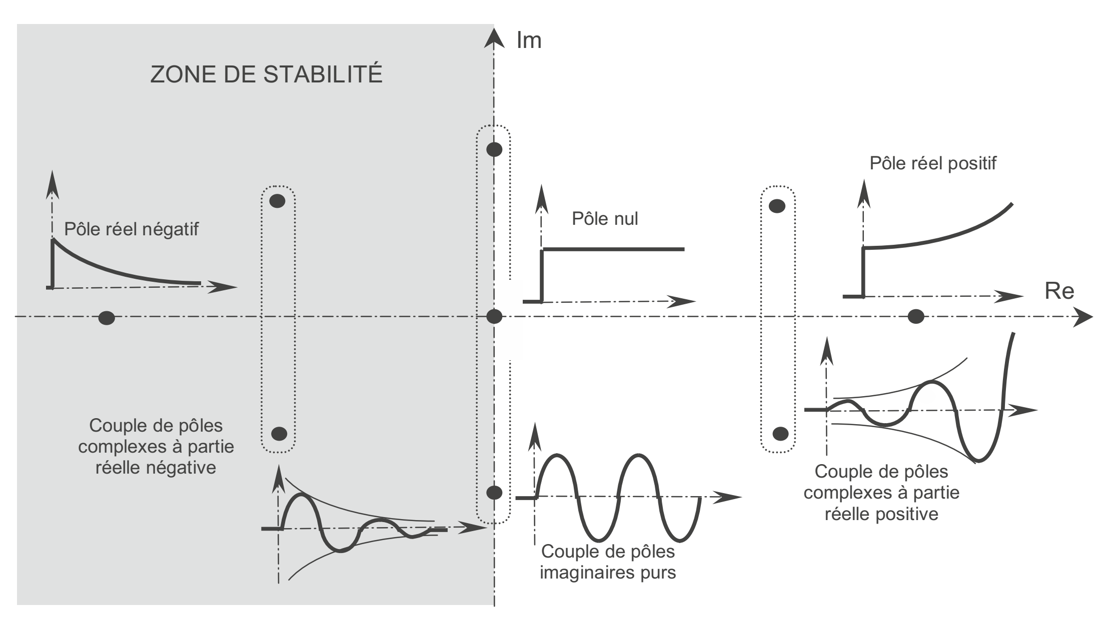
La stabilité impose en effet que toutes les racines de ce polynôme soient à partie réelle strictement négative, soit, en utilisant le critère de Routh, que :

$$\frac{K_V}{CA}x\frac{RJ}{CAK_c}>\frac{LJ}{CAK_c}$$ ou encore $A<\frac{K_V R}{CL}$. Numériquement ici A < 51,5.

Ainsi, pour la valeur critique du gain du correcteur réglé à A = 51,5, le polynôme possède des racines à partie réelle nulle, donc imaginaires pures (puisque zéro n'est manifestement pas racine), génératrices d'oscillations non amorties dans la réponse, qui oscille donc indéfiniment.

Au delà de cette valeur critique, le polynôme possède des racines à partie réelle positive, qui génèrent des termes en exponentielles divergentes dans la réponse.

Rappel de la contribution des pôles simples à la réponse selon leur partie réelle :



■ Ces observations sont typiques de la correction proportionnelle et de ses limites. Toutefois, dans les systèmes réels, des facteurs supplémentaires interviennent :

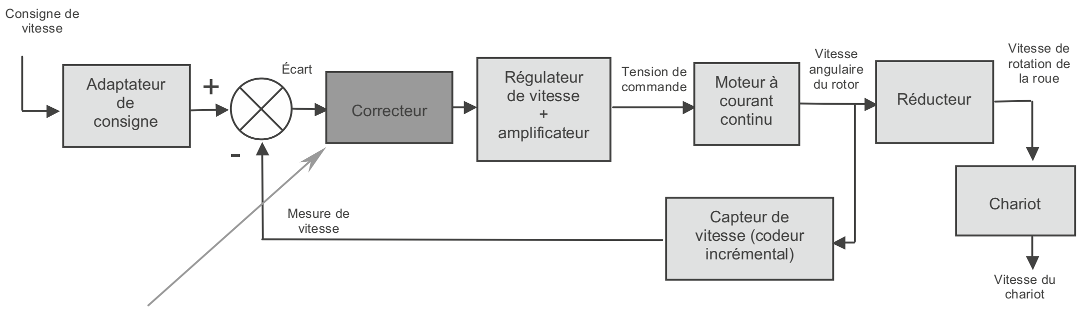
- Les valeurs maximales admissibles de certaines grandeurs de commande interdisent des gains trop élevés. Par exemple, dans l'asservissement précédent, une trop grande valeur de A peut générer une tension d'alimentation beaucoup trop forte pour le moteur. Le concepteur ne dispose donc pas de toutes les latitudes dans le choix du gain du correcteur, nécessairement limité.
- Les non linéarités qui existent toujours à des degrés divers, en particulier les saturations, viennent minimiser les effets de la correction proportionnelle, notamment en termes de rapidité.

I-2 Chariot filoguidé MP22

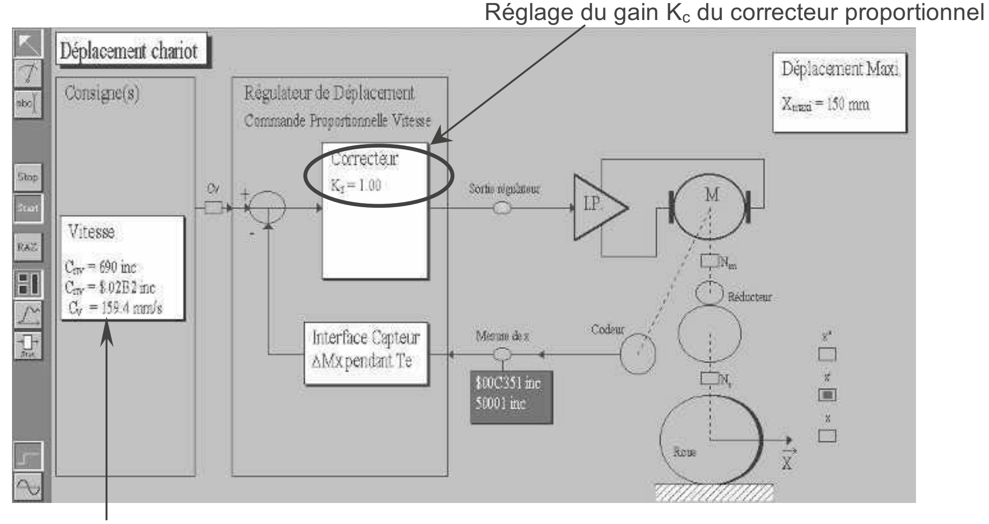


I-2-1 Asservissement de vitesse

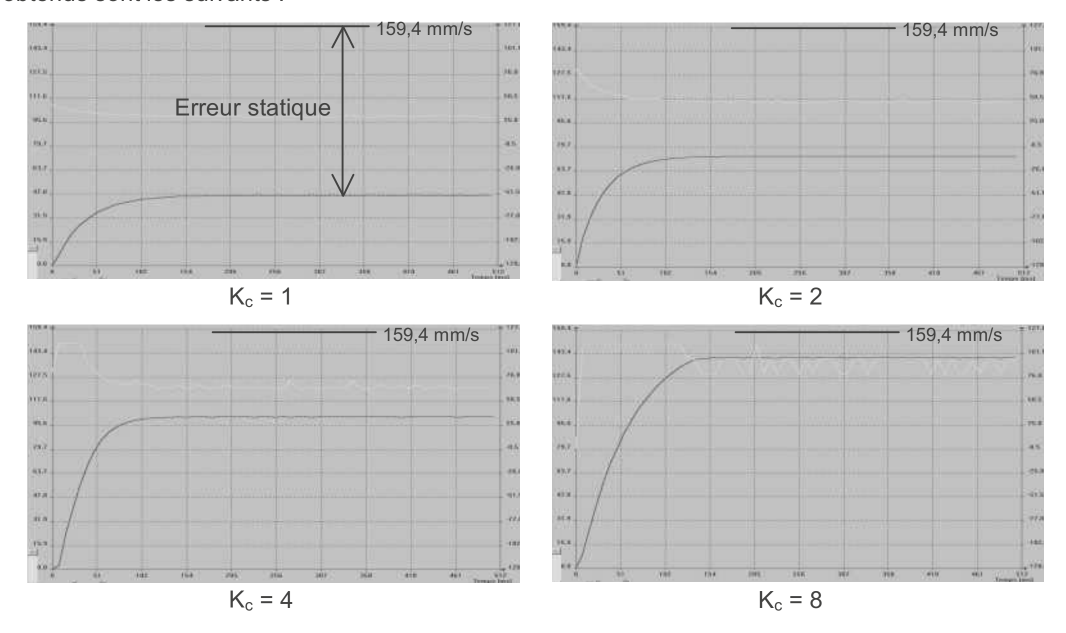
L'asservissement de vitesse du chariot filoguidé se fait selon la chaîne fonctionnelle suivante, déjà décrite à plusieurs reprises dans cet ouvrage :



Le correcteur est paramétrable à partir du logiciel de pilotage et d'acquisition, spécifique au système. On étudie ici l'influence du gain K_c de ce correcteur, et donc celui de la FTBO, sur le comportement dynamique de la chaîne asservie. Voir chapitre 2, paragraphe III-3 et exercice IV et chapitre 4, paragraphe II-6.



Une consigne de vitesse en échelon est imposée (ici 159,4 mm/s) et on relève l'évolution temporelle de la vitesse du chariot pour différents réglages du gain du correcteur. Les résultats obtenus sont les suivants :



On constate qu'une augmentation du gain se traduit ici principalement par une amélioration de la précision. L'asservissement de vitesse étant intrinsèquement imprécis puisque la FTBO est de classe nulle, la correction proportionnelle permet de limiter l'imprécision.

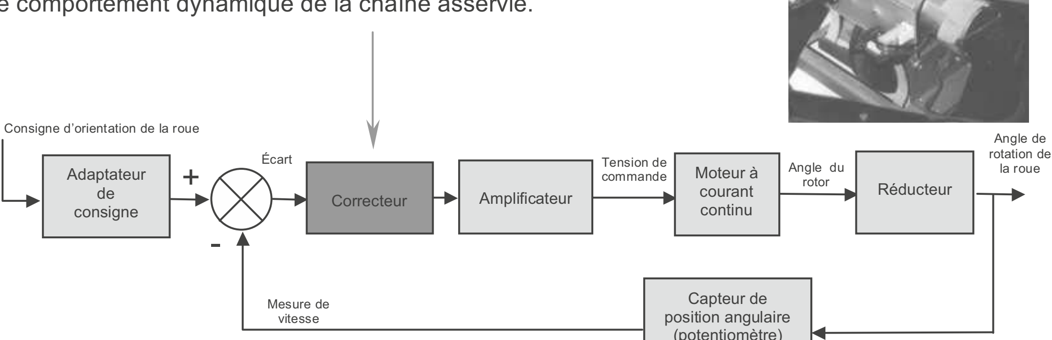
On constate également une légère amélioration de la rapidité, même si celle-ci est notablement diminuée par la saturation de la commande aux grands gains (voir chapitre 4, II-6).

Le système étant d'ordre un, aucune oscillation n'apparaît et donc aucun risque d'instabilité.

I-2-2 Asservissement de position angulaire de la roue directrice

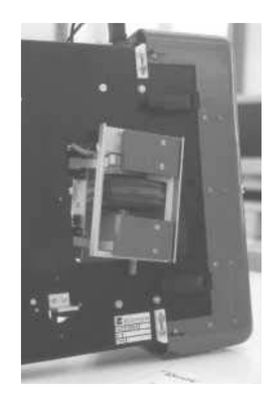
L'orientation de la roue directrice du chariot filoguidé se fait selon la chaîne fonctionnelle de direction déjà décrite au chapitre 2, paragraphe III-3, ainsi qu'au chapitre 4, paragraphe V-4.

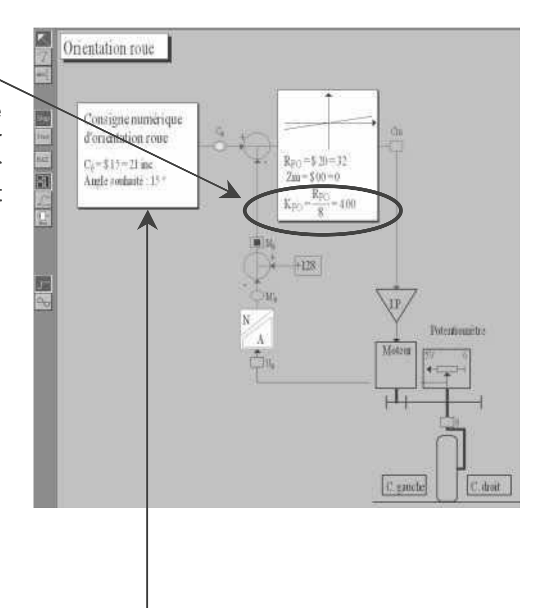
Le correcteur est paramétrable à partir du logiciel de pilotage et d'acquisition, spécifique au système. On se propose ici d'observer l'influence du gain K_{PO} de ce correcteur, et donc celui de la FTBO, sur le comportement dynamique de la chaîne asservie.



Réglage du gain K_{PO} :

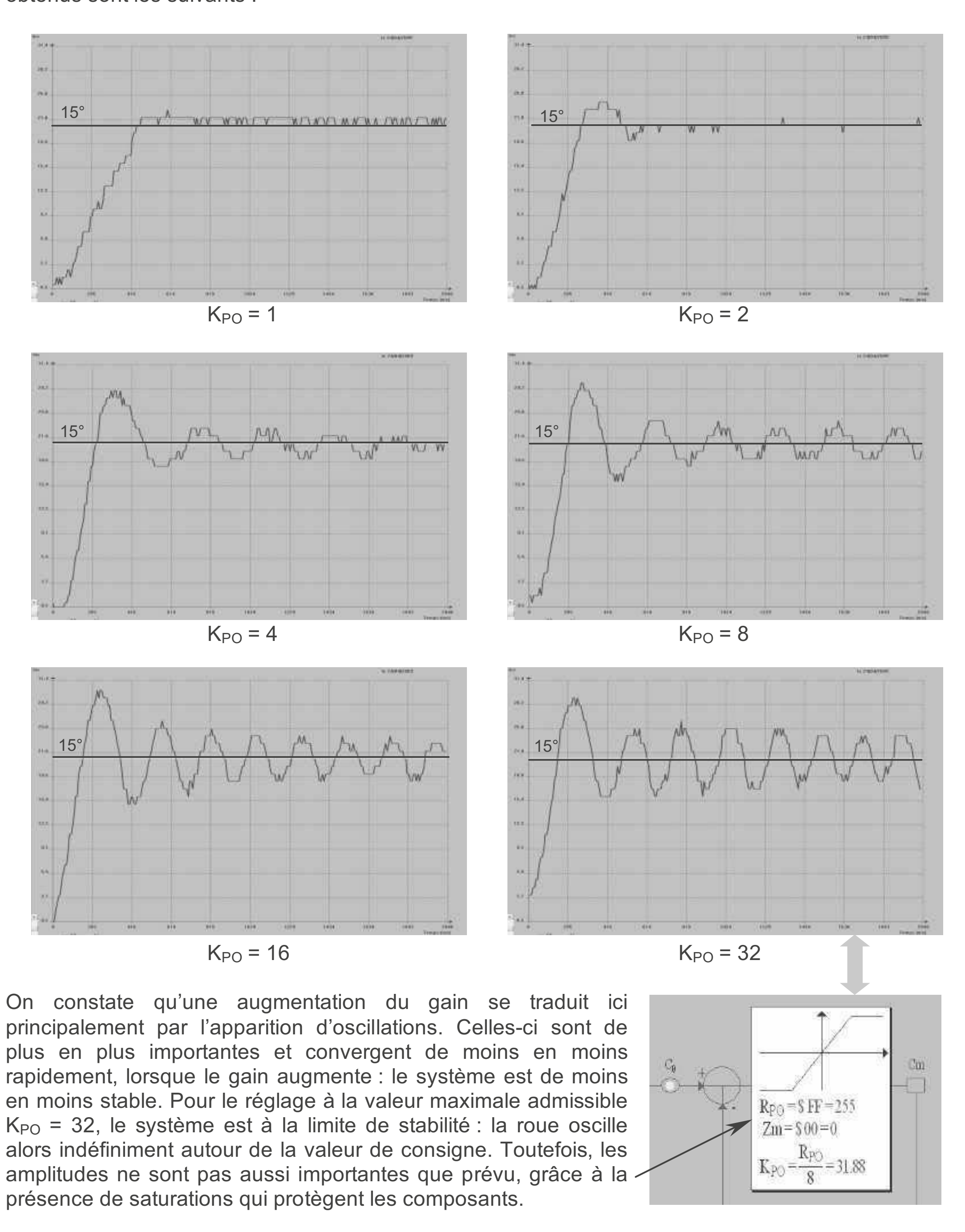
On rappelle qu'en fonctionnement la consigne provient de la mesure de l'écart du chariot par rapport au fil qu'il doit suivre, écart élaboré par deux capteurs électromagnétiques situés de part et d'autre de la roue :





Mais pour ces essais, on impose directement une consigne de déplacement angulaire à la roue à partir du logiciel de pilotage et d'acquisition.

On procède alors à la commande d'une rotation en échelon (de 15°) et on relève l'évolution temporelle de l'angle d'orientation de la roue, pour différents réglages du gain K_{PO}. Les résultats obtenus sont les suivants :



$K_{PO} = 1$; $K_{PO} = 2$; $K_{PO} = 4$; $K_{PO} = 8$; $K_{PO} = 16$; $K_{PO} = 32$

On constate qu'une augmentation du gain se traduit ici principalement par l'apparition d'oscillations. Celles-ci sont de plus en plus importantes et convergent de moins en moins rapidement, lorsque le gain augmente : le système est de moins en moins stable. Pour le réglage à la valeur maximale admissible $K_{PO} = 32$, le système est à la limite de stabilité : la roue oscille alors indéfiniment autour de la valeur de consigne. Toutefois, les amplitudes ne sont pas aussi importantes que prévu, grâce à la présence de saturations qui protègent les composants.

L'asservissement de position étant intrinsèquement précis (FTBO de classe 1) et ici quasiment pas perturbé hormis quelques frottements mécaniques, le gain du correcteur n'apporte pratiquement rien de plus en termes de précision.

Le gain en rapidité, perceptible entre les valeurs 1 et 2 du gain, est ensuite estompé par la présence des oscillations, ainsi que par la saturation de la commande aux premiers instants.

II - LIMITE DE STABILITÉ - CRITÈRE DU REVERS

II-1 Notion de point critique - limite du propos

■ En l'absence de pôles nuls, la limite de stabilité est atteinte lorsque le dénominateur (ou polynôme caractéristique) de la fonction de transfert possède au moins un couple de racines imaginaires pures, qui engendreront alors des composantes sinusoïdales non amorties dans la réponse. Or, dans le cas d'un système asservi, le polynôme caractéristique s'écrit en fonction de la fonction de transfert en boucle ouverte selon D(p) = 1+ FTBO(p).

Le système sera ainsi à la limite de stabilité si l'équation 1 + FTBO(jω) = 0 possède une solution, c'est-à-dire s'il existe une pulsation ω_c telle que : FTBO(jω_c) = -1. Dans ce cas, la sortie portera une composante sinusoïdale non amortie à la pulsation ω_c.

Cette valeur particulière -1 pouvant être atteinte par FTBO(jω) définit le point (-1 ;0) du plan complexe, appelé ***point critique***.

■ Le propos est ici limité aux situations les plus courantes où la FTBO ne possède aucun pôle à partie réelle strictement positive (pas d'instabilité stricte de la FTBO). Dans ce cas, les lieux de transfert de la FTBO ont la signification habituelle, puisque sa réponse à une entrée sinusoïdale possède un régime sinusoïdal permanent. Voir chapitre 5, paragraphe II-2. Le tracé du point critique dans l'un ou l'autre des lieux de transfert de la FTBO va alors permettre d'analyser la stabilité du système.

II-2 Interprétation sur le diagramme de Nyquist de la FTBO

II-2-1 Limite de stabilité

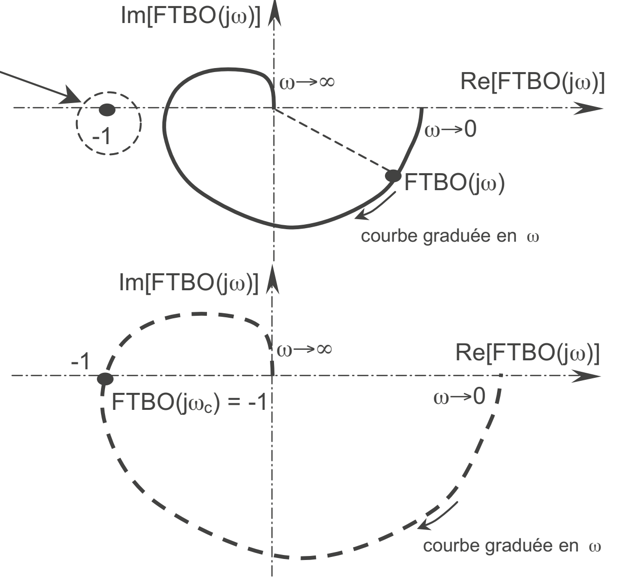
Sur le lieu de Nyquist de la FTBO, on repère aisément le point critique.

Dans le cas ci-contre, il n'existe pas de pulsation ω telle que FTBO(jω) = -1, puisque la courbe ne passe pas par le point critique.

Le système asservi ayant cette FTBO n'est donc pas à la limite de stabilité.

Par contre, si le lieu de Nyquist de la FTBO se présente comme le second tracé ci-contre, <u>le système asservi est à la limite de stabilité</u> et ses réponses temporelles présentent des oscillations non amorties à la pulsation ω_c lue sur le diagramme au point critique.

On énoncera alors la règle suivante appelée « critère du revers » :



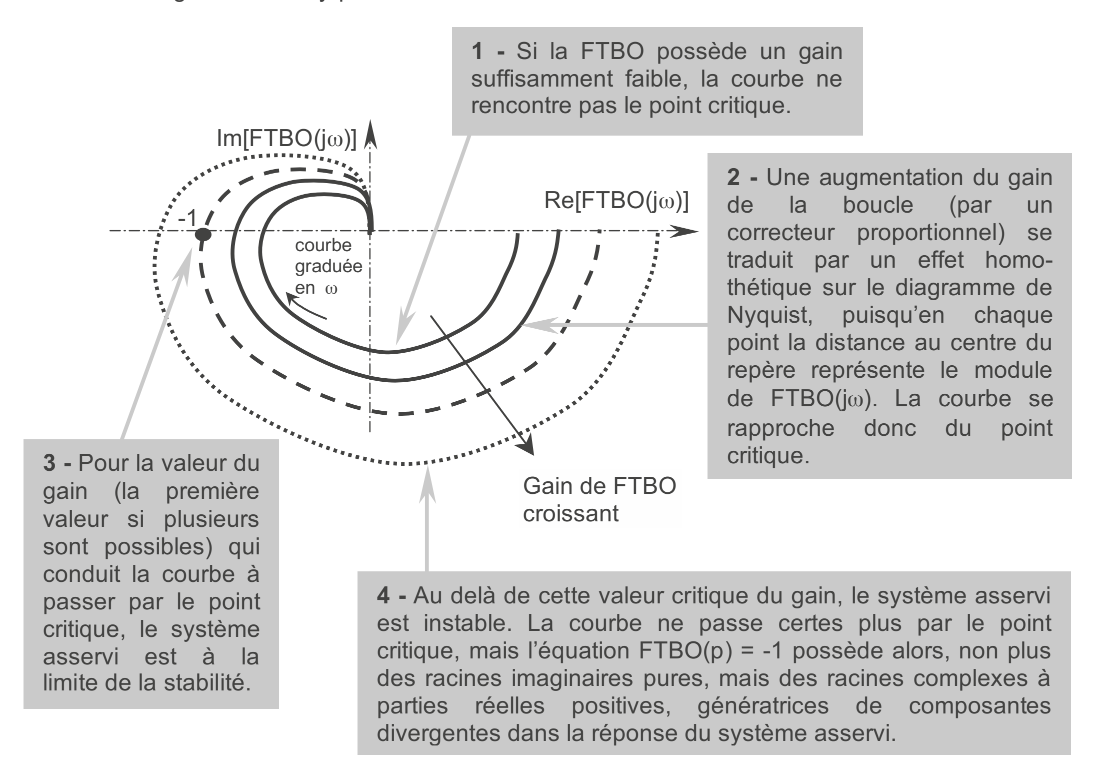
Un système asservi est ***à la limite de stabilité*** si le lieu de Nyquist de sa FTBO ***passe par le point critique (-1 ;0)***.
Les réponses temporelles du système asservi présentent alors des oscillations non amorties, à la pulsation ω_c pour laquelle la FTBO passe par le point critique.

Au point critique, le gain est unitaire et la phase de -180°. Ainsi, en d'autres termes, s'il existe une pulsation ω_c pour laquelle ***la FTBO déphase de -180° sans amplifier ni atténuer***, le système asservi est à la limite de stabilité et les oscillations non amorties de la sortie se font à cette pulsation ω_c.

NB : Si la courbe passe plusieurs fois par le point critique, il existe théoriquement autant de comportements limites possibles, car autant de pulsations solutions de l'équation caractéristique 1+FTBO(jω) = 0. En pratique, dès qu'une situation limite est atteinte, il est rarement possible d'en atteindre une seconde, qui nécessiterait de passer par une phase d'instabilité.

II-2-2 Action d'une correction proportionnelle

L'action d'une correction proportionnelle en termes de stabilité sur le système asservi, s'interprète alors sur le diagramme de Nyquist de la FTBO de la manière suivante :



Le critère du revers peut alors être complété en énonçant :

Un système asservi est ***stable*** si le lieu de Nyquist de sa FTBO ***laisse le point critique -1 sur sa gauche***, lorsqu'on le parcourt dans le sens des pulsations croissantes.

II-2-3 Remarque : critère de Nyquist

Il est possible de rencontrer des systèmes instables en boucle ouverte (FTBO possédant au moins un pôle à partie réelle positive) qui, par fermeture de la boucle, sont à la limite de la stabilité, voire stables. Ceci amène à préciser l'énoncé du critère du revers, qui prend alors une forme plus générale, mais plus complexe, appelée « critère de Nyquist ». Ce critère de Nyquist sort du cadre de cet ouvrage. Il repose sur une démonstration mathématique plus complète que l'approche empirique qui vient d'être proposée, issue du théorème de Cauchy.

Toutefois, dans la grande majorité des situations auxquelles cet ouvrage se limite, la FTBO ne possède pas de pôles à partie réelle positive et le critère du revers s'applique. Dans toutes les pages qui suivent, on supposera que l'on est dans ce cas.

II-3 Interprétation sur le diagramme de Black de la FTBO

Le point critique correspondant à un gain unitaire (donc de 0 dB) concomitant à une phase de -180°, se repère facilement dans le plan de Black. Ainsi, si le diagramme de Black de la FTBO passe par ce point, comme ci-contre, le système asservi est à la limite de stabilité.

L'interprétation d'une correction proportionnelle peut alors être conduite comme précédemment :

1 - Si la FTBO possède un gain suffisamment faible, la courbe ne rencontre pas le point critique.

2 - Une augmentation du gain de la boucle (par un correcteur proportionnel) se traduit par une translation verticale vers le haut du diagramme de Black. La courbe se rapproche donc du point critique.

3 - Pour la valeur du gain (la première valeur si plusieurs sont possibles) qui conduit la courbe à passer par le point critique, le système asservi est à la limite de la stabilité.

4 - Au delà de cette valeur critique du gain, le système asservi est instable.

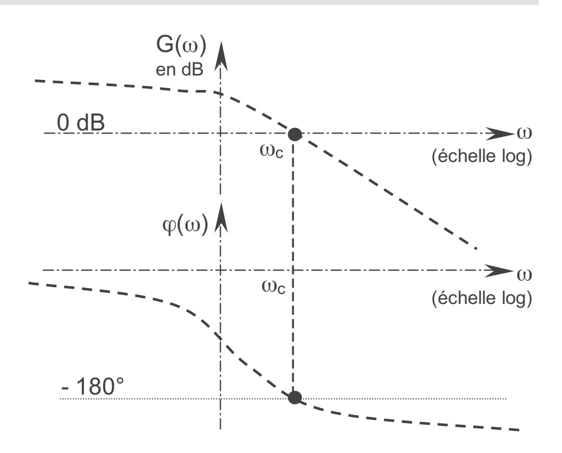
Le critère du revers peut alors être énoncé de la manière suivante :

Un système asservi est ***stable*** si le lieu de Black de sa FTBO ***laisse le point critique (0 dB, -180°) sur sa droite***, lorsqu'on le parcourt dans le sens des pulsations croissantes.

Si le lieu de Black de la FTBO passe par le point critique, le système asservi est à la limite de stabilité. Les réponses temporelles du système asservi présentent alors des oscillations non amorties, à la pulsation ω_c pour laquelle la FTBO passe par le point critique.

II-4 Interprétation sur le diagramme de Bode de la FTBO

II-4-1 Point(s) critique(s) sur un diagramme de Bode ?



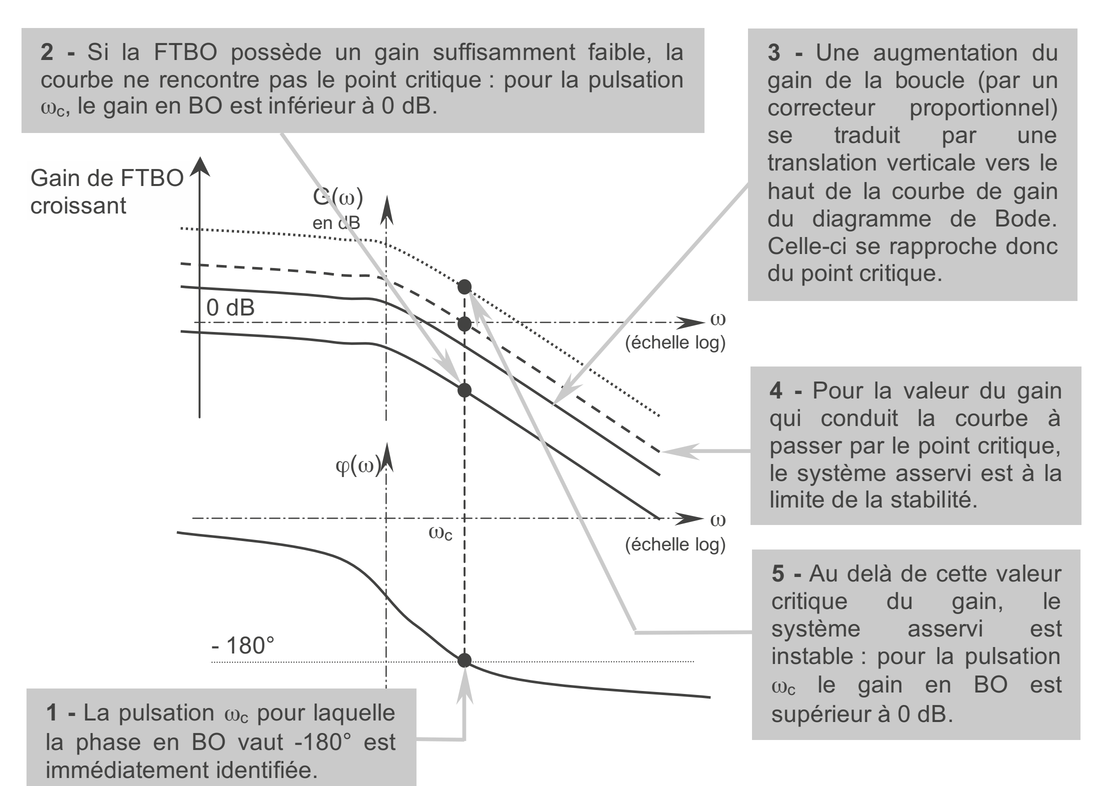
Sur un diagramme de Bode, ***le point critique n'existe pas en tant que tel***.
Il se définit seulement comme l'existence particulière d'une concomitance d'un gain de 0 dB et d'une phase de -180° pour la même pulsation, comme dans l'exemple ci-contre.

Ceci présente nettement moins de visibilité que sur les diagrammes de Nyquist et de Black, parce que le point critique n'est pas défini par les axes du diagramme, mais par les courbes qui y sont tracées.

Le diagramme de Bode est donc mal adapté à l'étude de la stabilité, en particulier dès qu'il existe plusieurs pulsations pour lesquelles le gain vaut 0 dB ou la phase -180°, ou au contraire lorsque de telles pulsations n'existent pas. ***On lui préfèrera les diagrammes de Nyquist ou de Black***.

II-4-2 Interprétation dans les cas simples courants

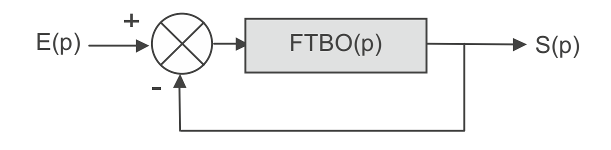
Dans les cas simples, mais heureusement très courants, où le diagramme de Bode a l'allure ci-dessous (gain et phase fonctions décroissantes de la pulsation), l'interprétation d'une correction proportionnelle peut toutefois être conduite dans le même esprit que sur le diagramme de Black, sachant qu'une augmentation du gain de la FTBO ne modifie pas la courbe de phase :



Dans ce cas particulier, on peut alors énoncer que le système asservi est stable si on lit sur le diagramme de Bode de sa FTBO ***un gain inférieur à 0 dB pour la pulsation à partir de laquelle la phase est inférieure à -180°***. Il faudra toutefois savoir revenir aux énoncés du critère du revers dans les plans de Nyquist ou de Black dans des situations plus complexes. L'exemple qui suit est, de ce point de vue, fondamental et doit convaincre de la nécessité de la plus grande prudence.

II-4-3 Exemple de limite d'utilisation du diagramme de Bode

Considérons le système asservi :

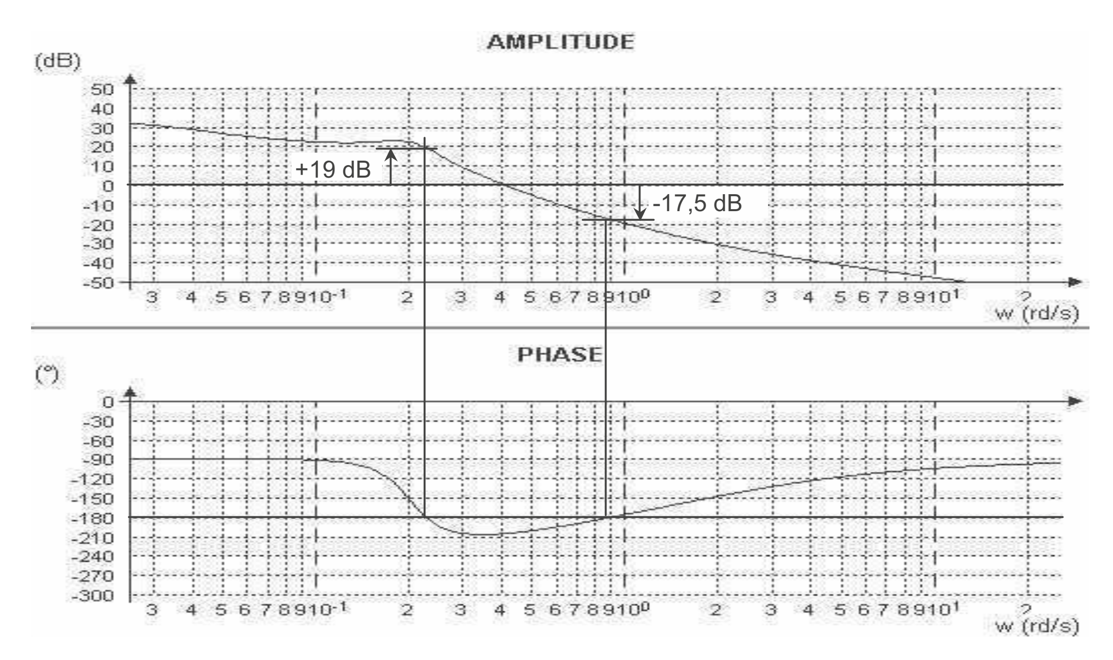


avec : $\text{FTBO}(p) = \dfrac{K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p\left[1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2\right]}$

où : K est un gain de correction, réglable
$\tau_1 = 2$ s
$\tau_2 = 0,5$ s
$\omega_0 = 0,2$ rad/s et z = 0,2.

Cette FTBO ne possède pas de pôles à partie réelle positive, ce qui place le système dans les conditions d'application du critère du revers.

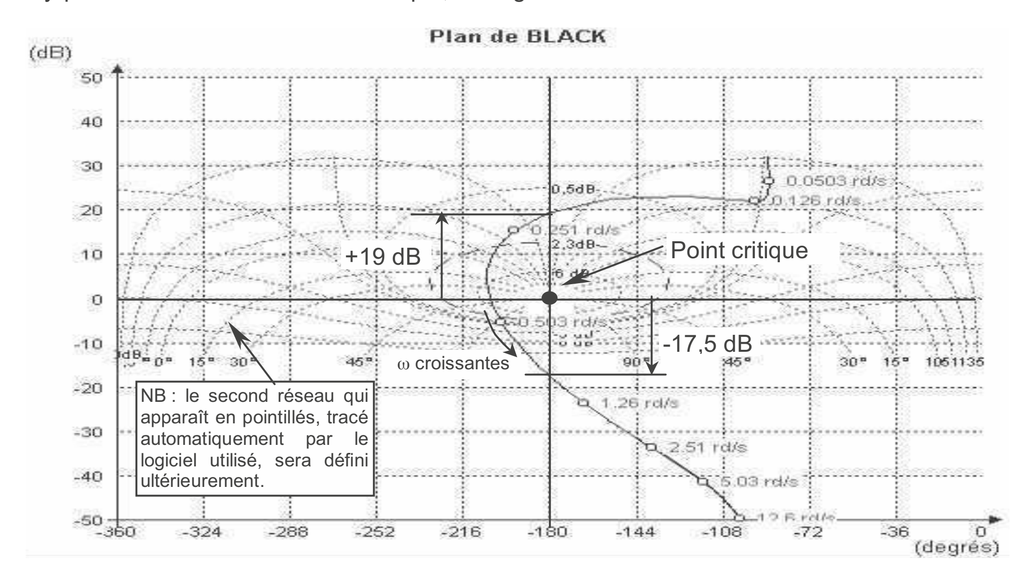
■ Pour une valeur de K réglée initialement à 1, le diagramme de Bode de la FTBO est le suivant :



On constate que deux pulsations déphasent de -180° :

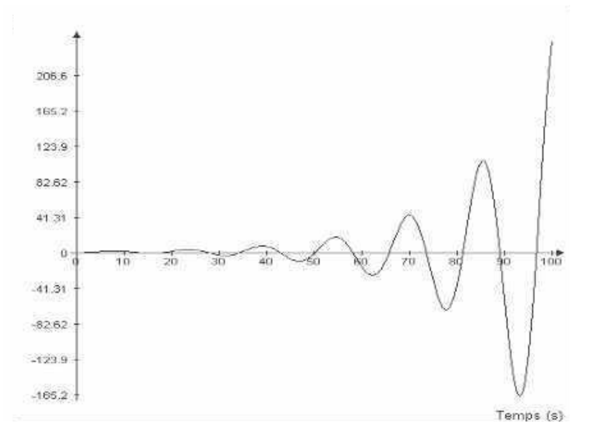
- pour $\omega \approx 0,23$ rad/s le déphasage de -180° est associé à un gain d'environ +19 dB,
- pour $\omega \approx 0,88$ rad/s le déphasage de -180° est associé à un gain d'environ -17,5 dB.

L'existence de ces ***deux pulsations critiques*** conduit à préférer mener l'analyse sur le diagramme de Nyquist ou celui de Black. Par exemple, le diagramme de Black est le suivant :



On lit immédiatement sur ce diagramme de Black de la FTBO, que la courbe, lue dans le sens des pulsations croissantes, laisse le point critique sur sa gauche, ce qui permet de conclure que le système asservi est ***instable***, puisque le critère du revers attend que le point critique soit laissé sur la droite dans le plan de Black.

Le tracé divergent de la réponse du système asservi (FTBF) à un échelon unitaire, donné ci-contre, confirme cette instabilité.



■ Sur le diagramme de Black, comme sur le diagramme de Bode, on lit également qu'une augmentation du gain de 17,5 dB (soit $K = 10^{17,5/20} \approx 7,5$) tout comme une diminution de 19 dB (soit $K \approx 0,11$) placent le système à la limite de stabilité. Sur le diagramme de Bode on lit qu'alors les pulsations des oscillations sont respectivement 0,88 rad/s et 0,23 rad/s. Cette lecture est plus délicate sur le diagramme de Black (fonctionnalité du logiciel de simulation par pointage à la souris).

Pour ces deux réglages, les simulations suivantes peuvent être effectuées :

- <u>pour K = 7,5</u> (augmentation du gain de 17,5 dB) :

AMPLITUDE — PHASE — Plan de BLACK

Point critique atteint

7,14 s

Le point critique à $\omega_c \approx 0,88$ rad/s, lu sur les diagrammes de Bode et de Black de la FTBO, est confirmé ci-contre par les oscillations non amorties (limite de stabilité) de la réponse indicielle du système asservi (FTBF) à la période :

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \approx \frac{2\pi}{0,88} \approx 7,14\text{s}$$

- pour K = 0,11 (diminution du gain de 19 dB) :

Point critique atteint

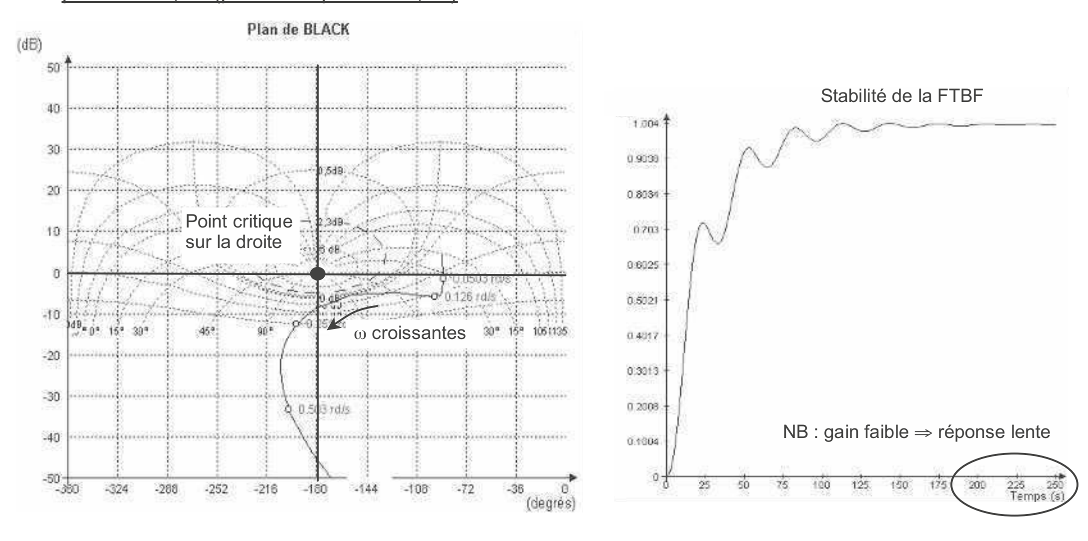
27,3 s

Le point critique à $\omega_c \approx 0{,}23$ rad/s, lu sur les diagrammes de Bode et de Black de la FTBO, est confirmé ci-contre par les oscillations non amorties (limite de stabilité) de la réponse indicielle du système asservi (FTBF) à la période :

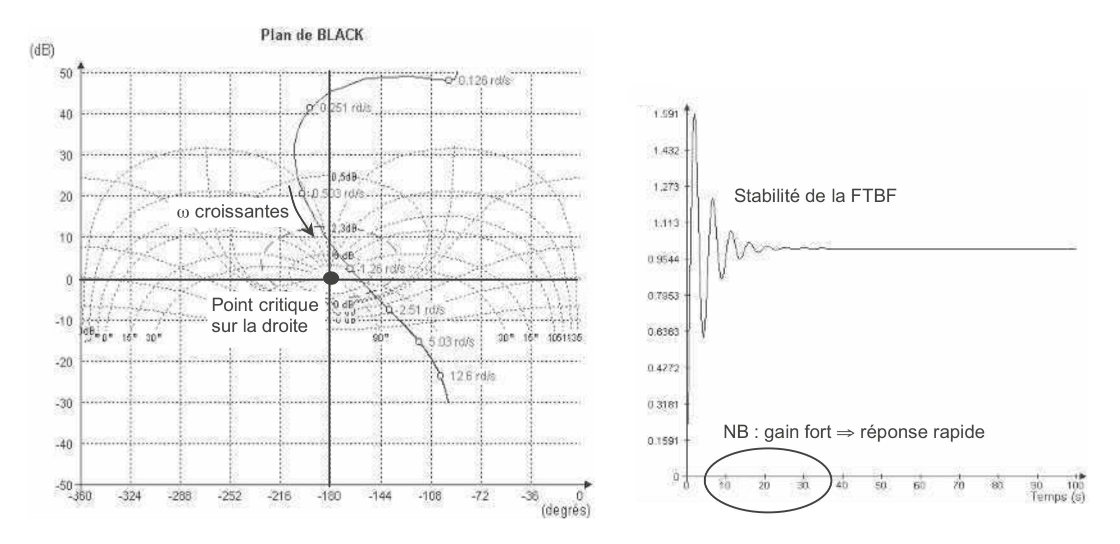
$$T_C = \frac{2\pi}{\omega_C} \approx \frac{2\pi}{0{,}23} \approx 27{,}3\text{s}$$

■ L'observation du diagramme de Black permet alors de comprendre qu'hormis dans l'intervalle défini par ces deux valeurs extrêmes du gain K, soit pour **K < 0,11 ou K > 7,5**, la courbe laisse le point critique sur la droite, assurant la ***stabilité*** du système asservi :

- pour K < 0,11 (par exemple K = 0,04) :

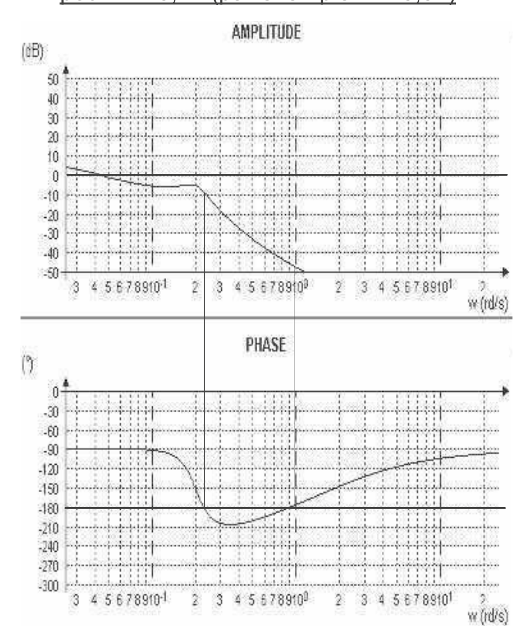


- pour K > 7,5 (par exemple K = 20) :



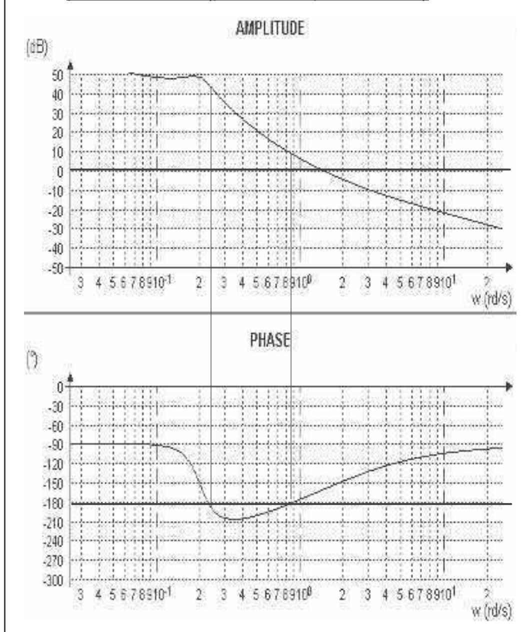
L'observation du diagramme de Bode s'avère ici difficilement interprétable :

- pour K < 0,11 (par exemple K = 0,04) :



Dans ce cas, entre les deux pulsations critiques, le gain est inférieur à 0 dB. On conclut donc sans difficulté à la stabilité du système asservi, comme il se doit.

- pour K > 7,5 (par exemple K = 20) :

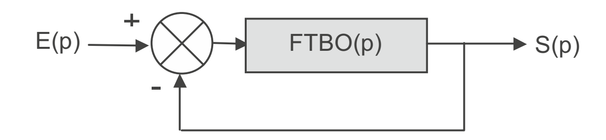


Dans ce cas, entre les deux pulsations critiques, le gain est supérieur à 0 dB, ***et pourtant le système asservi est stable !***

Le deuxième cas montre bien les difficultés de l'utilisation du diagramme de Bode de la FTBO pour conclure quant à la stabilité du système asservi, dès que l'allure des courbes n'est pas l'allure « classique » présentée au paragraphe II-4-2.

La notion de marge de stabilité permettra d'apporter quelques éclaircissements (cf. III-2-2). Malgré tout, en dehors des cas simples, il vaudra mieux ***toujours préférer le diagramme de Black (ou de Nyquist)***, où le critère du revers s'applique de manière claire.

■ **Remarque : critère de Routh**



Bien entendu, le domaine de stabilité peut également être déterminé par le critère de Routh.

Il faut pour cela calculer la fonction de transfert du système asservi, soit :

$$FTBF(p)=\frac{FTBO(p)}{1+FTBO(p)} \quad \text{avec :} \quad FTBO(p)=\frac{K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p[1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2]}$$

$$\text{D'où : } FTBF(p)=\frac{\dfrac{K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p[1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2]}}{1+\dfrac{K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p[1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2]}}=\frac{K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p[1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2]+K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

$$\text{soit sous forme canonique : } FTBF(p)=\frac{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{1+\frac{1}{K}[1+K(\tau_1+\tau_2)]p+\frac{1}{K}[\frac{2z}{\omega_0}+K\tau_1\tau_2]p^2+\frac{1}{K\omega_0^2}p^3}$$

Le système asservi est stable si tous les pôles de cette fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative. Le dénominateur étant d'ordre trois, le critère de Routh impose que :

$$\frac{1}{K}[1+K(\tau_1+\tau_2)]\,x\,\frac{1}{K}[\frac{2z}{\omega_0}+K\tau_1\tau_2]>1\,x\,\frac{1}{K\omega_0^2}$$

$$\text{ou encore : } (\tau_1+\tau_2)\tau_1\tau_2 K^2+[\tau_1\tau_2+\frac{2z}{\omega_0}(\tau_1+\tau_2)-\frac{1}{\omega_0^2}]K+\frac{2z}{\omega_0}>0.$$

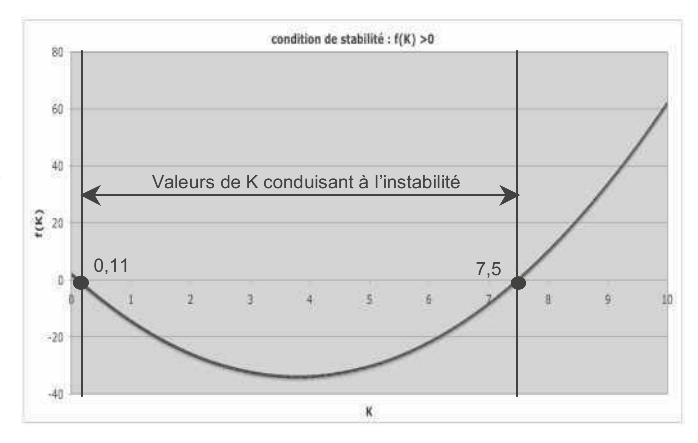
Les deux racines de ce polynôme f(K) étant :

$$K'=\frac{-[\tau_1\tau_2+\frac{2z}{\omega_0}(\tau_1+\tau_2)-\frac{1}{\omega_0^2}]-\sqrt{[\tau_1\tau_2+\frac{2z}{\omega_0}(\tau_1+\tau_2)-\frac{1}{\omega_0^2}]^2-4(\tau_1+\tau_2)\tau_1\tau_2\frac{2z}{\omega_0}}}{2(\tau_1+\tau_2)\tau_1\tau_2}\approx 0,11$$

$$K''=\frac{-[\tau_1\tau_2+\frac{2z}{\omega_0}(\tau_1+\tau_2)-\frac{1}{\omega_0^2}]+\sqrt{[\tau_1\tau_2+\frac{2z}{\omega_0}(\tau_1+\tau_2)-\frac{1}{\omega_0^2}]^2-4(\tau_1+\tau_2)\tau_1\tau_2\frac{2z}{\omega_0}}}{2(\tau_1+\tau_2)\tau_1\tau_2}\approx 7,5$$

le critère de Routh est donc satisfait pour K < 0,11 ou K > 7,5.

On retrouve bien que le système asservi est stable pour ces valeurs du gain K, et donc instable dans l'intervalle complémentaire.

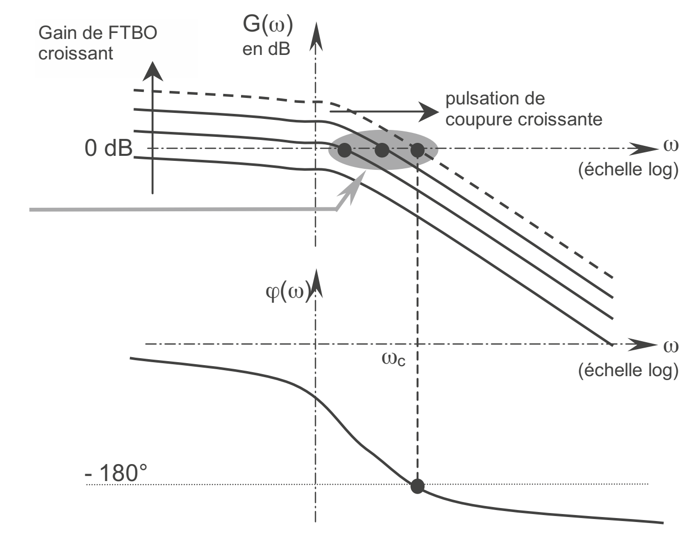


II-5 Remarque complémentaire : interprétation en termes de rapidité

Les conséquences d'un réglage de gain en boucle ouverte peuvent également donner lieu à des interprétations en termes de rapidité sur le diagramme de Bode de la FTBO.

On rappelle à cet effet (voir chapitre 5, paragraphe V-3) que plus la bande passante d'un système est élevée, plus celui-ci est rapide.

L'allure usuelle des diagrammes de Bode montre qu'une augmentation du gain de la boucle (FTBO) par un correcteur proportionnel se traduit par une augmentation de la pulsation de coupure et donc de la rapidité de la boucle.



Ainsi, plus on augmente le gain de la boucle, plus celle-ci devient rapide, jusqu'à atteindre le point critique déstabilisateur. Cette augmentation de rapidité de la boucle (FTBO) se traduit également par une augmentation de la rapidité du système asservi (FTBF).

Ainsi, on retrouve interprété sur le diagramme de Bode de la FTBO ce qui a déjà été annoncé, à savoir qu'***une augmentation du gain de la boucle se traduit par une augmentation de la rapidité du système asservi***.

Comme toujours, cette rapidité, si elle est caractérisée par le temps de réponse à 5%, se voit limitée par l'augmentation des oscillations qui apparaissent en boucle fermée, au fur et à mesure que la FTBO se rapproche du point critique. Il faut bien ici comprendre la rapidité en termes de « raideur » ou de « nervosité », mieux caractérisées par exemple par le temps de montée, ou l'instant du premier dépassement. Voir encore le paragraphe V-3 du chapitre 5.

Cette difficulté de caractérisation de la rapidité dès qu'un système est oscillant rend délicate la vérification par le calcul des propriétés qui viennent d'être énoncées. Toutefois, dans le cas simplifié d'un système du premier ordre (et donc non oscillant), elles se démontrent aisément :

Soit $\text{FTBO}(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$ où K est un gain réglable.

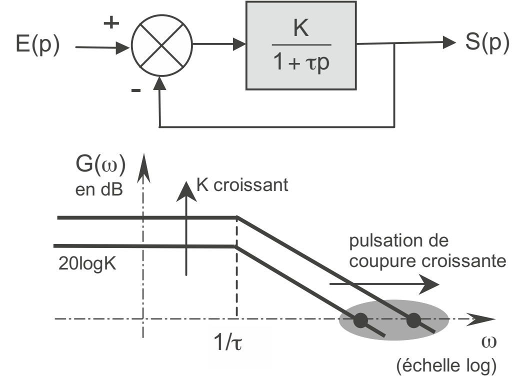
Alors, $\text{FTBF}(p) = \dfrac{\dfrac{K}{1+K}}{1+\dfrac{\tau}{1+K}p}$,

La constante de temps de boucle fermée est donc :

$\dfrac{\tau}{1+K}$, ***fonction décroissante de K***.

Ainsi, clairement, une augmentation de K :

- augmente la bande passante de la FTBO.
- diminue la constante de temps de la FTBF.



Augmentation de la bande passante en boucle ouverte et rapidité du système asservi sont donc deux aspects d'un même comportement.

III - MARGES DE STABILITÉ

III-1 Nécessité de marges

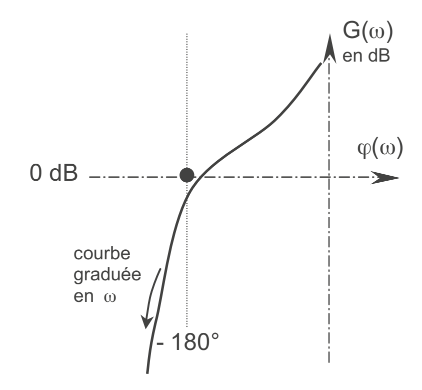
L'étude de la stabilité telle qu'elle a été conduite jusqu'ici :

- utilisation du critère de Routh, sur le dénominateur de la FTBF,
- utilisation du critère du revers sur un lieu de transfert (Nyquist, Black, éventuellement Bode) de la FTBO,

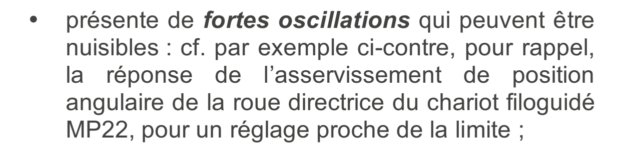
permet de conclure quant au caractère stable, instable ou à la limite de stabilité d'un système asservi.

En pratique, ces considérations binaires sont insuffisantes : les systèmes stables, doivent l'être ***« suffisamment »***.

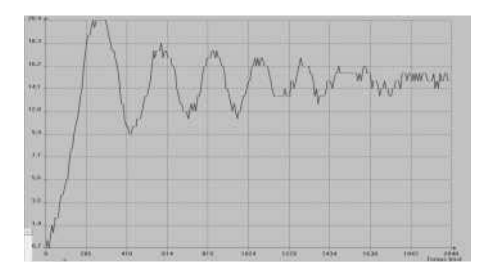
On conçoit bien, en effet, que si la valeur limite maximale d'un réglage de gain est théoriquement, par exemple, de 10, on devra plutôt choisir une valeur autour de 8 ou 9, plutôt que 9,999… Ou encore, en appliquant le critère du revers, que le lieu de transfert de la FTBO ne doit pas être « trop proche » du point critique, comme ci-contre, par exemple, en plan de Black.



En effet, un système trop proche de la limite de stabilité :



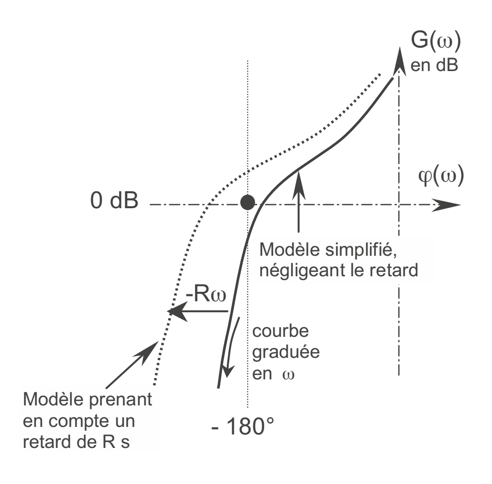
- présente de ***fortes oscillations*** qui peuvent être nuisibles : cf. par exemple ci-contre, pour rappel, la réponse de l'asservissement de position angulaire de la roue directrice du chariot filoguidé MP22, pour un réglage proche de la limite ;



- peut présenter des ***dérives*** au cours du temps (modification de certaines valeurs numériques dues au vieillissement de composants) qui font qu'il peut devenir instable ;

Par ailleurs, le modèle représentant le système sous la forme d'une fonction de transfert n'est par nature qu'une représentation simplifiée de la réalité. Classiquement, des pôles non dominants ou des non linéarités peuvent avoir été négligés. Ainsi un système modélisé comme stable peut en réalité être instable.

Par exemple, il est assez courant, dans un souci de simplification, de négliger certains retards lors d'une modélisation. Or, on sait (chapitre 5, III-5) qu'un retard de R secondes, s'il ne modifie pas le gain, apporte un déphasage $\varphi = -R\omega$ qui augmente (en valeur absolue) avec la pulsation. Ainsi, la présence d'un retard, même très faible, peut être source d'un déphasage important aux fortes pulsations, pouvant engendrer de l'instabilité, comme ci-contre.



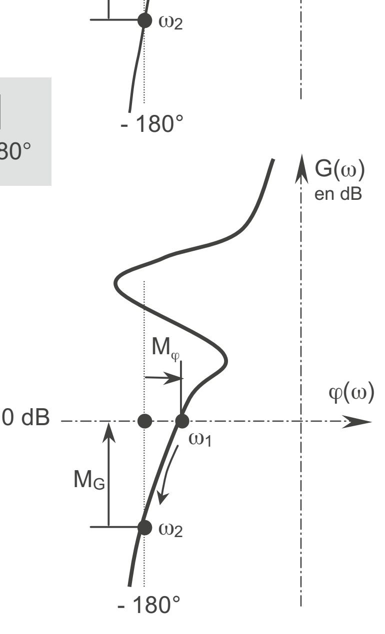
Pour ces différentes raisons, il convient de définir des marges de sécurité, que l'on appelle ***marges de stabilité***. On distingue en général la marge de gain, la marge de phase et la marge d'amplitude.

III-2 Marges de gain et de phase

III-2-1 Définitions et lecture sur le diagramme de Black

■ Les marges de gain M_G et de phase M_φ représentent respectivement l'augmentation de gain et de phase de la FTBO, plaçant le système asservi, initialement stable, à la limite de stabilité. La marge de gain s'exprime en décibels, la marge de phase usuellement en degrés. Elles se visualisent bien sur le diagramme de Black, comme ci-contre, ce diagramme étant de loin le mieux adapté à leur lecture. On a alors clairement :

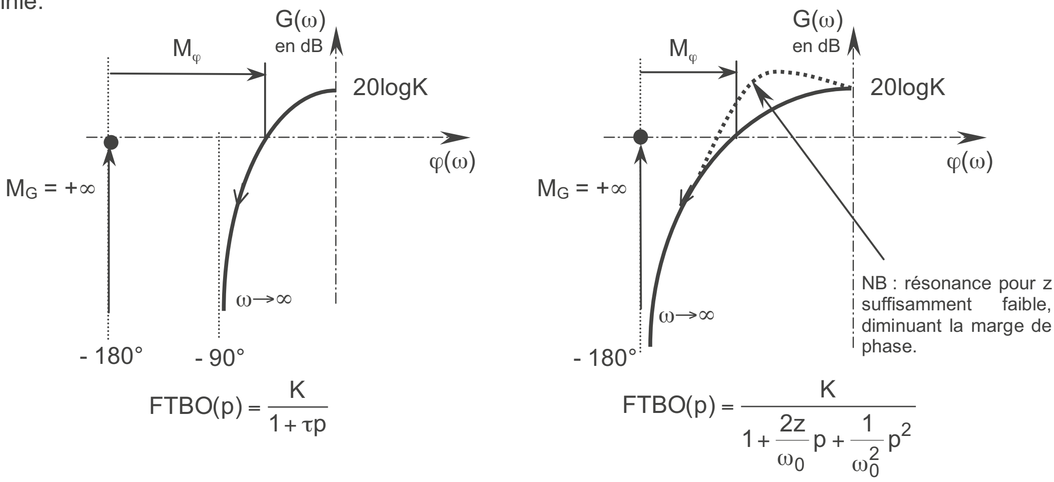
$$\begin{cases} M_\varphi = 180° + \mathrm{Arg}[\mathrm{FTBO}(j\omega_1)] \\ \text{où } 20\log|\mathrm{FTBO}(j\omega_1)| = 0\ \mathrm{dB} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} M_G = -20\log|\mathrm{FTBO}(j\omega_2)| \\ \text{où } \mathrm{Arg}[\mathrm{FTBO}(j\omega_2)] = -180° \end{cases}$$



Si une des marges de stabilité est nulle, l'autre l'est nécessairement et le point critique est atteint : le système asservi est à la limite de stabilité à la pulsation $\omega_c = \omega_1 = \omega_2$. Des marges de stabilité négatives caractérisent, bien entendu, un système asservi instable.

Il est important de noter que pour les systèmes étudiés (cadre de l'utilisation du critère du revers), le sens de parcours de la courbe est toujours tel que $\omega_2 > \omega_1$: ***la pulsation où se lit la marge de gain est toujours supérieure à celle où se lit la marge de phase***. Cette considération permet de lever certaines ambiguïtés qui peuvent exister lorsque plusieurs pulsations critiques sont possibles, comme ci-contre.

■ Pour certains systèmes, l'une des marges peut ne pas être définie, on dit alors qu'elle est ***infinie***. C'est le cas, par exemple, des systèmes fondamentaux du premier et du deuxième ordre dont la marge de gain est infinie. Cf. ci-dessous. En revanche, ils possèdent une marge de phase finie.



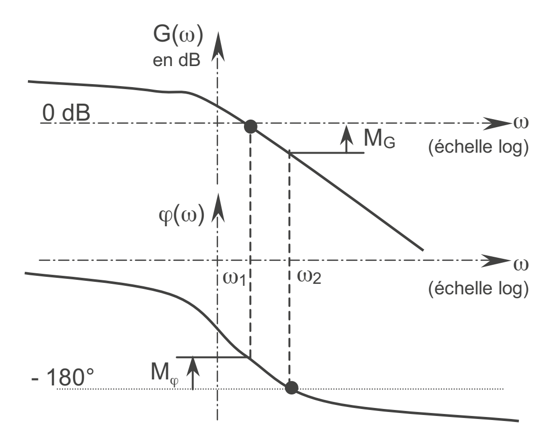
Ainsi, un système asservi dont la fonction de transfert en boucle ouverte est modélisée par un système fondamental du premier ou du deuxième ordre est théoriquement stable. Sa marge de phase est néanmoins d'autant plus faible que le gain de la FTBO est grand. Elle vaut toutefois nécessairement au moins 90° pour le premier ordre, mais peut tendre vers zéro pour le deuxième.

III-2-2 Lecture sur le diagramme de Bode

Comme il a déjà été souligné, le diagramme de Bode est mal adapté à l'analyse de la stabilité :

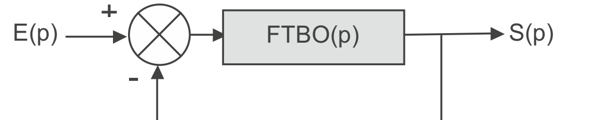
- la lecture s'effectue sur les deux courbes en simultané,
- le point critique n'existe pas en tant que tel, mais est défini par les courbes.

Toutefois, les marges peuvent s'y lire comme ci-contre.



Dans les situations complexes, le fait que la pulsation ω_2 à laquelle est lue la marge de gain doit être supérieure à celle ω_1 à laquelle est lue la marge de phase, permet de lever certaines ambiguïtés.

■ Reprenons, pour illustrer ce dernier propos, l'exemple du paragraphe II-4-3 :



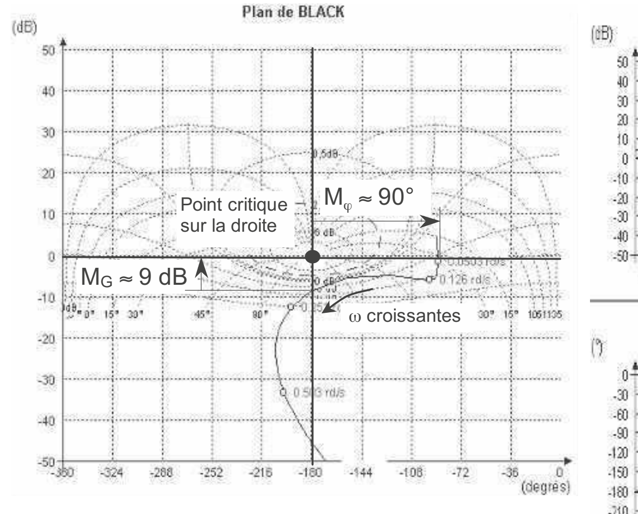
$$\text{avec : } FTBO(p) = \frac{K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p[1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2]}$$

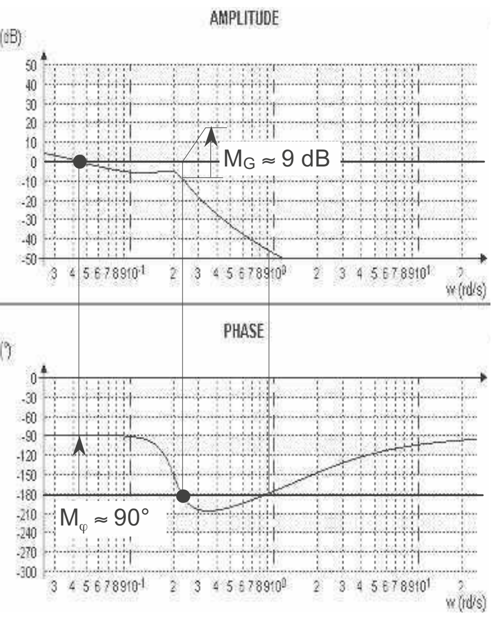
où K est un gain de correction, réglable, τ_1 = 2 s, τ_2 = 0,5 s, ω_0 = 0,2 rad/s et z = 0,2.

Il a été établi que le système asservi est stable pour K < 0,11 et pour K > 7,5.

- pour K < 0,11 (par exemple K = 0,04) :

Les diagrammes de Black et de Bode de la FTBO sont les suivants :



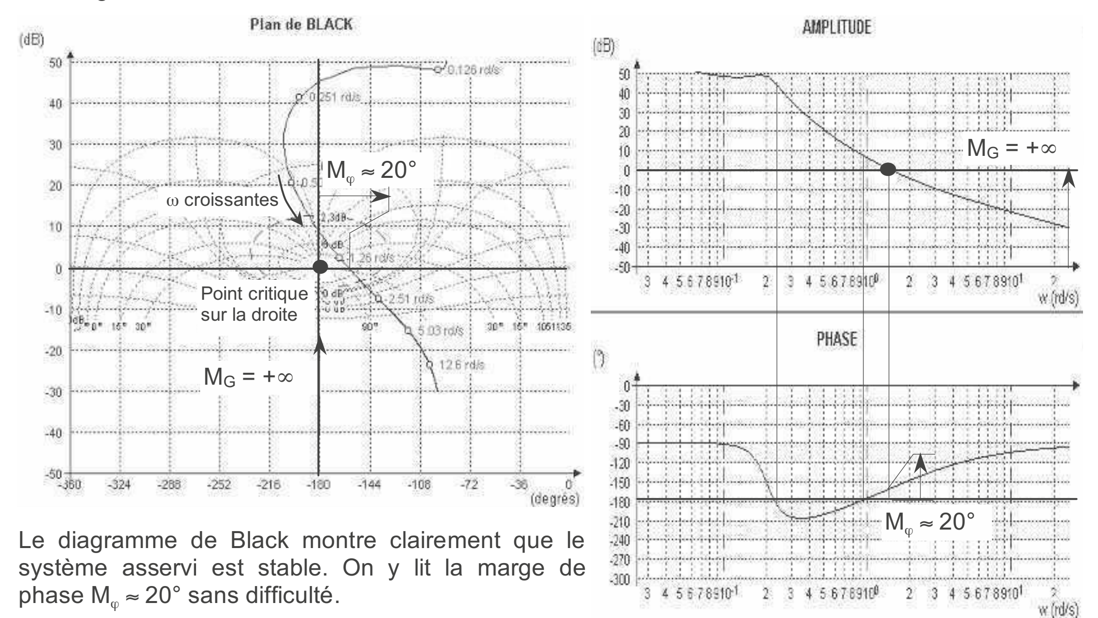


Ces diagrammes de Black et de Bode montrent clairement que le système asservi est stable. On y lit les marges $M_\varphi \approx 90°$ et $M_G \approx 9$ dB. Ces marges sont bien positives.

Sur chacun des deux diagrammes, il est clair que la seconde pulsation déphasant de -180° n'est pas à prendre en compte pour la définition de la marge de gain. En effet, elle définirait une marge de l'ordre de 45 dB. C'est donc la valeur de 9 dB qui est la contrainte la plus forte et définit l'augmentation maximale admissible du gain de la FTBO.

- <u>pour K > 7,5 (par exemple K = 20)</u> :

Les diagrammes de Black et de Bode de la FTBO sont les suivants :



Le diagramme de Black montre clairement que le système asservi est stable. On y lit la marge de phase $M_\varphi \approx 20°$ sans difficulté.

Sachant que la pulsation ω_2 à laquelle est lue la marge de gain doit être supérieure à celle, ω_1, où est lue la marge de phase, on y lit également $M_G = +\infty$. En effet, au-delà de ω_1 la phase reste supérieure à -180°.

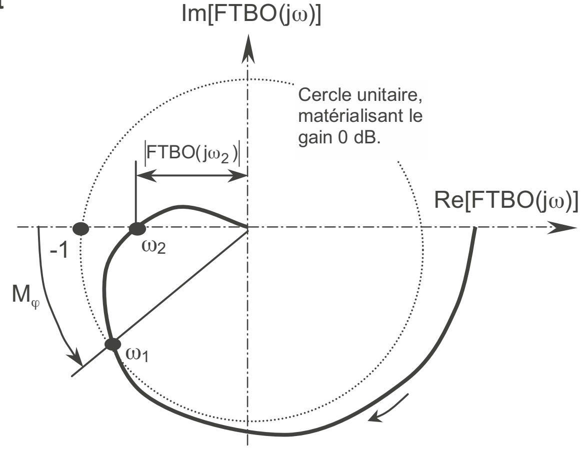
Des considérations identiques permettent de lire ces marges sur le diagramme de Bode, les deux pulsations qui déphasent de -180° étant inférieures à la pulsation ω_1 pour laquelle le gain vaut 0 dB. Cet éclairage permet donc de lever la difficulté signalée au paragraphe II-4-3 : lisant des marges positives sur le diagramme de Bode, on peut y conclure aussi à la stabilité du système asservi. Malgré tout, la lecture sur le diagramme de Black demeure plus aisée.

III-2-3 Lecture sur le diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist est très mal adapté à la lecture des marges qui doit s'opérer comme ci-contre.

La marge de phase nécessite la mesure d'un angle et la marge de gain, ne se faisant pas directement en décibels, nécessite la conversion :

$$M_G = -20 \log \left| FTBO(j\omega_2) \right|$$



III-2-4 Valeurs usuelles

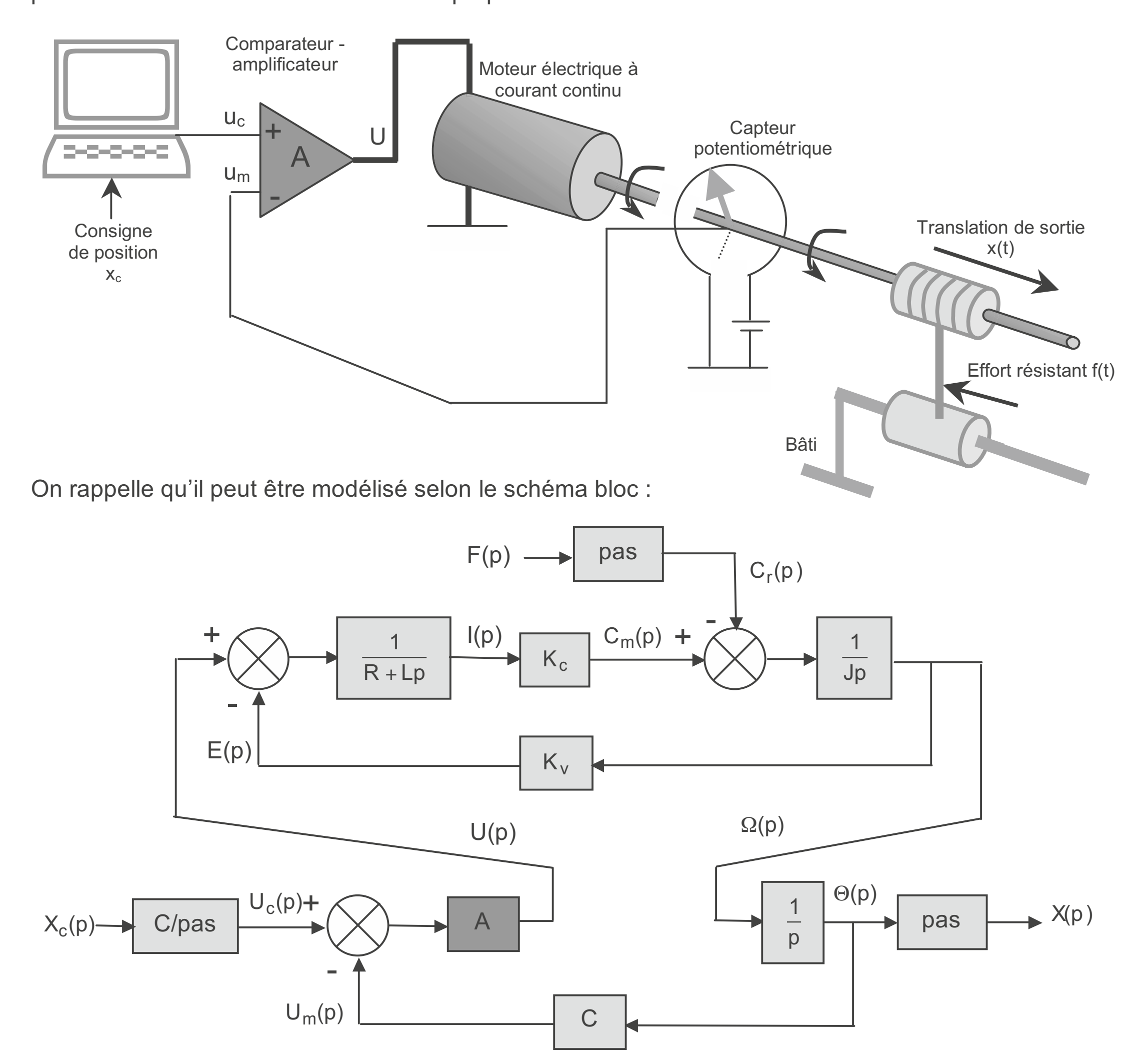
Les systèmes industriels courants sont usuellement réglés avec les marges suivantes :

$$M_G \geq 5 \text{ à } 10 \text{ dB} \quad \text{et} \quad M_\varphi \geq 45°$$

NB : une marge de gain de 6 dB correspond déjà à 100% d'augmentation possible du gain de la FTBO sans risque d'instabilité !

III-2-5 Exemple : asservissement de position

■ On reprend ici l'asservissement de position par moteur à courant continu et système vis-écrou présenté en introduction à la correction proportionnelle :



On rappelle qu'il peut être modélisé selon le schéma bloc :

Le correcteur est un correcteur proportionnel de gain A, réglable. Les autres caractéristiques sont :

Moteur :
- $R = 4{,}44\ \Omega$
- $L = 5\ 10^{-3}$ H
- $K_v = 0{,}58$ V/rad.s^{-1}
- $K_c = 0{,}58$ Nm/A

Chaîne cinématique :
- $J = 10^{-3}$ kg.m^2
- pas = 5 mm/tr
  = $7{,}96\ 10^{-4}$ m/rad

Capteur de position :
- C = 10 V/m

Le correcteur doit être réglé à la valeur A ***la plus grande possible*** pour optimiser la précision, en réaction à l'effort extérieur, et la rapidité. Par ailleurs, les marges minimales suivantes sont imposées :

$$M_G \geq 5 \text{ dB} \quad \text{et} \quad M_\varphi \geq 45°.$$

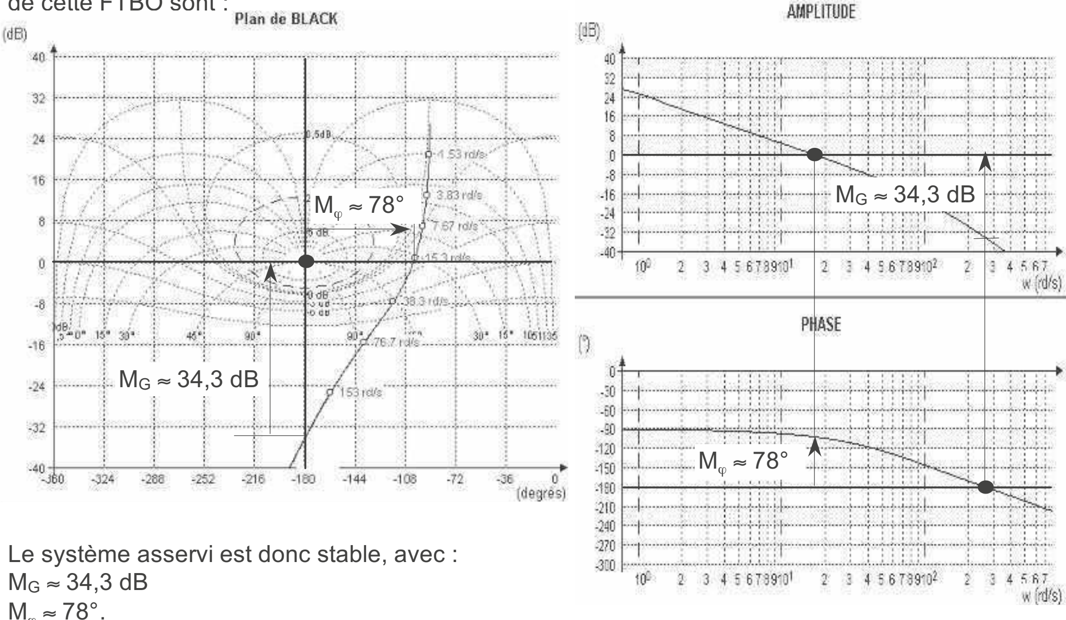
La fonction de transfert en boucle ouverte se détermine par :

$$\mathrm{FTBO}(p) = A\frac{\dfrac{K_c}{Jp(R+Lp)}}{1+\dfrac{K_vK_c}{Jp(R+Lp)}}\frac{1}{p}C = \frac{AC}{p}\frac{K_c}{Jp(R+Lp)+\dfrac{K_vK_c}{Jp(R+Lp)}} = \frac{AC/K_v}{p[1+\dfrac{RJ}{K_vK_c}p+\dfrac{LJ}{K_vK_c}p^2]}$$

Cette FTBO est bien proportionnelle au gain A du correcteur.

NB : Le pas du système vis-écrou, hors boucle, n'intervient pas. Il en va de même de la perturbation. Cela est cohérent avec le fait que la stabilité d'un système est une propriété intrinsèque, indépendante de toute considération extérieure. La réponse du système asservi à la perturbation se fait d'ailleurs, comme toujours, avec le même dénominateur que la réponse à la consigne (cf. rappel au I-1).

■ Pour un réglage du correcteur à <u>A = 1</u>, les diagrammes de Black (et de Bode pour information) de cette FTBO sont :



Le système asservi est donc stable, avec :
$M_G \approx 34,3$ dB
$M_\varphi \approx 78°$.

On peut vérifier que le point critique est atteint pour $A = 10^{34,3/20} \approx 51,5$ comme prévu par le critère de Routh (cf. I-1).

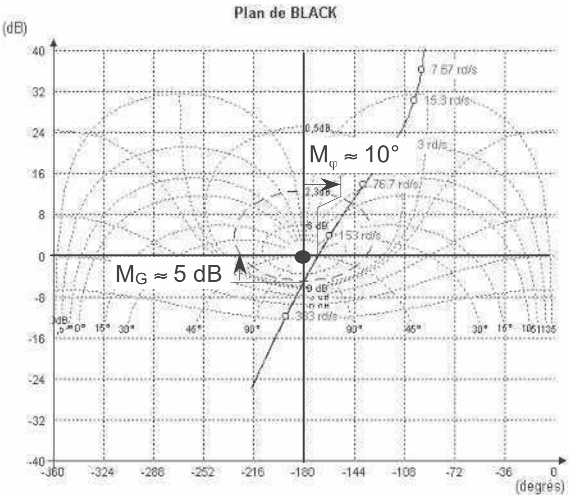
■ Une marge de gain de 5 dB sera obtenue par une augmentation du gain de 34,3 - 5 = 29,3 dB.
Soit pour $A = 10^{29,3/20} \approx 29,2$.

Le diagramme de Black est alors le diagramme ci-contre, translaté du précédent de 29,3 dB vers le haut.

On y vérifie que $M_G \approx 5$ dB.

Mais on y lit $M_\varphi \approx 10°$. Cette valeur est très insuffisante puisqu'on souhaite $M_\varphi \geq 45°$.

Le critère de marge de phase est donc plus exigeant que celui de marge de gain.

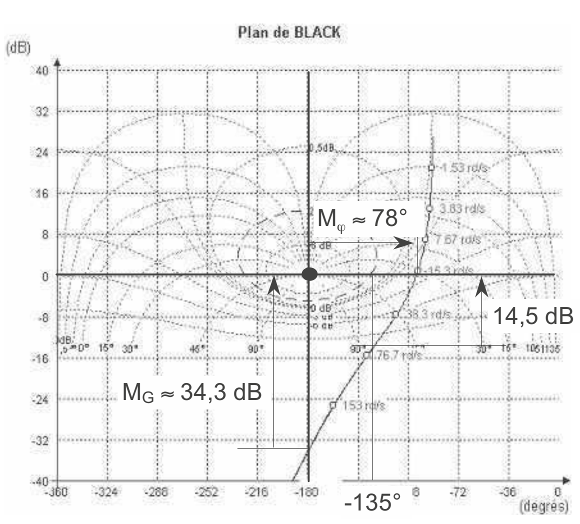


■ Le réglage consiste donc à obtenir une marge de phase de 45°.

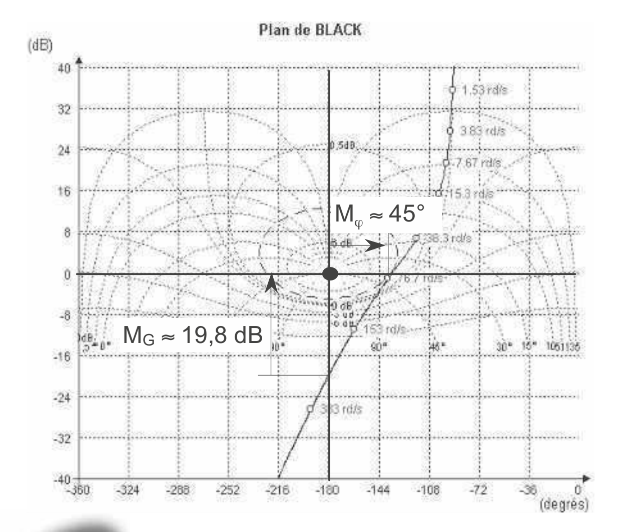
Or, pour le réglage initial à la valeur A = 1 (diagramme de Black rappelé ci-contre), le déphasage de -180 + 45 = -135° est obtenu pour un gain de -14,5 dB.

Ainsi, si on augmente le gain de 14,5 dB, il s'annulera pour un déphasage de -135°, assurant ainsi une marge de phase de 45°.

On choisira donc pour gain :
$A = 10^{14,5/20} \approx 5,3$.



Le nouveau diagramme est alors obtenu par translation verticale de +14,5 dB :



On y vérifie que $M_\varphi \approx 45°$, et on contrôle par ailleurs que :
$M_G \approx 34,3 - 14,5 = 19,8$ dB > 5 dB.

Conclusion :

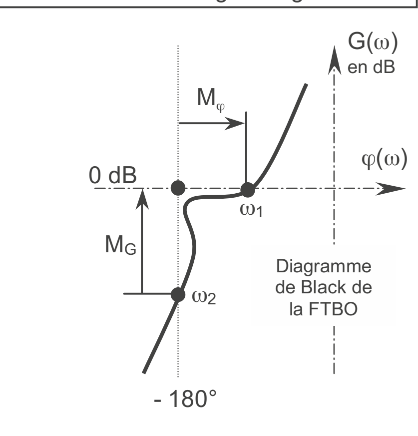
On réglera A = 5,3.
Alors $M_\varphi \approx 45°$ et $M_G \approx 19,8$ dB.
Cette valeur de gain A du correcteur proportionnel est la plus grande valeur qui satisfait le cahier des charges :
$M_\varphi \geq 45°$ et $M_G \geq 5$ dB.

La précision et la rapidité sont optimisées, dans la mesure des marges exigées.

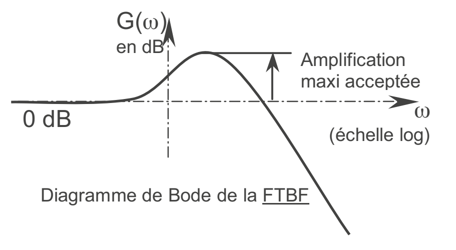
III-3 Marge d'amplitude

III-3-1 Objectif

Certains systèmes peuvent présenter des marges de gain et de phase largement suffisantes, sans que pour autant la stabilité soit satisfaisante. Ci-contre, par exemple, la courbe passe très près du point critique, malgré des marges importantes. Il est alors nécessaire d'introduire un autre critère : ***la marge d'amplitude***. Celle-ci va permettre de formuler le cahier des charges en termes de nécessité, pour la sortie, de ne pas présenter une amplification supérieure à une certaine valeur en réponse fréquentielle.



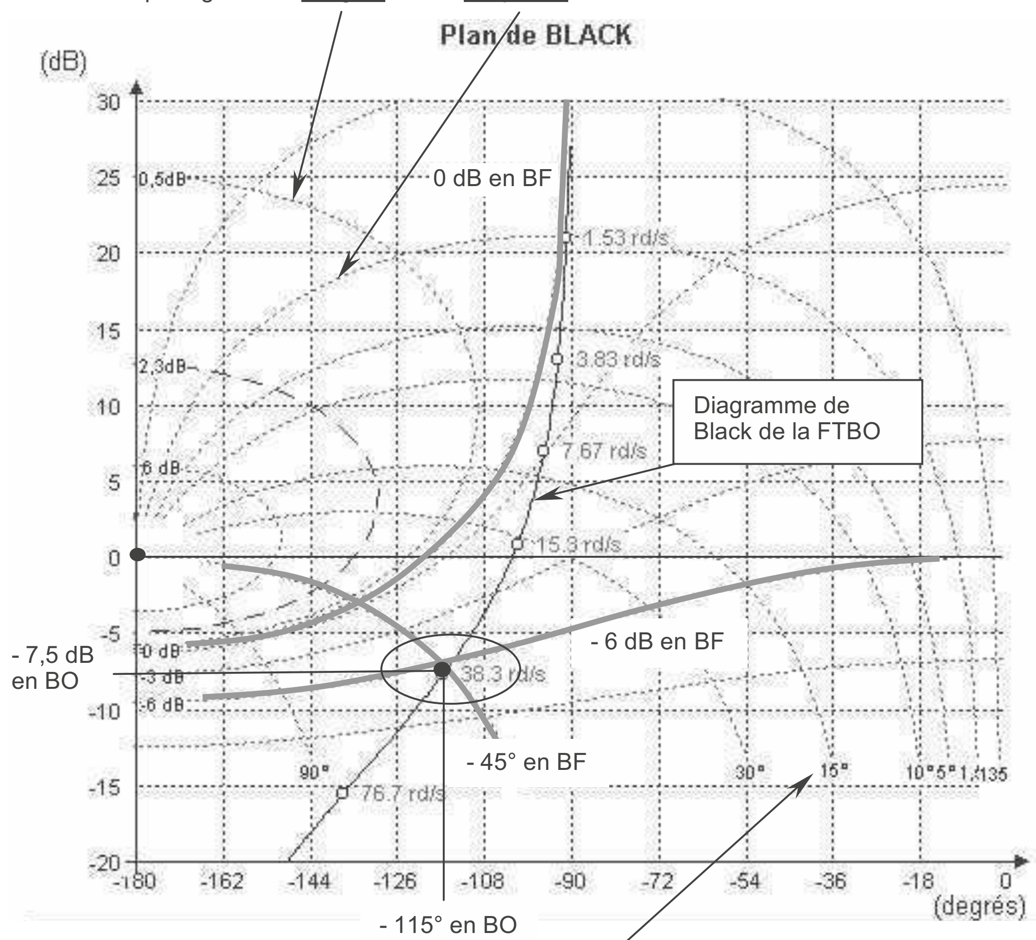
L'étude étant restreinte aux systèmes stables et précis, donc de gain unitaire, dont le diagramme d'amplitude dans le plan de Bode possède l'allure ci-contre, l'amplification maximale acceptée est donc la valeur maximale lue sur la courbe de gain.



Comme pour les marges de gain et de phase, la marge d'amplitude, qui caractérise le comportement dynamique du système asservi (FTBF), va être déterminée à partir d'une analyse fréquentielle de la FTBO. Celle-ci sera conduite dans le plan de Black et plus particulièrement sur l'abaque de Hall.

III-3-2 Abaque de Hall

L'abaque de Hall propose une méthode graphique permettant de passer de la fonction de transfert en boucle ouverte FTBO(jω) à la fonction FTBO(jω) / [1+ FTBO(jω)]. Dans le cas d'un retour unitaire, auquel il est toujours possible de se ramener pour les systèmes asservis, cela correspond à la fonction de transfert en boucle fermée. Cet abaque se compose du diagramme de Black de la FTBO sur lequel figure des <u>iso-gain</u> et des <u>iso-phase</u> de la FTBF.



NB : on notera un signe négatif implicite dans les iso-phase de la FTBF du logiciel utilisé ici.

Ainsi, par exemple, sur le diagramme ci-dessus (qui reprend l'exemple du paragraphe précédent pour A = 1), on lit que pour une pulsation d'environ 38,3 rad/s :

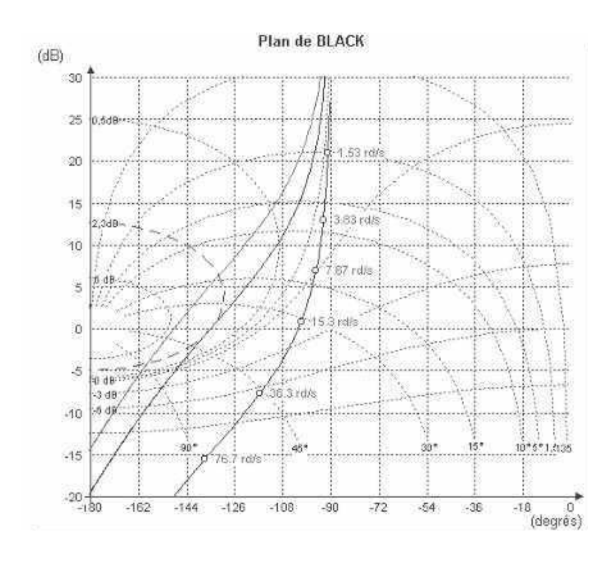
- la FTBO présente un gain de - 7,5dB et un déphasage de - 115° (par lecture usuelle du diagramme de Black de la FTBO),
- la FTBF présente un gain de - 6dB et un déphasage de - 45° (par utilisation de l'abaque).

Il est intéressant de remarquer que l'iso-gain à 0 dB en BF présente une asymptote verticale coïncidant avec une phase de - 90° et un gain infini en BO. Cela traduit le fait qu'aux faibles pulsations, le comportement en intégrateur du système en boucle ouverte assure un comportement statique précis du système. Au delà de cette courbe iso-gain particulière, les courbes iso-gain entourent le point critique.

III-3-3 Interprétation

Dans le cas présenté précédemment, le diagramme de Black de la FTBO tangente la courbe iso-gain de 0 dB en BF. Cela signifie que le gain maximal du système asservi est de 0 dB : il n'y a pas d'amplification.

Si on augmente le gain de la FTBO, son diagramme de Black se trouve translaté verticalement, comme ci-contre.



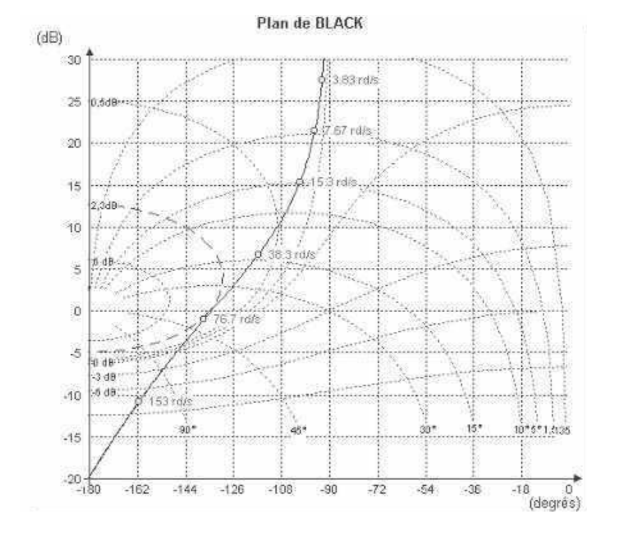
À partir d'une certaine valeur de gain, la courbe traverse les iso-gain positives en BF, tout en demeurant tangente à l'iso-gain de 0 dB pour les basses pulsations. Cela signifie qu'il existe dans ce cas des pulsations conduisant à une amplification en BF : le système asservi présente un phénomène de résonance.

La courbe iso-gain en BF qui est alors tangente au diagramme de Black permet de connaître l'amplification maximale que peut présenter la réponse fréquentielle du système asservi.

III-3-4 Réglage selon le critère de Hall

Il est assez usuel d'imposer une amplification maximale de 2,3 dB en BF. Cela correspond à une amplification de 30%.

Ainsi la configuration limite acceptée est celle qui conduit le diagramme de Black de la FTBO à être tangent à la courbe iso-gain particulière de +2,3 dB en BF, dite contour de Hall, matérialisée en pointillés dans les diagrammes précédents. Dans le cas présent, cette configuration est obtenue pour A ≈ 5,5. Voir ci-contre.



Il est bien entendu possible de rencontrer des cahiers des charges avec des exigences différentes.

III-4 Bilan

En termes de stabilité, un cahier des charges peut exiger trois marges, traduisant un « éloignement suffisant » du lieu de transfert de la FTBO par rapport au point critique :

- une marge de gain, usuellement de l'ordre de 5 à 10 dB minimum,
- une marge de phase, usuellement de l'ordre de 45° minimum,
- une marge d'amplitude, usuellement de l'ordre de 2,3 dB maximum.

Le réglage s'effectue alors de manière à respecter le critère le plus exigeant. Dans l'exemple précédent, les exigences d'une marge de phase de 45° et d'une marge d'amplitude de 2,3 dB conduisent sensiblement au même réglage, la marge de gain étant alors largement satisfaite.

IV - CORRECTEURS LINÉAIRES USUELS

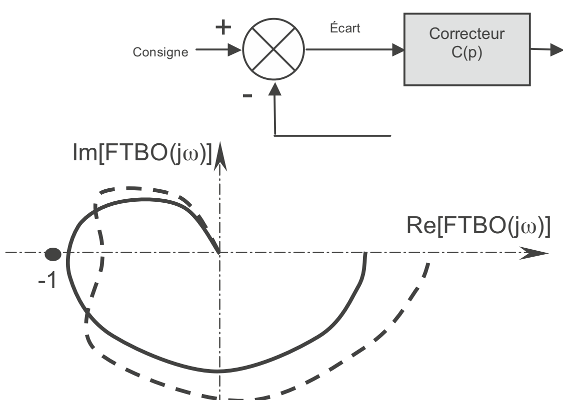
IV-1 Objectifs de la correction

Les développements qui précèdent ont mis en évidence les limites que peut présenter la correction proportionnelle. Celle-ci se heurte en particulier à deux écueils :

- si le système n'est pas intrinsèquement précis, la correction proportionnelle peut améliorer la précision, mais pas la rendre absolue, puisqu'elle ne modifie pas la classe de la FTBO ;
- une modification du gain de la FTBO, conduite par une recherche d'amélioration de la précision ou de la rapidité, peut conduire à des marges de stabilité incompatibles avec le cahier des charges.

L'introduction d'un correcteur pourra donc, si nécessaire, modifier la classe de la FTBO en introduisant des éléments intégrateurs afin d'assurer la précision exigée. Une intégration assure la précision de position, deux intégrations celle de traînage, etc.

Le correcteur pourra aussi « déformer » le lieu de transfert de la FTBO, afin d'éviter le point critique en garantissant les marges attendues.



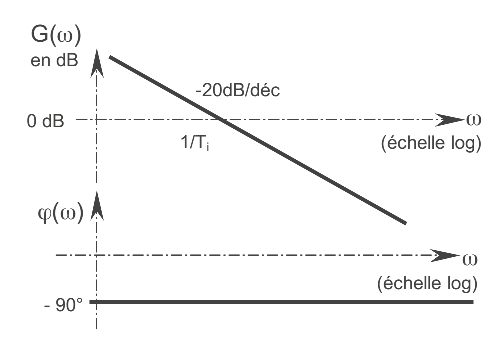
IV-2 Correction intégrale et correction proportionnelle-intégrale

■ Le ***correcteur intégral*** possède une fonction de transfert de la forme :

$$C(p) = \frac{1}{T_i p}$$

Il agit clairement sur la ***précision*** en apportant une intégration dans la FTBO.

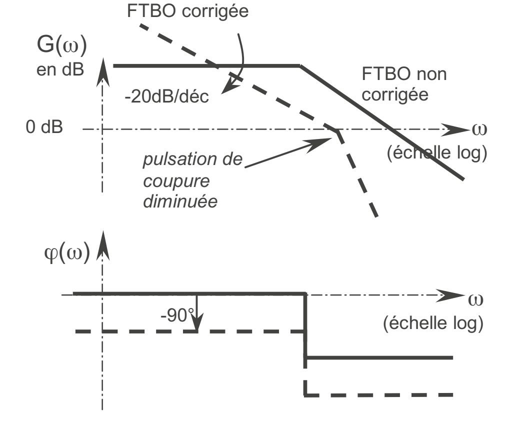
Son diagramme de Bode est donné ci-contre.



Puisqu'il diminue la pente de la courbe de gain de 20 dB/décade en chaque point, il a tendance à diminuer la bande passante de la FTBO (pulsation de coupure) et donc à ***ralentir*** le système (cf. II-5).

Mais surtout, il possède un effet ***déstabilisateur*** important, puisqu'il diminue la phase de 90° pour toutes les pulsations. De ce fait, il ne peut être utilisé que pour corriger des systèmes très peu déphaseurs.

L'usage de ce correcteur est, principalement pour cette dernière raison, très limité. On lui préfère, toujours pour agir sur la précision, le correcteur proportionnel-intégral qui permet un réglage des marges de stabilité.

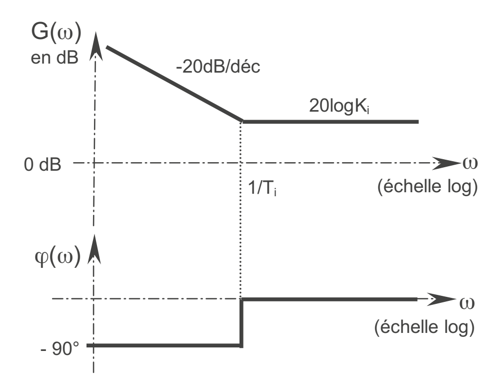


■ Le correcteur ***proportionnel-intégral (PI)*** possède une fonction de transfert de la forme :

$$C(p) = K_i\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_i\,\frac{1 + T_i p}{T_i p}$$

Sa classe 1 apporte de la ***précision***, tout comme le correcteur intégral.

Son diagramme de Bode asymptotique est donné ci-contre. On constate que ce correcteur a la particularité de limiter l'effet intégral aux basses pulsations.



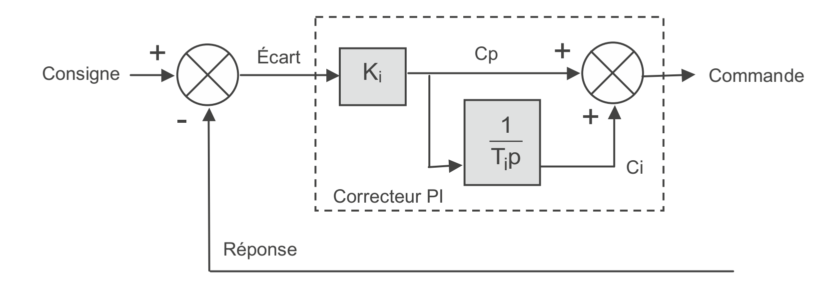
Ainsi, contrairement au correcteur purement intégral, son effet sur les marges de stabilité peut être réglé en agissant sur la valeur de sa pulsation de cassure qui devra être choisie suffisamment basse, c'est-à-dire que la constante de temps T_i du correcteur devra être suffisamment élevée.

Ce correcteur, tout comme le précédent et pour les mêmes raisons, a tendance à ralentir le système. Mais cette fois, le réglage du gain K_i permettra d'agir sur la bande passante, comme toute correction proportionnelle.

En résumé un correcteur PI ***améliore la précision*** du système, mais, comme toute correction intégrale, a tendance à le ralentir et à diminuer sa stabilité. Les réglages des caractéristiques T_i et K_i du correcteur se feront donc afin de minimiser ces effets.

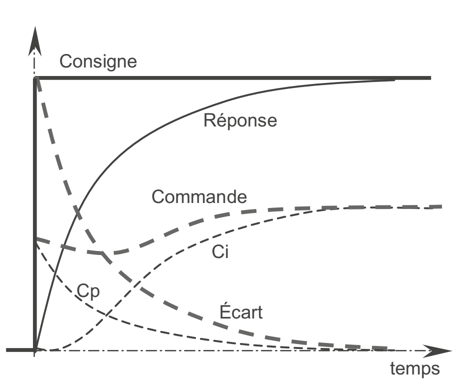
■ **Remarque : approche temporelle de la correction PI**

Il peut être intéressant de quitter l'analyse fréquentielle en boucle ouverte pour revenir aux aspects temporels et suivre l'évolution de la commande suite à une telle correction.



La commande est la somme de deux contributions : Cp, contribution proportionnelle à l'écart et Ci, proportionnelle à l'intégrale de l'écart.

Supposons une consigne en échelon. À l'instant initial, l'écart est égal à la consigne et la commande lui est proportionnelle, la contribution Ci étant nulle. Au cours du temps, la contribution Ci va accumuler l'écart, même si celui-ci diminue. Inversement, la contribution Cp va diminuer. Il va donc y avoir un transfert entre les deux contributions. Lorsque l'écart est annulé, la contribution Cp est nulle, mais la contribution Ci reste constante, maintenant la commande qui justement permet un écart nul, et donc la précision. On perçoit alors la relative lenteur d'action de ce type de correction. Cette lenteur lui interdit de réagir aux variations rapides de sens de la consigne, ce qui peut être générateur d'instabilité.



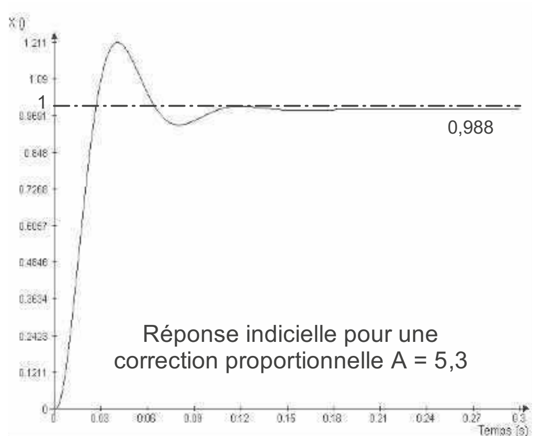
■ **Exemple : asservissement de position**

L'asservissement de position par moteur à courant continu et système vis-écrou avec correction proportionnelle ne peut pas être précis, compte tenu de la perturbation que constitue l'effort résistant en sortie.

Les marges de stabilité exigées par le cahier des charges, en particulier la marge de phase de 45°, ont conduit à limiter le gain A du correcteur proportionnel à la valeur A = 5,3. Cf. III-2-5.

Ceci conduit, par exemple pour un effort résistant de 100 N, à une erreur statique de position de 1,2%.

Afin de supprimer cette erreur statique, l'introduction d'un correcteur PI, assurant une intégration dans la partie de la boucle située avant le moteur, va s'avérer performante.



Réponse indicielle pour une correction proportionnelle A = 5,3

Le correcteur proportionnel A va donc être remplacé par un correcteur de fonction de transfert :

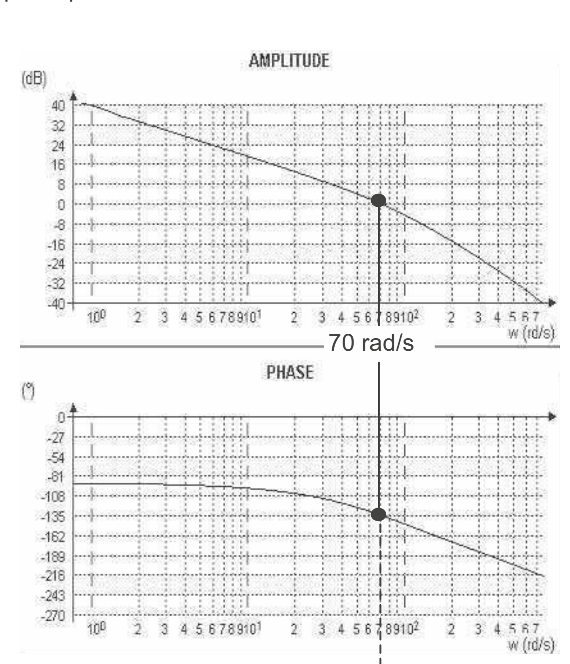
$$C(p) = A\frac{1+T_i p}{T_i p}$$

On maintient un gain A = 5,3. La constante de temps T_i va devoir alors être choisie suffisamment grande pour ne pas affecter les marges de stabilité obtenues par la correction proportionnelle.

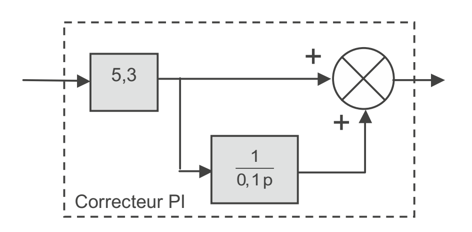
Il faut pour cela connaître la pulsation de coupure ω_1 de la FTBO, qui se lit aisément ci-contre sur son diagramme de Bode, et choisir la pulsation de cassure $1/T_i$ du correcteur suffisamment basse devant ω_1.

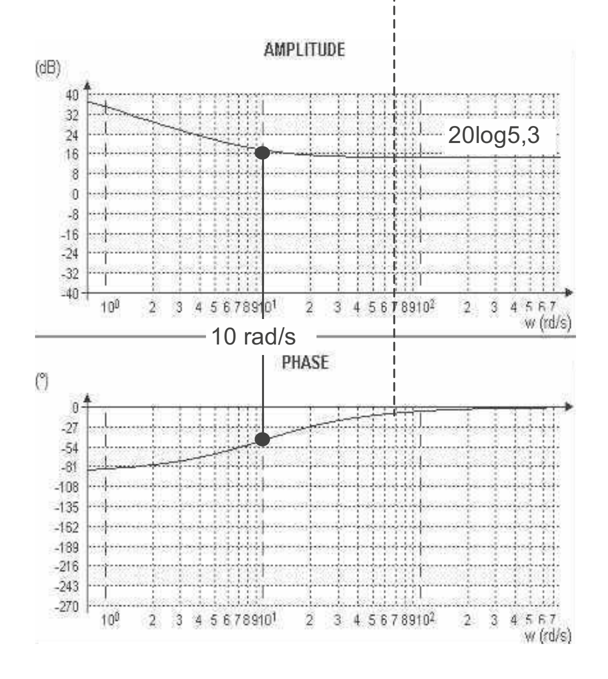
On lit une pulsation de coupure d'environ 70 rad/s.

NB : on peut accessoirement vérifier sur ce diagramme de Bode que pour cette pulsation de coupure la phase de la FTBO est de -135°, ce qui confirme la marge de phase de 45° prévue par le réglage de A.



On choisira par exemple une pulsation de cassure de l'ordre de 10 rad/s pour le correcteur PI, soit T_i = 0,1 s :



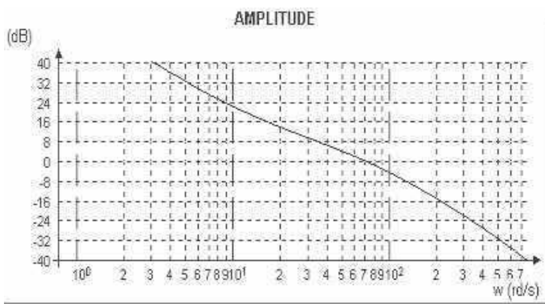


Le diagramme de Bode de ce correcteur PI est alors le diagramme ci-contre. On voit qu'aux alentours de la pulsation de coupure de la FTBO de 70 rad/s, ce correcteur se comporte pratiquement comme le correcteur proportionnel de gain 5,3, même si un très léger déphasage est encore présent.

Ce correcteur n'aura donc pratiquement aucun effet sur les marges de stabilité préalablement réglées, tout en apportant une intégration dans la boucle afin d'apporter, tel est son rôle, la précision attendue.

On peut alors tracer le diagramme de Bode du système corrigé par ce nouveau correcteur, pour confirmer la pertinence de son choix et vérifier son incidence sur la réponse du système à une consigne indicielle, comme précédemment.

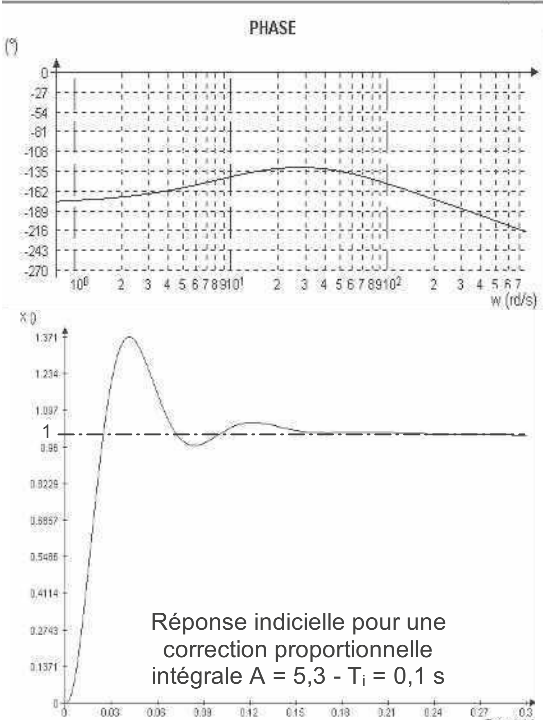
Diagramme de Bode de la FTBO corrigée :



- dans les basses pulsations, l'effet du correcteur est amplificateur et déphaseur : il conviendra de s'assurer que cela ne génère pas d'effet nuisible sur le système ;
- la pulsation de coupure de 70 rad/s est conservée et la marge de phase à peine diminuée ;
- dans les hautes pulsations, le correcteur est sans effet : il n'affecte donc pas la marge de gain, qui de toute façon était déjà largement suffisante.

Réponse indicielle :

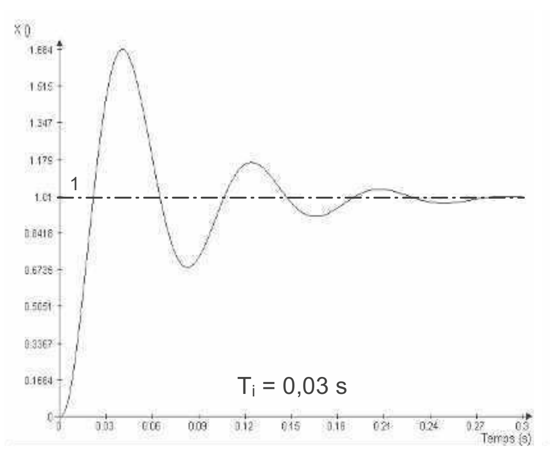
- on vérifie la précision obtenue par l'effet intégral ;
- les oscillations sont légèrement plus fortes qu'avec la simple correction proportionnelle (dépassement de 37,1% au lieu de 21,1%) car la marge de phase a très légèrement diminué.



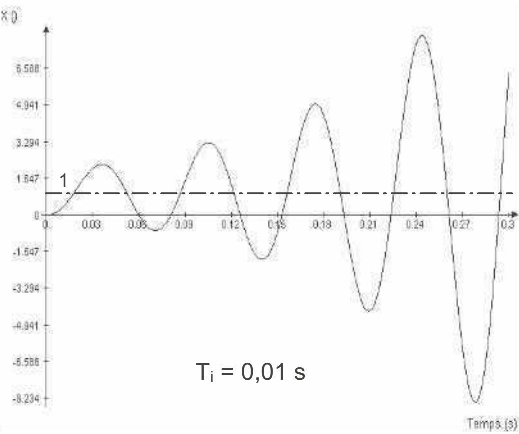
Réponse indicielle pour une correction proportionnelle intégrale A = 5,3 - T_i = 0,1 s

Pour pallier cet inconvénient, on pourrait prévoir un correcteur avec une constante de temps plus importante. Sa pulsation de cassure alors plus faible assurerait un apport en déphasage encore moindre, voire quasiment nul, vers la pulsation de coupure (70 rad/s) de la FTBO non corrigée. Toutefois, cette constante de temps trop importante ralentirait le système. On préfère alors corriger cet effet par adjonction d'une correction dérivée, comme cela va être vu plus loin (IV-3 et IV-4).

Si, inversement, on choisit une constante de temps trop faible, le correcteur apportera trop de déphasage autour de la pulsation de cassure de la FTBO non corrigée et générera des oscillations importantes, voire déstabilisera le système si le déphasage apporté est supérieur aux 45° de marge de phase.



T_i = 0,03 s



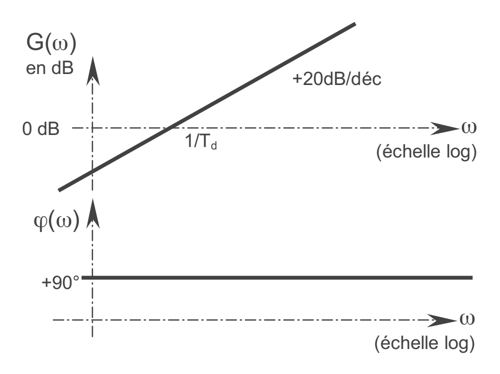
T_i = 0,01 s

IV-3 Correction dérivée et correction proportionnelle-dérivée

■ Le ***correcteur dérivé*** possède une fonction de transfert de la forme :

$C(p) = T_d p$

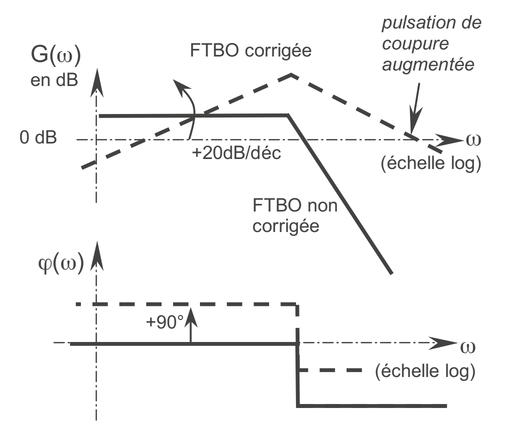
Son diagramme de Bode est donné ci-contre.



NB : Ce correcteur n'est pas matériellement réalisable, puisqu'il n'est pas causal. Toutefois, il peut être raisonnablement approché par un correcteur ayant pour fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{T_d p}{1 + aT_d p} \quad \text{avec } a << 1$$

Puisqu'il augmente la pente de la courbe de gain de 20 dB/décade en chaque point, il a tendance à augmenter la bande passante de la FTBO (pulsation de coupure) et donc à ***améliorer la rapidité*** du système.



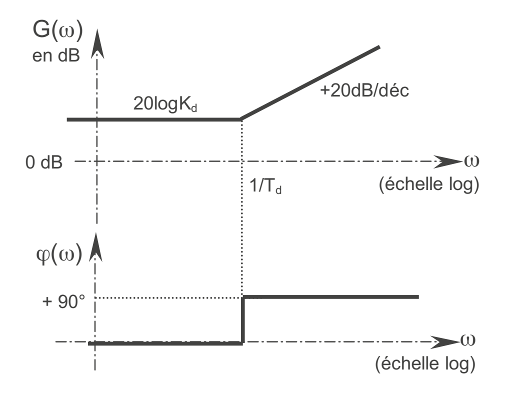
De plus, puisqu'il augmente la phase de 90° pour toutes les pulsations, il apporte en général de la **stabilité**.

En revanche, il nuit clairement à la précision, en diminuant la classe de la FTBO. Il présente également l'inconvénient majeur de ne délivrer aucune commande si l'écart est constant !

Pour ces deux raisons, on lui préfère le correcteur proportionnel dérivé.

■ Le correcteur ***proportionnel-dérivé (PD)*** possède une fonction de transfert de la forme :

$C(p) = K_d(1 + T_d p)$



NB : Tout comme le correcteur dérivé, ce correcteur n'est pas matériellement réalisable, puisqu'il n'est pas causal. Il sera approché par :

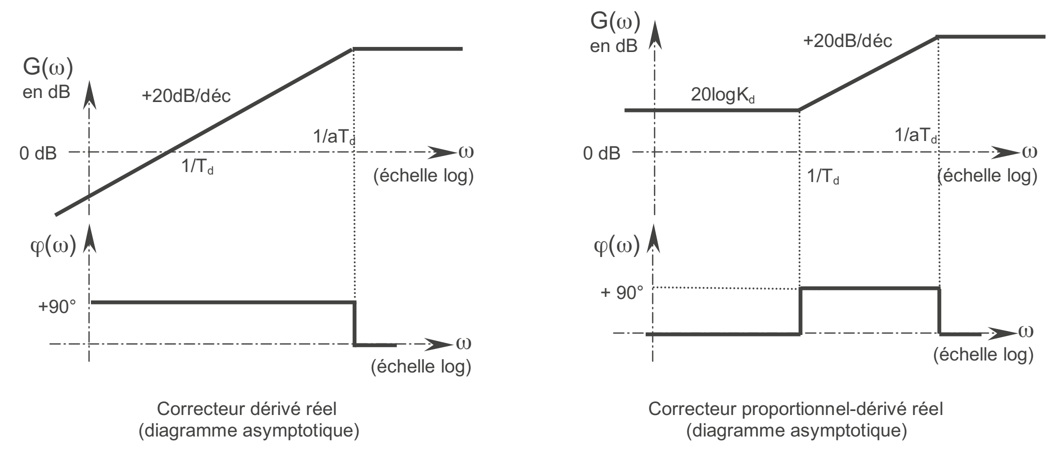
$$C(p) = K_d \frac{1 + T_d p}{1 + aT_d p} \quad \text{avec } a << 1$$

Son diagramme de Bode asymptotique est donné ci-contre. On constate que ce correcteur a la particularité de limiter l'effet dérivé aux hautes pulsations.

Ceci conserve les propriétés de rapidité et de stabilité. Par contre, son gain aux basses pulsations permet d'avoir une action corrective sur la précision, comme toute correction proportionnelle.

■ Ces deux correcteurs présentent toutefois l'inconvénient d'amplifier les hautes pulsations et donc en particulier tous les ***bruits*** qui peuvent parasiter l'écart : bruits électromagnétiques, bruits de mesure dans la chaîne de retour, etc.

Bien entendu, l'amplification infinie aux hautes pulsations est en pratique limitée par l'existence du dénominateur $(1 + aT_dp)$ dans le correcteur réel, causal. Toutefois, le gain y reste important.

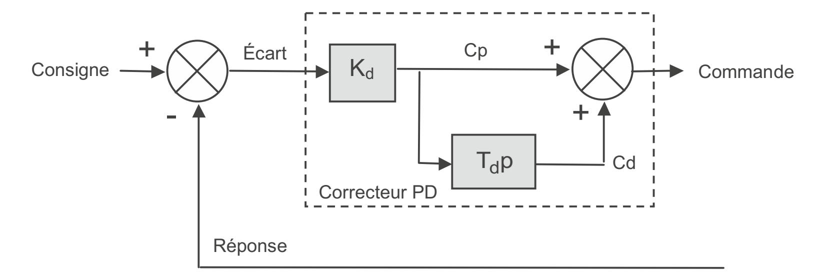


Correcteur dérivé réel
(diagramme asymptotique)

Correcteur proportionnel-dérivé réel
(diagramme asymptotique)

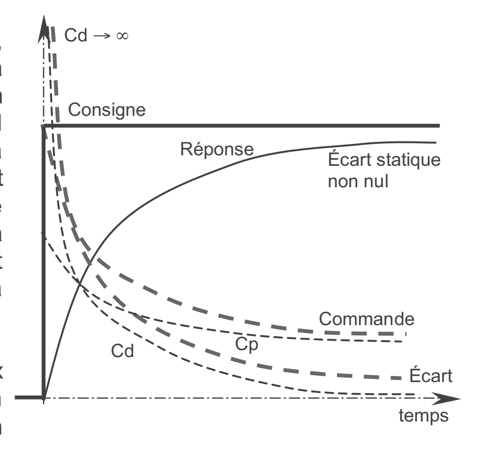
■ **Remarque : approche temporelle de la correction PD**

Il peut être intéressant, comme il a été fait précédemment pour le correcteur PI, de quitter l'analyse fréquentielle en boucle ouverte pour revenir aux aspects temporels et suivre l'évolution de la commande suite à une telle correction.



La commande est la somme de deux contributions : Cp, contribution proportionnelle à l'écart et Cd, proportionnelle à la dérivée de l'écart.

Supposons une consigne en échelon. À l'instant initial, l'écart est brusquement égal à la consigne. Ainsi, la contribution dérivée Cd est infinie à cet instant (en pratique saturée). Au cours du temps, la contribution Cd va diminuer, jusqu'à s'annuler lorsque la réponse tendra vers sa valeur asymptotique. Il convient alors qu'un écart demeure (absence de précision) pour que la commande proportionnelle, seule alors existante, assure la commande du processus. La correction dérivée agit donc aux temps courts, apportant de la rapidité et de la stabilité. Elle est sans effet aux temps longs.



NB : La réaction vive de la commande dérivée aux brusques variations de la consigne, comme ici en échelon, est un inconvénient majeur de la correction dérivée.

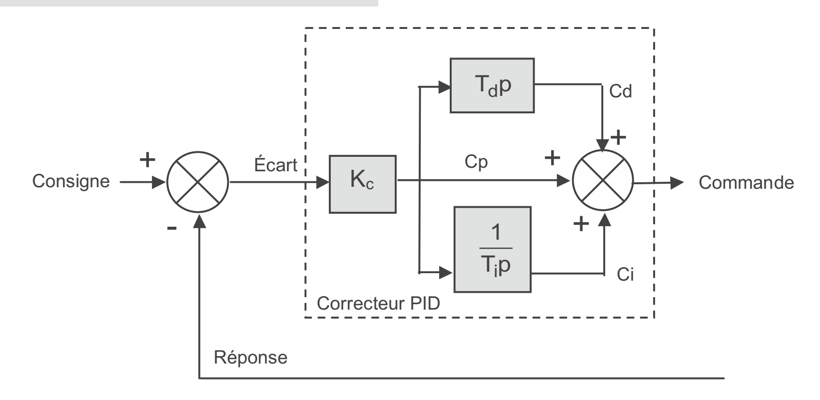
Pour y pallier, outre la saturation ou le filtrage du signal, il existe des solutions venant légèrement modifier la structure du correcteur, comme par exemple sur le Robot Ericc 3 (cf. paragraphe suivant).

IV-4 Correction proportionnelle-intégrale-dérivée PID

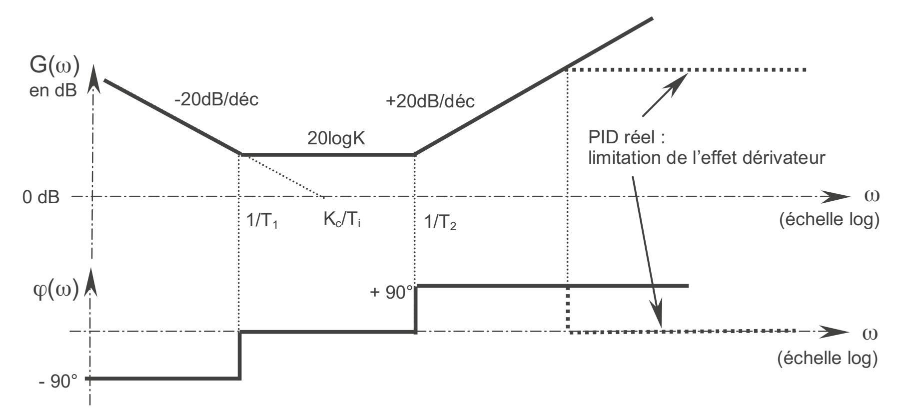
■ Les corrections intégrale et dérivée ayant des effets antagonistes, il pourra être intéressant de les associer au sein d'un même correcteur. Tel est le correcteur PID, dont la fonction de transfert s'écrit :

$$C(p) = K_c\left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right) = K_c \frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p}$$

avec $T_d < 4T_i$



Cette expression n'est que théorique, puisque non causale. Le terme dérivé est en réalité une approximation, comme exposé plus haut. Son diagramme de Bode asymptotique est le suivant :



Les deux cassures sont déterminées par les racines du numérateur. On calcule pour cela le discriminant du numérateur :

$\Delta = T_i^2 - 4T_iT_d > 0$ puisque $T_d < 4T_i$

Puis les deux racines réelles :

$$-\frac{1}{T_1} = \frac{-T_i + \sqrt{T_i^2 - 4T_iT_d}}{2T_iT_d} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{T_2} = \frac{-T_i - \sqrt{T_i^2 - 4T_iT_d}}{2T_iT_d}$$

Soit : $\dfrac{1}{T_1} = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4T_d / T_i}}{2T_d}$ et $\dfrac{1}{T_2} = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4T_d / T_i}}{2T_d}$

La gain asymptotique dans la zone centrale est alors clairement : $K = K_c \dfrac{T_1}{T_i}$.

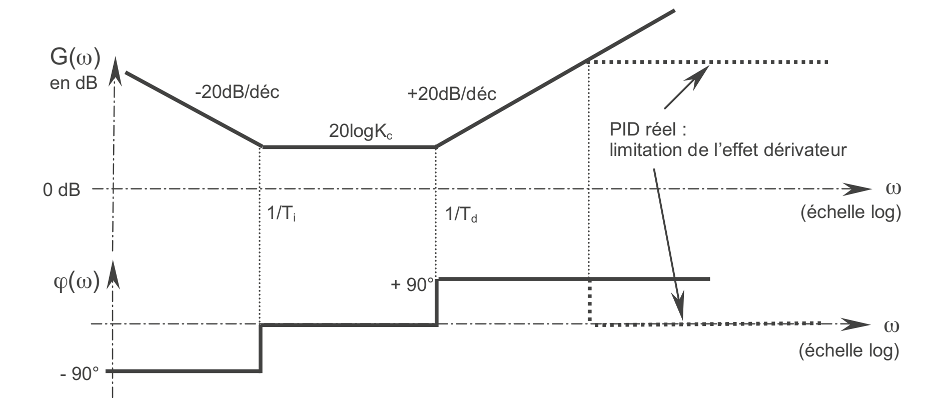
■ Si les constantes de temps T_i et T_d sont suffisamment éloignées pour que $T_d << T_i$, ce qui est souvent le cas, alors on pourra faire les approximations :

$$\frac{1}{T_1}=\frac{1-\sqrt{1-4T_d/T_i}}{2T_d}\approx\frac{1-1+2T_d/T_i}{2T_d}=\frac{1}{T_i}$$

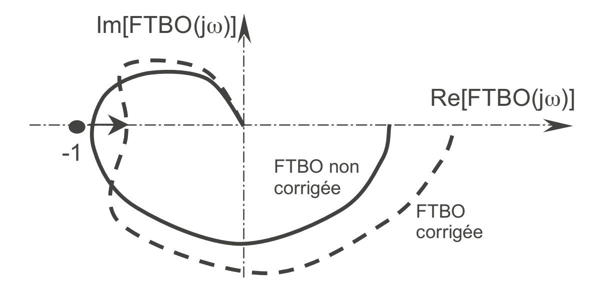
$$\frac{1}{T_2}=\frac{1+\sqrt{1-4T_d/T_i}}{2T_d}\approx\frac{1+1-2T_d/T_i}{2T_d}=\frac{1}{T_d}+\frac{1}{T_i}\approx\frac{1}{T_d}$$

$$K=K_c\frac{T_1}{T_i}\approx K_c$$

soit donc plus simplement :



Ce correcteur présente donc les avantages de la correction intégrale en termes de précision par augmentation de la classe de la FTBO. L'effet proportionnel conjoint à l'effet dérivé permet d'ajuster la rapidité et les marges de stabilité. En pratique, la plage de pulsations [$1/T_i$; $1/T_d$] où le correcteur apporte une atténuation sans déphaser sera choisie autour du point critique de la FTBO non corrigée, afin d'y diminuer le gain sans provoquer de déphasage.



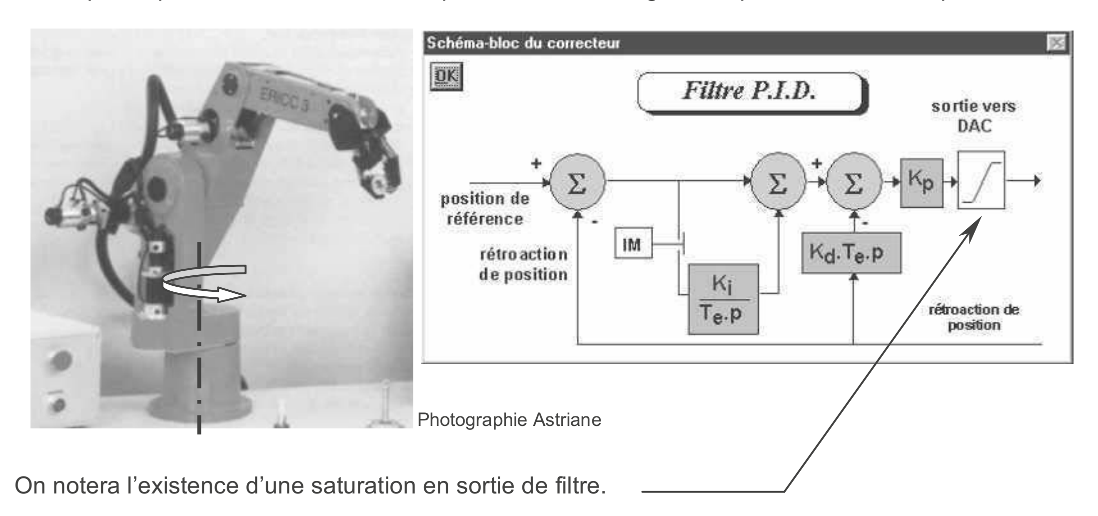
■ L'effet dérivé conserve la propriété d'amplification des bruits ainsi que la vivacité de réaction aux changements brusques de consigne signalés pour le correcteur PD. En pratique, comme pour celui-ci, il convient d'adjoindre un filtre passe bas pour en limiter les effets. On choisit en général un filtre du premier ordre.

Ce filtre est de fait déjà présent dans la composante dérivée réelle : $\frac{T_d p}{1+aT_d p}\approx T_d p$ avec $a \ll 1$.

Si sa bande passante s'avère insuffisante, on peut augmenter a ou placer un second filtre en série avec le correcteur entier :

- Correcteur PID avec filtre sur la composante dérivée : $C(p)=K_c\left(1+\frac{1}{T_i p}+\frac{T_d p}{1+\tau p}\right)$
- Correcteur PID théorique avec filtre en série : $C(p)=K_c\left(1+\frac{1}{T_i p}+T_d p\right)\frac{1}{1+\tau p}$
- Correcteur PID réel avec filtre en série : $C(p)=K_c\left(1+\frac{1}{T_i p}+\frac{T_d p}{1+aT_d p}\right)\frac{1}{1+\tau p}$

Une autre solution est la structure du correcteur retenu sur l'axe de lacet du robot Ericc 3 proposé pour le laboratoire de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur des classes préparatoires scientifiques. Dans ce correcteur, la grandeur dérivée n'est pas l'écart mais la réponse. Celle-ci, en effet, étant l'image d'une grandeur mécanique, ne peut varier brusquement. Toutefois cela ne résout pas le problème lié à l'éventuelle présence de bruits générés pas la chaîne d'acquisition.



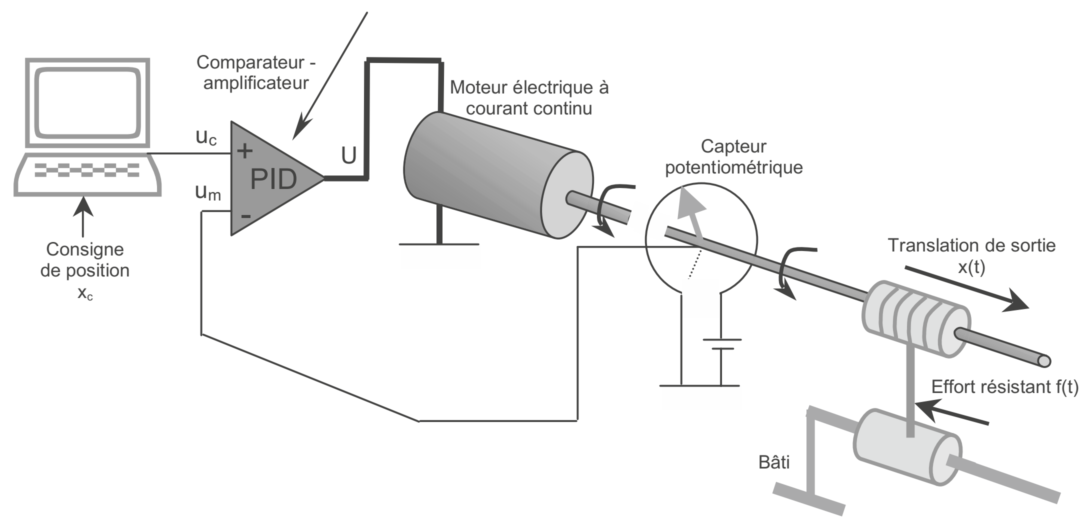
Photographie Astriane

On notera l'existence d'une saturation en sortie de filtre.

NB : les notations diffèrent ici légèrement de ce qui précède, le gain K_c est noté K_p et au lieu d'introduire des constantes de temps T_i et T_d, le concepteur du système a introduit des facteurs adimensionnels K_i et K_d agissant sur une constante de temps de référence T_e. Ceci est guidé par la technologie du correcteur qui est numérique.

■ Exemple : asservissement de position

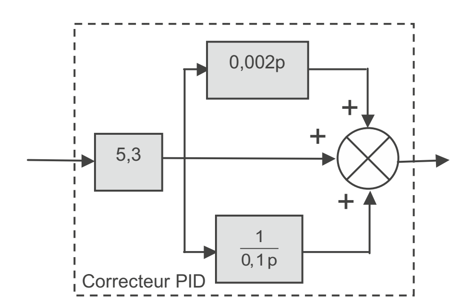
À la correction intégrale déjà introduite pour cet asservissement peut être adjointe une correction dérivée afin d'obtenir un correcteur PID :

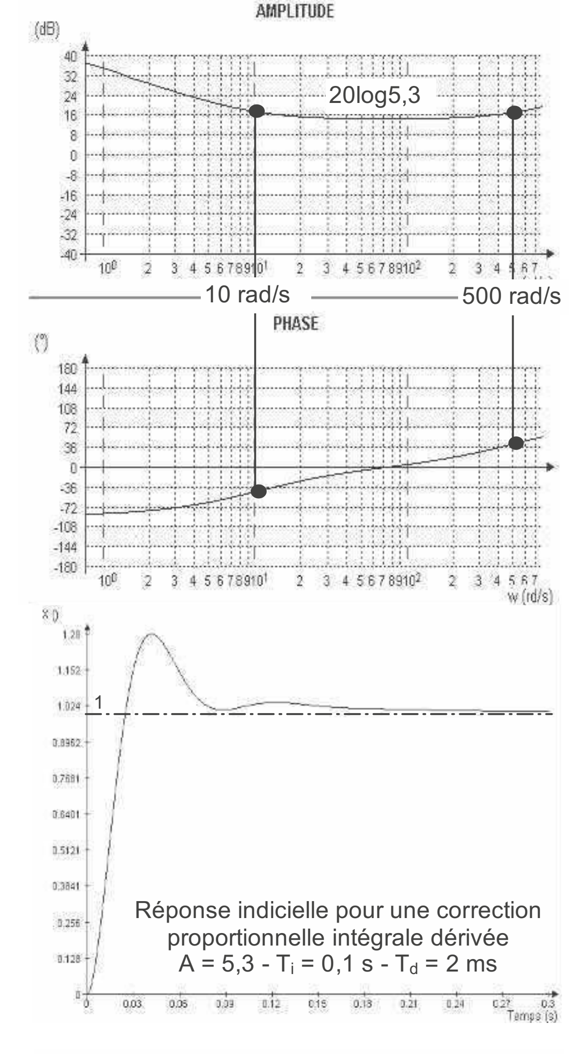


On rappelle que :

- la pulsation de coupure de la FTBO non corrigée est de 70 rad/s ;
- la pulsation de cassure du correcteur intégral est de 10 rad/s (soit T_i = 0,1 s) ;
- accessoirement, la correction proportionnelle se fait avec un gain A = 5,3.

Afin de répartir correctement les pulsations comme il se doit, on peut prendre une pulsation de cassure de la correction dérivée de l'ordre de 500 rad/s (soit T_d = 0,002 s = 2 ms).

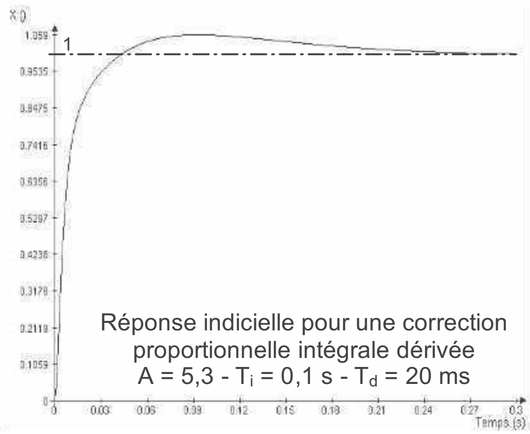




Le diagramme de Bode de ce correcteur PID est donc le diagramme ci-contre. On voit qu'aux alentours de la pulsation de coupure de la FTBO de 70 rad/s, ce correcteur se comporte pratiquement comme le correcteur proportionnel de gain 5,3, sans déphasage.

La réponse indicielle présente alors toujours le caractère précis obtenu grâce à la correction intégrale, mais les oscillations ont été diminuées (ramenées aux niveaux de celles de la correction proportionnelle), grâce à l'action dérivée.

On peut s'intéresser pour finir (cf. ci-contre) à l'allure qu'offrirait la réponse indicielle avec une correction dérivée plus forte (par exemple T_d = 20 ms). L'effet stabilisateur est bien plus manifeste, ce qui est cohérent avec l'augmentation de la phase autour de la pulsation de 70 rad/s.



Un tel correcteur peut sembler à première vue intéressant. Toutefois, il amplifie des pulsations bien plus basses que le précédent et donc comporte le risque majeur d'amplifier les bruits présents dans les signaux de commande ou de retour. Il nécessiterait donc d'adjonction d'un filtre supplémentaire qui viendrait en atténuer les effets.

■ **Remarque : méthode de Ziegler-Nichols**

Il vient d'être présenté une méthode rapide et approximative de réglage d'une correction PI, puis PID. Il existe des méthodes plus systématiques. Celles-ci sortent du cadre de cet ouvrage. On peut néanmoins citer le nom de la méthode de Ziegler-Nichols.

IV-5 Bras MAXPID

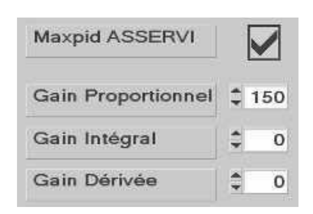
Les réglages du correcteur PID du bras Maxpid permettent de retrouver qualitativement les comportements précédemment décrits. Une analyse quantitative s'avère plus délicate étant donné le caractère numérique du correcteur et les saturations qui interviennent.

On se reportera aux exercices des chapitres 3 et 4 pour une description du système.

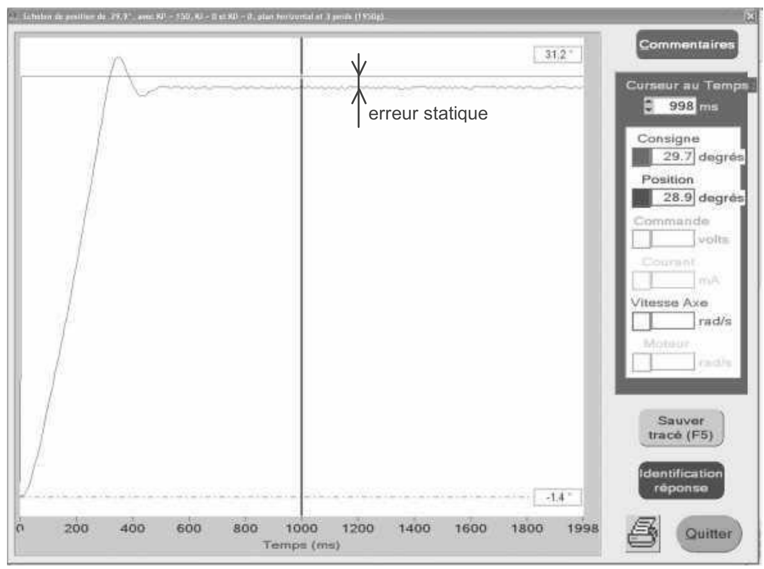


■ La chaîne asservie a pour but la mise en position angulaire du bras. L'actionneur est un moteur à courant continu, soumis à un couple résistant statique dû aux frottements secs et à l'action de la pesanteur lorsqu'il n'évolue pas horizontalement (cf. photographie ci-dessus). L'asservissement est donc intrinsèquement imprécis et une correction proportionnelle se fait donc nécessairement avec une erreur statique de position (cf. exercice V, chapitre 4).

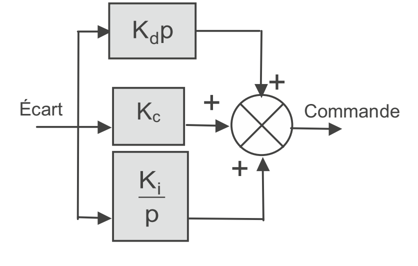
On donne ci-contre l'évolution angulaire du bras en évolution verticale pour une consigne en échelon d'une trentaine de degrés, le correcteur étant réglé sur une simple correction proportionnelle : $K_p = 150$.



On constate une erreur statique.

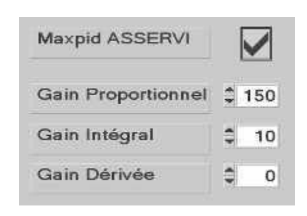


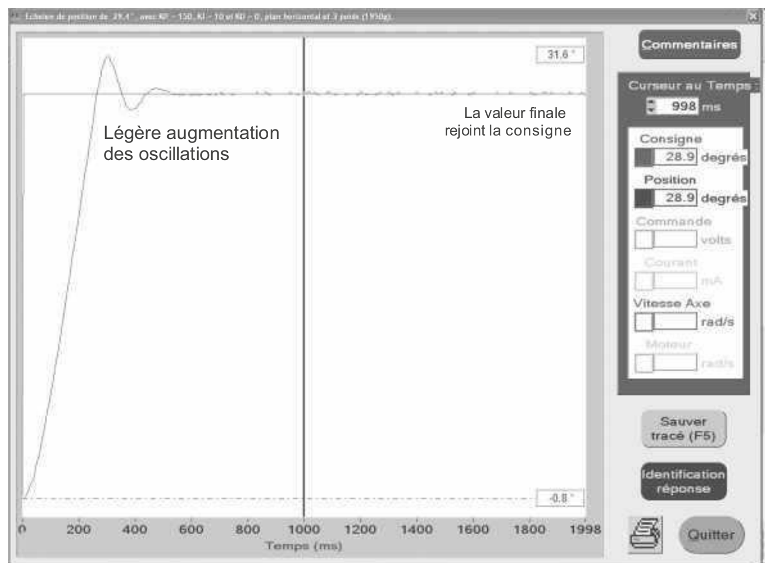
■ Le correcteur implanté dans la carte est un correcteur PID numérique, décrit de la manière ci-contre. Cette description diffère légèrement de celle donnée comme définition au paragraphe précédent, le gain proportionnel n'étant pas en facteur des composantes intégrale et dérivée. De plus, les coefficients accessibles au réglage via le logiciel par « gain intégral » et « gain dérivé » ne sont pas exactement les coefficients $K_d = T_d$ et $K_i = 1/T_i$, mais leur sont dépendants par des relations liées au caractère numérique du correcteur (en particulier sa fréquence d'échantillonnage) que nous n'exposerons pas ici.



On retiendra donc seulement qualitativement que le réglage « gain intégral » accentue l'effet intégral par diminution de la constante de temps T_i. De même le réglage « gain dérivée » accentue l'effet dérivé par augmentation de la constante de temps T_d.

On donne ci-contre l'évolution angulaire du bras en évolution verticale pour une consigne en échelon d'une trentaine de degrés, le correcteur étant cette fois un correcteur PI :





On constate comme prévu que :

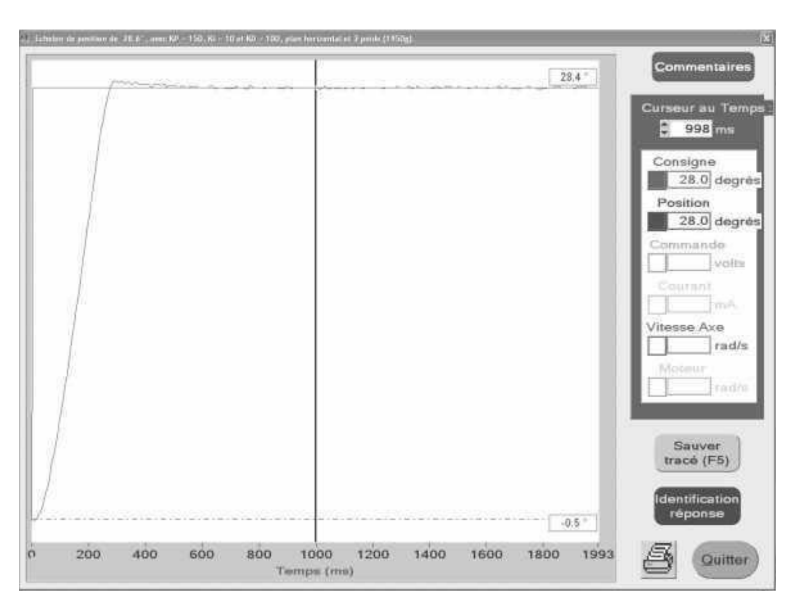
- l'erreur statique est supprimée,
- le système est un peu moins stable.

Une augmentation de l'effet intégral se traduirait par des oscillations encore plus marquées, correspondant à une diminution de la marge de phase du système, la pulsation de cassure du filtre se rapprochant, par valeurs croissantes, de celle de la FTBO.

Pour améliorer la stabilité du système, on pourrait diminuer la correction proportionnelle mais cela serait au prix de la rapidité. La solution consiste alors à introduire une correction dérivée.

On donne ci-contre l'évolution angulaire du bras en évolution verticale pour une consigne en échelon d'une trentaine de degrés, le correcteur étant cette fois un correcteur PID :





L'effet stabilisateur est manifeste. Le gain en rapidité n'est pas sensible car l'effet dérivé proposé demeure faible.

Toutefois, il est délicat d'augmenter l'effet dérivé au-delà de la valeur proposée car des vibrations très sensibles de toute la chaîne mécanique apparaissent. Elles sont dues au fort effet amplificateur des bruits de mesure à haute fréquence par la correction dérivée. La chaîne d'acquisition et d'affichage des résultats de mesure ne possédant pas une bande passante suffisante, ces vibrations ne sont presque pas visibles sur la courbe ci-dessus. Elles sont pour autant très perceptibles, le système se mettant à vibrer dangereusement.

IV-6 Correction par avance ou retard de phase

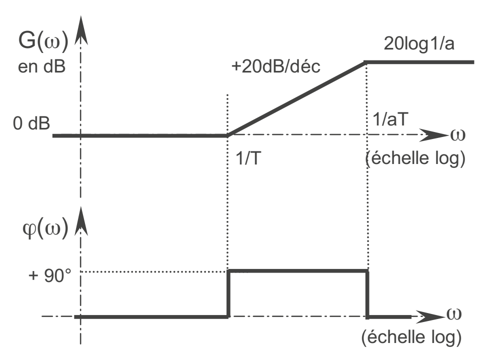
■ Ces correcteurs sont des correcteurs du premier ordre à zéro. Leur fonction de transfert est donc de la forme générique :

$$C(p) = K_c \frac{1+T_1p}{1+T_2p}$$

Contrairement à la correction intégrale, ces correcteurs ne peuvent pas apporter de précision absolue si la FTBO ne possède pas le nombre d'intégrations adéquat. En revanche, ils permettent d'apporter du gain ou de la phase judicieusement par rapport au point critique, afin de satisfaire des critères de stabilité et/ou de précision.

■ **Le correcteur à avance de phase** a une fonction de transfert de la forme :

$$C(p) = \frac{1+Tp}{1+aTp} \quad \text{avec } a < 1$$



Un exemple mécanique de réalisation a été présenté en tant qu'exercice II du chapitre 5.

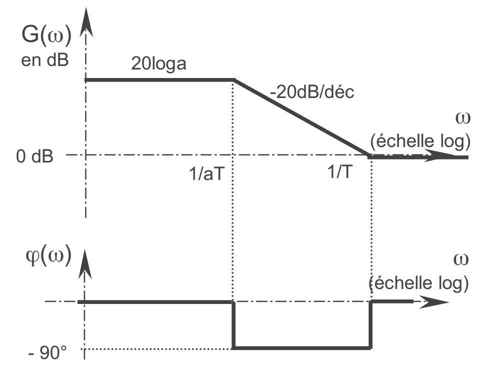
Il s'agit en fait de la généralisation du correcteur PD réel (pour lequel on impose a << 1). Son diagramme de Bode (ci-contre son diagramme asymptotique) montre qu'il permet d'augmenter la phase dans un certain domaine de pulsations.

En centrant ce domaine sur la pulsation de coupure de la FTBO non corrigée, on augmente la marge de phase du système. Si nécessaire, une correction de gain peut être assurée par une correction proportionnelle supplémentaire placée en série. Ce correcteur est donc utilisé à des fins ***stabilisatrices***, tout comme le correcteur PD.

Par ailleurs, l'augmentation du gain aux hautes fréquences présente les mêmes effets que la correction dérivée : augmentation de la ***rapidité***, mais amplification de bruits.

■ **Le correcteur à retard de phase** a une fonction de transfert de la forme :

$$C(p) = a\frac{1+Tp}{1+aTp} \quad \text{avec } a > 1$$



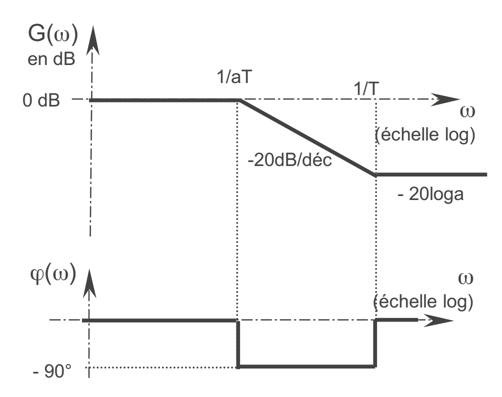
Son diagramme de Bode (ci-contre son diagramme asymptotique) montre qu'il diminue la phase dans un certain domaine de pulsations.

Toutefois, et contrairement à ce que sa dénomination laisse penser, ce correcteur n'est pas utilisé pour diminuer la phase. Ceci présente rarement d'intérêt, au contraire !

Il est en fait utilisé pour augmenter le gain d'un facteur a dans les basses pulsations, afin d'***augmenter la précision*** du système. En revanche, cette augmentation de gain est nulle aux hautes pulsations et il suffit donc de choisir T suffisamment grande pour que le domaine de déphasage, et donc au delà l'absence d'amplification, se fasse bien avant la pulsation de coupure de la FTBO. À cette condition, la correction se fait sans influence notoire sur la stabilité. Cette correction est donc très proche de la correction proportionnelle intégrale, si ce n'est que l'on contrôle l'amplification des pulsations les plus basses. En contrepartie, elle n'apporte pas l'intégration parfois exigée, et donc de ce point de vue se rapproche plutôt de la correction proportionnelle.

Tout comme pour le correcteur à avance de phase, une correction proportionnelle peut, bien entendu, lui être associée en série. À la limite, en plaçant en série un gain pur 1/a, on obtient le correcteur global suivant :

$$C(p) = \frac{1+Tp}{1+aTp} \text{ avec } a > 1$$



Son effet global n'est donc plus une augmentation du gain aux basses pulsations, mais une diminution aux hautes pulsations. D'où une augmentation de la stabilité si la pulsation de coupure de la FTBO non corrigée est bien supérieure à 1/T, c'est-à-dire si T est suffisamment grande.

Par contre, la diminution globale de la bande passante est néfaste en termes de rapidité.

■ **Remarque :**

Les effets de ces deux correcteurs étant différents, il pourra être intéressant de les associer, tout comme les correcteurs PI et PD sont associés pour former le correcteur PID. On peut aussi mettre en série un correcteur PI assurant la précision avec un correcteur à avance de phase.

V - QUELQUES AUTRES TYPES DE CORRECTION

Ce dernier paragraphe rassemble quelques techniques de correction, au delà de celles qui viennent d'être présentées.

V-1 La correction par « modèle imposé » ou « compensation de pôles »

Cette technique est matériellement proche des précédentes. Elle consiste de la même manière à introduire un correcteur dans la boucle, agissant sur l'écart. La différence essentielle provient de la démarche de conception pour laquelle le cahier des charges se présente non pas en termes de précision, rapidité et marges de stabilité, mais comme une exigence de la fonction de transfert globale à réaliser. Le correcteur est alors le seul élément sur lequel on peut agir et sa conception permettra, s'il est réalisable, de répondre à l'attente.

Ainsi, si le système initial non corrigé est décrit comme ci-contre à l'aide d'un retour unitaire et possède une fonction de transfert en boucle ouverte FTBO(p), l'insertion du correcteur de fonction de transfert C(p) doit permettre que la fonction de transfert globale soit la fonction de transfert H(p) exigée, qui s'écrira donc :

E(p) → + / - → FTBO(p) → S(p)

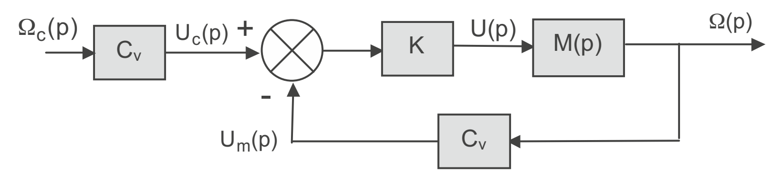
E(p) → + / - → C(p) → FTBO(p) → S(p)

$$H(p) = \frac{C(p)FTBO(p)}{1+C(p)FTBO(p)}$$

En inversant cette relation, il vient celle nécessaire du correcteur : $C(p) = \dfrac{H(p)}{FTBO(p)[1-H(p)]}$.

Si cette fonction de transfert est ***matériellement réalisable***, cela répond au cahier des charges.

■ Prenons l'exemple d'un asservissement de vitesse par moteur à courant continu réalisé de la manière suivante :



La consigne de vitesse permet d'élaborer une tension de consigne qui est comparée à la tension image de la vitesse mesurée par le capteur. La différence de ces tensions est amplifiée par un gain K pour élaborer la tension d'alimentation du moteur dont la fonction de transfert est M(p). Afin que la comparaison ait un sens, il faut que l'adaptateur de consigne soit, comme toujours, adapté au capteur de vitesse de gain C_v. Cette structure est très classique et a déjà été rencontrée.

Avec les notations usuelles et en négligeant les effets inductifs, le moteur peut être modélisé selon :

$$M(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{K_v}}{1 + \frac{RJ}{K_v K_c} p} \text{ que l'on notera pour simplifier } M(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{1 + T_m p}$$

La FTBO de l'asservissement est alors $FTBO(p) = \frac{C_v K K_m}{1 + T_m p}$

Cette fonction de transfert étant de classe nulle, on retrouve un résultat bien connu qui est qu'un tel asservissement est intrinsèquement imprécis. Sur la FTBF, cela se traduit par un gain statique nécessairement non unitaire :

$$FTBF(p) = \frac{C_v K M(p)}{1 + C_v K M(p)} = \frac{\frac{C_v K K_m}{1 + C_v K K_m}}{1 + \frac{T_m}{1 + C_v K K_m} p}$$

Souhaitant avoir un asservissement précis, on veut donc que cette fonction de transfert soit de gain statique égal à 1, soit par exemple de la forme suivante si on souhaite conserver son premier ordre :

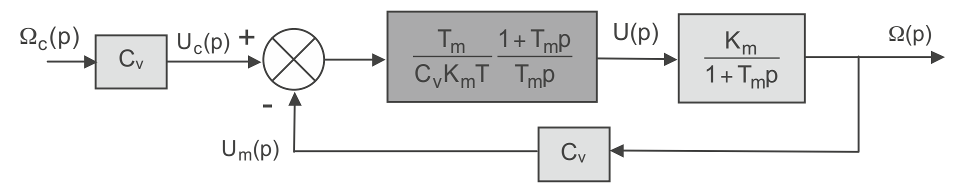
$H(p) = \frac{1}{1 + Tp}$, où la constante T est choisie pour obéir à une certaine exigence de rapidité.

On doit pour cela introduire dans la boucle un correcteur de fonction de transfert C(p) tel que

$$C(p) = \frac{H(p)}{FTBO(p)[1 - H(p)]} = \frac{\frac{1}{1+Tp}}{\frac{C_v K K_m}{1 + T_m p}\left[1 - \frac{1}{1 + Tp}\right]} = \frac{\frac{1}{1+Tp}}{\frac{C_v K K_m}{1 + T_m p}\,\frac{Tp}{1 + Tp}} = \frac{1 + T_m p}{C_v K K_m T p}$$

On reconnaît un ***correcteur proportionnel intégral*** : $C(p) = \frac{T_m}{C_v K K_m T}\,\frac{1 + T_m p}{T_m p} = \frac{T_m}{C_v K K_m T}\left(1 + \frac{1}{T_m p}\right)$

On retrouve bien un correcteur qui répond classiquement à l'exigence de précision. Son gain et sa constante de temps permettent de répondre à l'exigence de rapidité. Le schéma bloc du système corrigé est alors le suivant :



Et on a alors, comme exigé : $H(p)=\dfrac{1}{1+Tp}$. Il suffit de le vérifier en appliquant la formule de Black :

$$H(p)=\frac{C_v\dfrac{T_m}{C_vK_mT}\dfrac{1+T_mp}{T_mp}\dfrac{K_m}{1+T_mp}}{1+C_v\dfrac{T_m}{C_vK_mT}\dfrac{1+T_mp}{T_mp}\dfrac{K_m}{1+T_mp}}=\frac{\dfrac{1}{Tp}}{1+\dfrac{1}{Tp}}=\frac{1}{1+Tp}$$

On dit aussi que l'on a procédé par ***compensation de pôle***, puisque la constante de temps du correcteur PI est la même que celle du moteur, ce qui permet toutes les simplifications bien visibles dans le calcul de la fonction de transfert ci-dessus.

V-2 La correction par boucle supplémentaire

Ce type de correction n'est pas réalisé par un correcteur qui agit sur l'écart, mais par modification de la structure de l'asservissement en ajoutant des boucles supplémentaires. On se contera ici de donner quelques exemples.

V-2-1 La correction en cascade

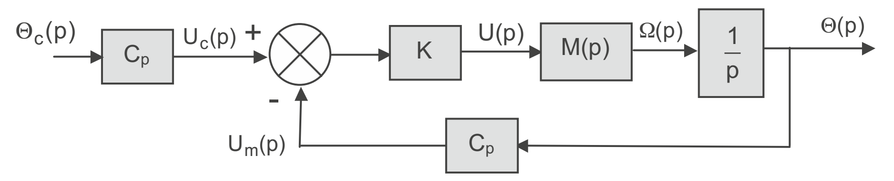
La correction en cascade consiste à introduire une boucle agissant sur une grandeur interne à la chaîne asservie globale. Ceci peut se faire dans un double objectif :

- améliorer les performances de la chaîne asservie,
- contrôler l'évolution de la grandeur mesurée par cette boucle.

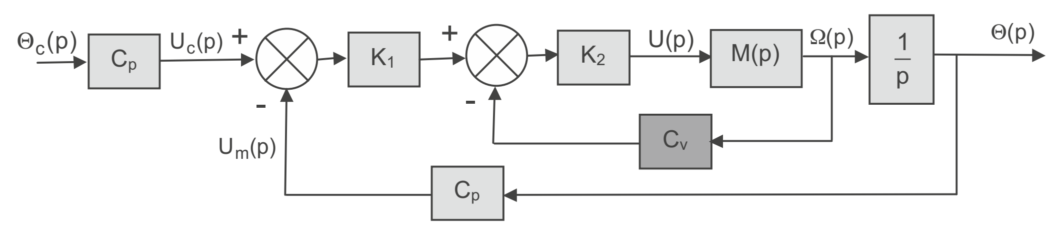
On peut par exemple introduire une boucle de vitesse dans un asservissement de position par moteur à courant continu (correction dite tachymétrique) ou encore contrôler le courant dans un asservissement de vitesse ou de position, ce qui revient à contrôler le couple.

■ **Introduction d'une boucle de vitesse :**

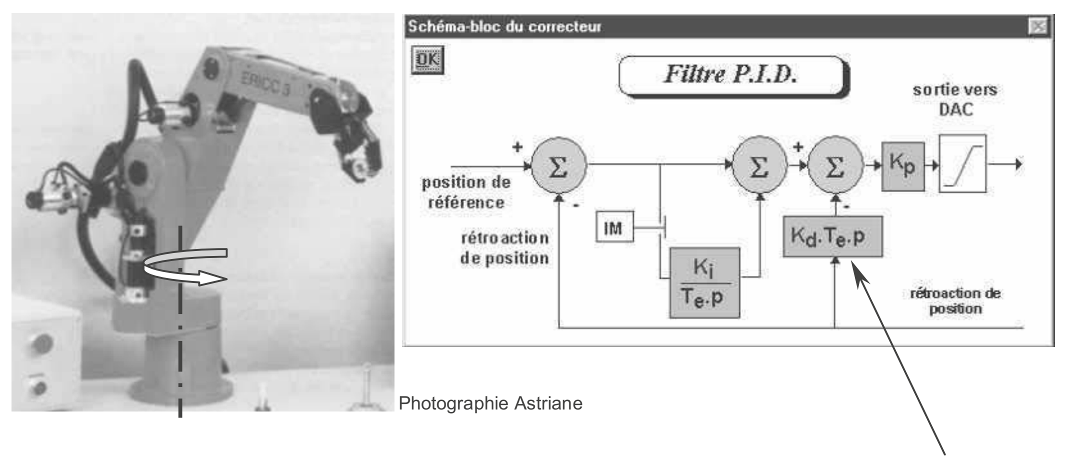
Prenons l'exemple d'un asservissement de position par moteur à courant continu réalisé de la manière suivante, classique :



La consigne angulaire permet d'élaborer une tension de consigne qui est comparée à la tension image de la vitesse mesurée par le capteur. La différence de ces tensions est amplifiée par un gain K pour élaborer la tension d'alimentation du moteur. Afin que la comparaison ait un sens, il faut que l'adaptateur de consigne soit, comme toujours, adapté au capteur angulaire de gain C_p. La correction tachymétrique consiste à venir, en plus, mesurer la vitesse et à élaborer une tension de commande corrigée, tenant donc compte de cette vitesse :



La vitesse étant la dérivée de la grandeur asservie, l'effet de cette correction est similaire à celui d'une ***correction dérivée***. Cette solution peut donc être comparée à celle retenue pour la correction de l'asservissement de position de l'axe de lacet du robot Ericc 3 :



Photographie Astriane

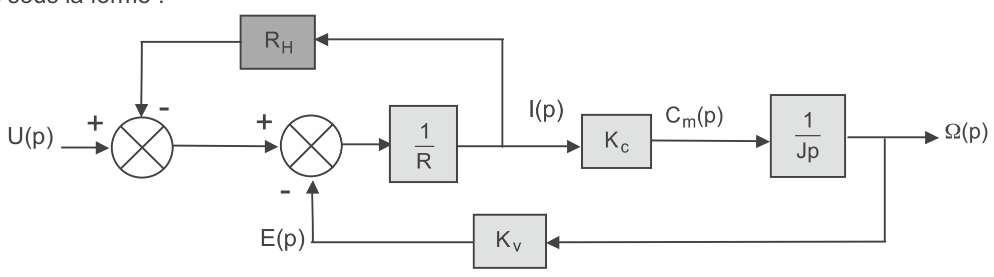
La différence fondamentale est que la dérivation n'est pas construite comme ci-dessus par le correcteur (et donc approchée pour des raisons de causalité) mais obtenue par mesure directe de la vitesse, en parallèle à la mesure de la position.

Cette technique de correction tachymétrique se généralise à toute correction qui consiste à prélever une grandeur dérivée de la grandeur asservie. Elle améliore essentiellement la rapidité de l'asservissement, ainsi que sa stabilité, sans présenter les inconvénients inhérents à une correction dérivée. En revanche, elle nécessite un capteur supplémentaire.

Remarque :
La correction peut être affinée en remplaçant dans le schéma page précédente, les gains K_2 et surtout K_1 par des correcteurs de type PI par exemple.

■ **Introduction d'une boucle de courant :**

Dans une commande classique en tension d'un moteur à courant continu, le courant peut atteindre des valeurs trop fortes, en particulier au démarrage. Une boucle de courant permet de le limiter. Pour cela, son intensité est mesurée par un capteur (à effet Hall) qui fournit une tension image de ce courant. Cette tension est soustraite à la tension de commande pour élaborer la tension envoyée aux bornes de l'induit. Cette fonction est couramment intégrée au hacheur qui pilote le moteur. Le schéma bloc de commande en tension d'un moteur à courant continu (avec les notations usuelles et en négligeant les effets inductifs), incluant une boucle de courant, se présente donc sous la forme :



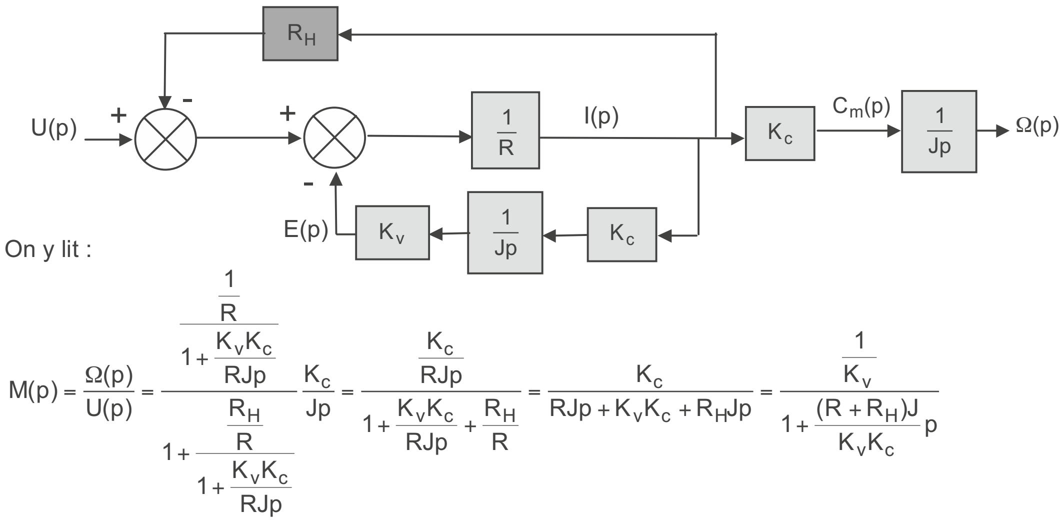
NB : Le capteur à effet Hall se comporte comme un gain R_H, homogène à des V/A, soit des Ω.

Au démarrage (vitesse nulle), si le moteur est commandé selon un échelon de tension U_0, l'intensité se trouve diminuée. Elle vaut en effet :

- sans boucle de courant : $I = \dfrac{U_0}{R}$
- avec boucle de courant : $I = \dfrac{U_0 - R_H I}{R}$, soit $I = \dfrac{U_0}{R + R_H}$

En contrepartie, la présence de la boucle de courant ralentit le moteur, puisque le couple nécessaire à vaincre l'inertie (et les éventuels efforts résistants) est proportionnel à l'intensité. On peut s'en persuader en calculant la fonction de transfert du moteur ainsi commandé.

Pour cela, on peut dans un premier temps modifier le schéma pour obtenir le schéma équivalent à deux boucles imbriquées :



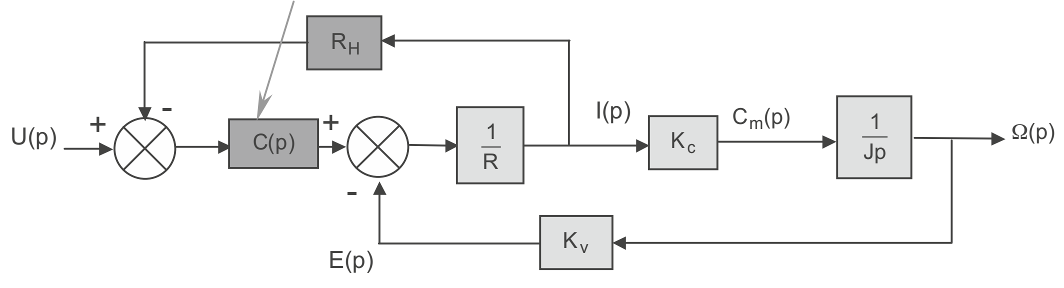
On y lit :

$$M(p)=\frac{\Omega(p)}{U(p)}=\frac{\dfrac{\dfrac{1}{R}}{1+\dfrac{K_vK_c}{RJp}}}{1+\dfrac{\dfrac{R_H}{R}}{1+\dfrac{K_vK_c}{RJp}}}\frac{K_c}{Jp}=\frac{\dfrac{K_c}{RJp}}{1+\dfrac{K_vK_c}{RJp}+\dfrac{R_H}{R}}=\frac{K_c}{RJp+K_vK_c+R_HJp}=\frac{\dfrac{1}{K_v}}{1+\dfrac{(R+R_H)J}{K_vK_c}p}$$

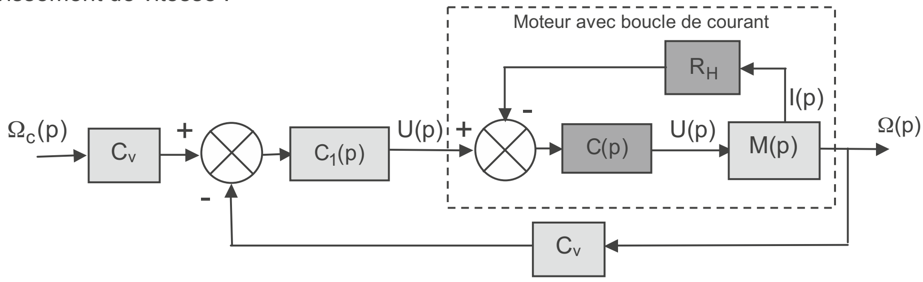
et donc une constante de temps : $\tau=\dfrac{(R+R_H)J}{K_vK_c}$

La présence de la boucle de courant revient donc à augmenter virtuellement la résistance de l'induit de la valeur du gain du capteur de courant, ou bien l'inertie. La constante de temps du moteur ainsi piloté augmente donc en conséquence.

Remarque :
Il s'agit là du comportement de base d'une boucle de courant. Des boucles plus élaborées peuvent être construites en plaçant un correcteur (souvent de type PI) dans la boucle.

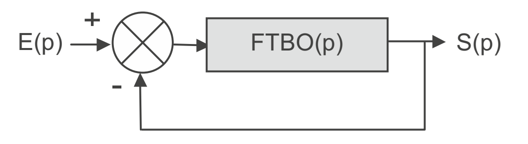


Une telle boucle, insérée au sein d'un asservissement de vitesse ou de position, permet alors de concevoir une dynamique intéressante tout en contrôlant le courant. Par exemple un asservissement de vitesse :

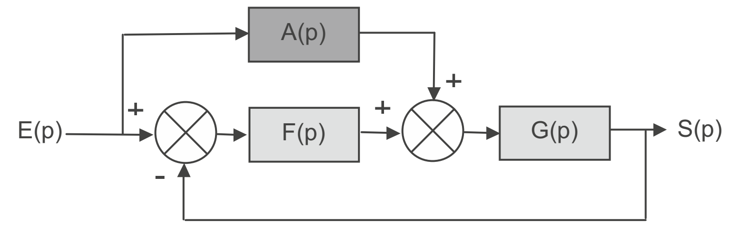


V-2-2 La correction par anticipation

La correction par anticipation consiste à introduire dans la boucle une grandeur correctrice fonction de la consigne. On se place ici, pour simplifier les développements, dans la situation où le système est décrit par un retour unitaire.



La méthode consiste à ouvrir la boucle en un point où intervient une grandeur physique facile à élaborer (une tension électrique en général) et à lui ajouter un terme correctif construit à partir de la consigne. On obtient alors le schéma corrigé ci-dessous :



Le problème consiste alors à déterminer la fonction de transfert A(p) de la boucle d'anticipation pour satisfaire le cahier des charges.

La sortie S(p) s'exprime alors selon :

$$S(p) = G(p)\big[F(p)[E(p) - S(p)] + A(p)E(p)\big] = \big[G(p)A(p) + F(p)G(p)\big]E(p) - F(p)G(p)S(p)$$

soit : $S(p) = \dfrac{G(p)A(p) + F(p)G(p)}{1 + F(p)G(p)}E(p)$

Ainsi, si le cahier des charges impose que la sortie doive suivre l'entrée, soit S(p)=E(p), il faudra choisir A(p) telle que G(p)A(p) = 1, soit :

$$A(p) = \frac{1}{G(p)}.$$

On voit immédiatement les problèmes de causalité qui découleront de cette condition et nécessiteront souvent une ***approximation***, comme pour la correction dérivée. Toutefois dans des cas simples où le point d'insertion peut être choisi tel que G(p) soit réversible (un simple gain par exemple), la correction peut être exacte. La difficulté résulte alors de la nécessité de disposer d'un modèle suffisamment précis, et invariant dans le temps, de la fonction G(p).

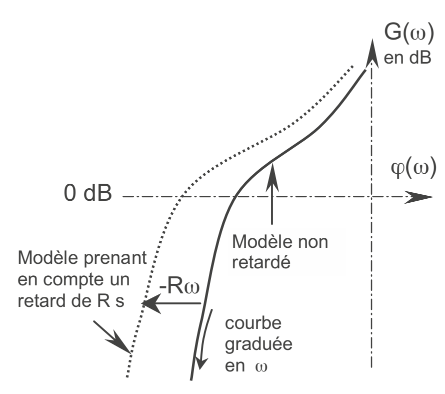
Remarque : correction d'une perturbation

Si le système est soumis à une perturbation, et si celle-ci est ***mesurable*** (ce qui est hélas rarement le cas…), une correction par anticipation peut également être construite à partir de sa mesure, dans le but d'en supprimer l'effet.

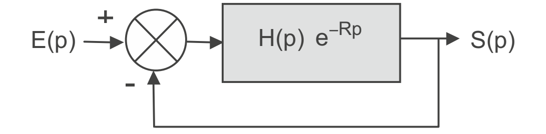
V-2-3 La correction des systèmes retardés

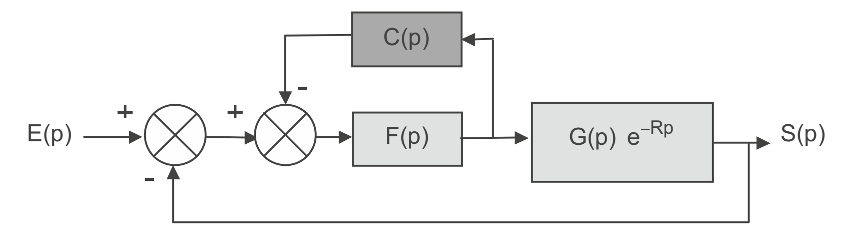
Les systèmes comportant un élément à retard sont fortement déstabilisateurs puisqu'il apporte un déphasage qui est une fonction croissante de la pulsation. On rappelle ci-contre l'influence d'un retard de R secondes sur la courbe de Black d'une FTBO.

Lorsqu'une correction traditionnelle s'avère insuffisante, il est fait appel à des corrections spécifiques. La plus répandue est l'utilisation d'un prédicteur de Smith.



Considérons le système suivant, décrit par un retour unitaire et comportant un retard R. La méthode consiste à introduire une boucle interne, le retour se faisant avant l'élément produisant le retard, soit une structure de la forme :





Avec F(p)G(p)=H(p) et $C(p) = (1 - e^{-Rp})G(p)$, correcteur particulier appelé prédicteur de Smith.

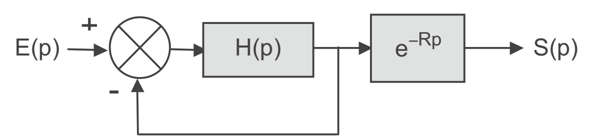
La FTBF s'écrit alors :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\dfrac{F(p)}{1 + C(p)F(p)} G(p)e^{-Rp}}{1 + \dfrac{F(p)}{1 + C(p)F(p)} G(p)e^{-Rp}} = \frac{F(p)G(p)e^{-Rp}}{1 + C(p)F(p) + F(p)G(p)e^{-Rp}}$$

ce qui se simplifie, puisque $C(p) = (1 - e^{-Rp})G(p)$, en :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)G(p)}{1 + F(p)G(p)} e^{-Rp} = \frac{H(p)}{1 + H(p)} e^{-Rp}$$

Le système est alors équivalent au système ci-contre, dans lequel l'élément comportant le retard est rejeté en dehors de la boucle.



Le retard n'est donc pas supprimé, mais puisqu'il n'est plus dans la boucle, il est sans influence sur la stabilité du système. La boucle peut donc être munie d'une correction traditionnelle, sans tenir compte du retard.

Bien entendu, la conception du correcteur de Smith suppose une connaissance précise de la valeur du retard du système, ce qui n'est pas toujours aisé.

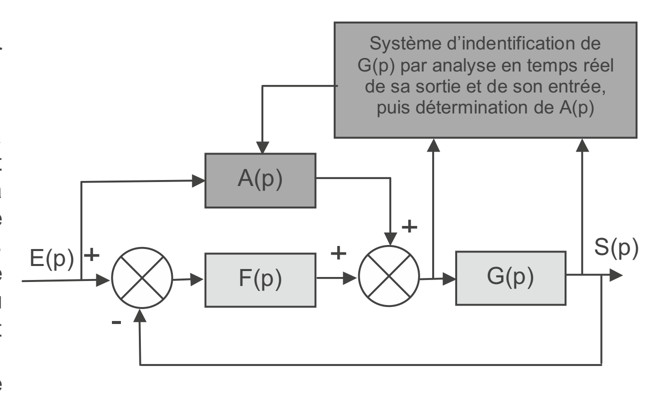
V-3 Un mot sur la correction auto-adaptative

Dans de nombreux dispositifs de correction, et en particulier la correction par compensation de pôles ou la correction par anticipation, la connaissance « exacte » d'une partie ou de la FTBO entière est nécessaire. C'est le cas aussi du prédicteur de Smith qui vient d'être exposé, pour lequel la connaissance précise de la valeur du retard est indispensable. La moindre dérive dans le temps des caractéristiques du système (composants de la partie opérative, capteurs, etc.) rend alors la correction inefficace, voire inopérante.

On ne peut alors achever ce chapitre sur la correction des systèmes asservis sans citer la correction auto-adapatative, permise par les développements récents du calcul en temps réel.

Cette méthode utilise des algorithmes qui réalisent en temps réel une identification de la fonction de transfert nécessaire et permettent de réajuster en permanence les paramètres de correction qui en dépendent.

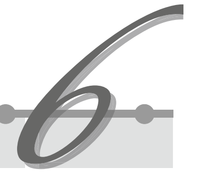
On donne ci-contre, à titre d'exemple, la structure d'une correction par anticipation auto-adaptative.



Le système identifie en temps réel la fonction G(p) et ajuste constamment en conséquence la fonction A(p) de la boucle d'adaptation. La méthode de correction par anticipation prend alors toute sa puissance. Au temps de calcul et à la précision près du système d'identification, elle permet d'avoir, en permanence (et non seulement en régime permanent) une erreur nulle, et ceci quelle que soit la nature de l'entrée.

Ces procédés très complexes dépassent le cadre de cet ouvrage d'introduction à la commande des systèmes asservis rencontrés par l'ingénieur.

EXERCICES

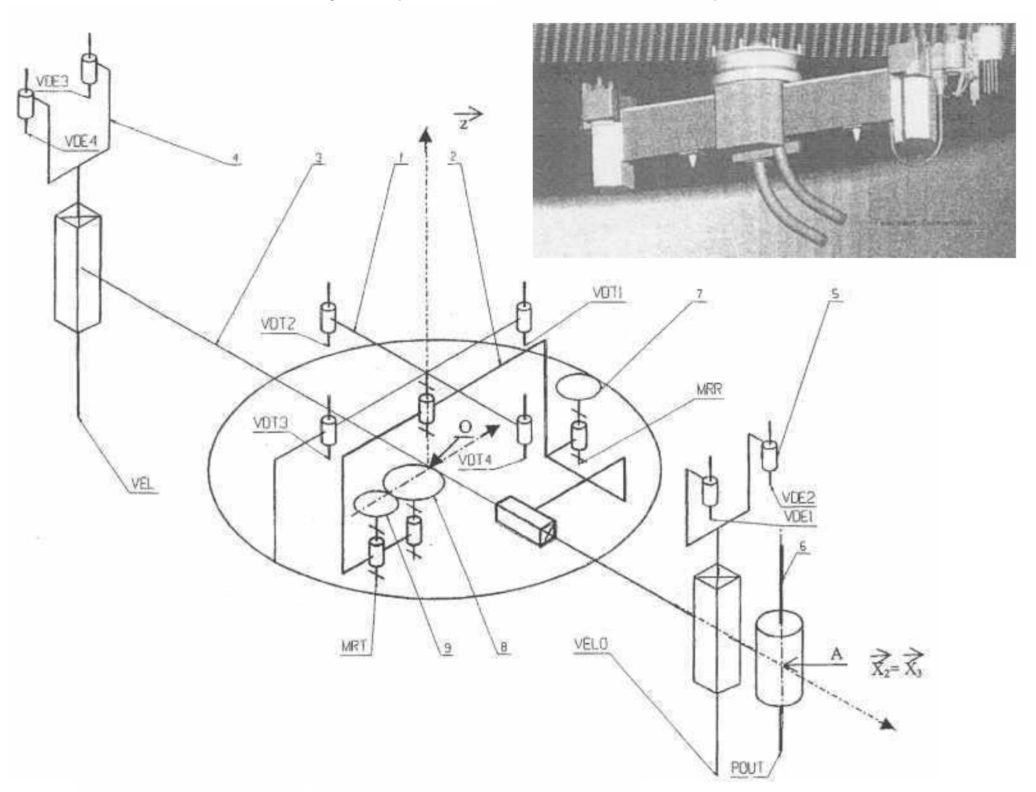


I - SYSTÈME DE CONTRÔLE D'UN GÉNÉRATEUR DE CENTRALE

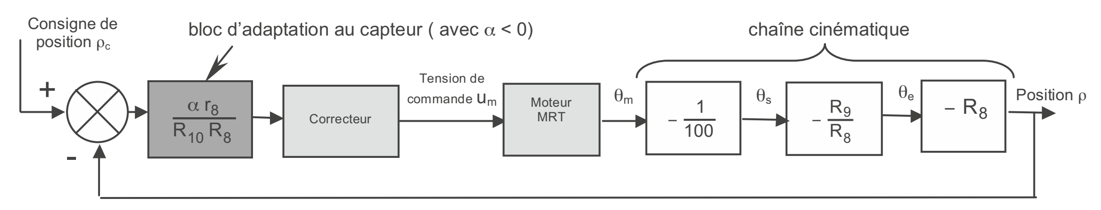
D'après une épreuve du concours ESIM MP & PSI.

I-1 Présentation

L'ensemble mécanique étudié est représenté schématiquement ci-dessous. Il permet le déplacement d'un bras de contrôle **3** positionnant un outil **6** devant des tubes d'un générateur de vapeur de centrale nucléaire. Il a déjà été présenté en exercice I du chapitre 2.



On s'intéresse à la commande de position du bras **3** par rapport à la tour **2**, commandée par le moteur MRT. Celle-ci peut être modélisée (cf. exercice I, chapitre 2) selon le schéma bloc à retour unitaire :

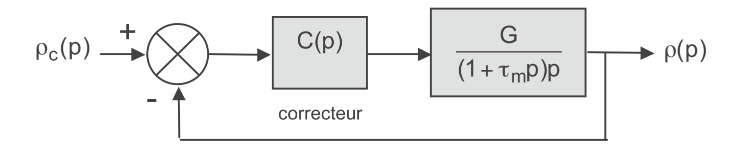


Les caractéristiques du moteur MRT permettent de négliger les effets dus à son inductance. Sa fonction de transfert avec une sortie en vitesse est donc du premier ordre. Alors, si la sortie est la position angulaire, la fonction de transfert est telle que ci-contre.

$$U_m \longrightarrow \boxed{\frac{K_m}{(1+\tau_m p)p}} \longrightarrow \theta_m$$

L'évolution se faisant dans un plan horizontal, une première modélisation, sans frottement, permet en effet de supposer qu'aucun couple extérieur n'est à vaincre par le moteur.

Ceci permet de modéliser globalement la chaîne fonctionnelle comme ci-contre. On reconnaît un classique asservissement de position, sans perturbation.



Les différentes caractéristiques (moteur, chaîne cinématique, capteur) permettent de déterminer :

- G = 0,2 (sans dimension)
- τ_m = 0,05 s

Le cahier des charges impose :

- **Stabilité :** marge de phase d'au moins 45° et marge de gain d'au moins 10 dB.
- **Précision :** erreur statique en position maximale de 0,1%, erreur statique en vitesse maximale de 1%.
- **Rapidité :** maximale tout en respectant les performances précédentes.

L'objectif du travail est de déterminer une fonction de transfert C(p) du correcteur permettant de satisfaire ce cahier des charges.

I-2 Travail demandé

Question 1 : correction proportionnelle

On envisage une correction proportionnelle : C(p) = K_c.

11) Déterminer la valeur minimale de K_c permettant de satisfaire les exigences de précision.

12) Donner le diagramme de Bode asymptotique et l'allure du diagramme réel permettant de déterminer les marges de phase et de gain du système corrigé par la valeur de K_c déterminée à la question précédente. Évaluer ces marges sur ce diagramme, puis calculer précisément la marge de phase.

13) Peut-on alors respecter les performances attendues ?

Question 2 : correction par retard de phase

On envisage maintenant une correction par retard de phase : $C(p) = K_c \dfrac{1+p}{1+4p}$

21) Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce correcteur pour K_c = 1, ainsi que l'allure de son diagramme réel. Justifier sa dénomination.

22) Déterminer la valeur minimale de K_c permettant de satisfaire les exigences de précision.

23) Donner le diagramme de Bode asymptotique et l'allure du diagramme réel permettant de déterminer les marges de phase et de gain du système corrigé pour la valeur de K_c déterminée à la question précédente. Évaluer ces marges sur ce diagramme, puis calculer précisément la marge de phase. Conclure quant au respect du cahier des charges.

I-3 Correction

<u>Question 1 :</u> correction proportionnelle

11) Notons immédiatement, qu'avec la description à retour unitaire proposée, erreur et écart se confondent. La précision sera donc caractérisée par l'écart statique.

La fonction de transfert en boucle ouverte du système est : $FTBO(p) = \dfrac{C(p)G}{(1+\tau_m p)p}$.

Soit pour la correction proportionnelle proposée : $FTBO(p) = \dfrac{K_c G}{(1+\tau_m p)p}$.

Cette fonction de transfert en boucle ouverte étant de <u>classe 1</u> et de gain $K_{BO} = K_c G$, on sait que :

- quelque soit la valeur de son gain, l'écart statique en position est nul.
- l'écart statique en vitesse (écart de traînage) relatif est : $\varepsilon_V = \dfrac{1}{K_{BO}} = \dfrac{1}{K_c G}$

Il en va donc de même pour les erreurs.

Aussi, l'erreur statique en position maximale de 0,1% est <u>garantie</u> quelque soit le la valeur du gain de correction K_c et la condition sur l'erreur statique en vitesse maximale de 1% impose la condition :

$$\varepsilon_V = \frac{1}{K_c G} \leq \frac{1}{100} \quad \text{soit} \quad \boxed{K_c \geq \frac{100}{G} = 500} \quad (\text{car } G = 0{,}2)$$

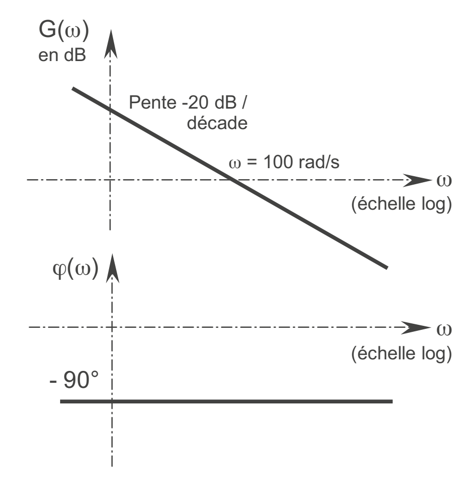
Pour satisfaire les exigences du cahier des charges en termes de précision, il faut donc choisir un gain de correction <u>au moins égal à 500</u>.

12) Il convient de tracer le diagramme de Bode de la FTBO corrigée par le gain $K_c = 500$, soit numériquement :

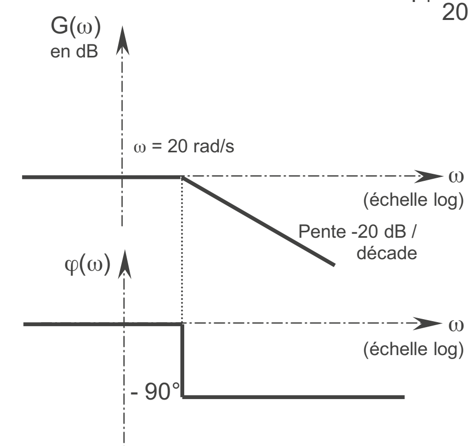
$$FTBO(p) = \frac{100}{(1+0{,}05p)p}$$

Le diagramme asymptotique s'obtient aisément par addition des diagrammes asymptotiques :

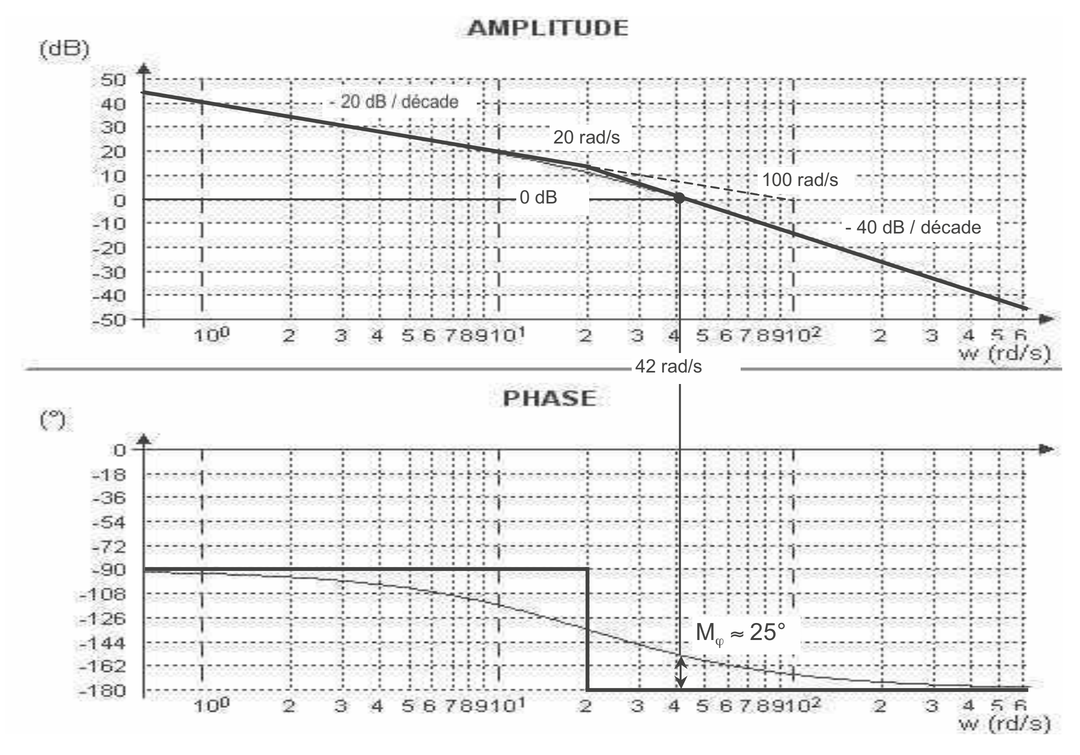
- de l'intégrateur $\dfrac{100}{p}$ (égal au diagramme réel)



- du système du 1er ordre $\dfrac{1}{1+0{,}05p} = \dfrac{1}{1+\dfrac{p}{20}}$



Il vient donc le diagramme asymptotique suivant, ainsi que le diagramme réel :



On y relève :

- une <u>marge de phase de l'ordre de 25°</u> (associée à une pulsation de coupure de l'ordre de 42 rad/s)
- bien évidemment, une <u>marge de gain infinie</u> puisque la phase est toujours supérieure à -180° pour cette FTBO du second ordre, de numérateur d'ordre zéro.

Pour calculer la marge de phase, il faut tout d'abord calculer la pulsation de coupure à 0 dB ω_1. Celle-ci s'obtient en résolvant $|FTBO(j\omega)| = 1$.

Soit : $\dfrac{1}{\sqrt{1+(0,05\omega)^2}} \times \dfrac{100}{\omega} = 1$, ou encore : $\omega\sqrt{1+(0,05\omega)^2} = 100$, qui fournit $\omega_1 = 42,5$ rad/s.

Par ailleurs Arg(FTBO(jω)) = -arctan0,05ω - 90°
et donc à la coupure : Arg(FTBO(jω_1)) = - arctan(0,05x42,5) - 90° = -154,8°.
La marge de phase est donc : $M\varphi$ = 180° - 154,8°.

Soit $\boxed{M\varphi = 25,2°}$

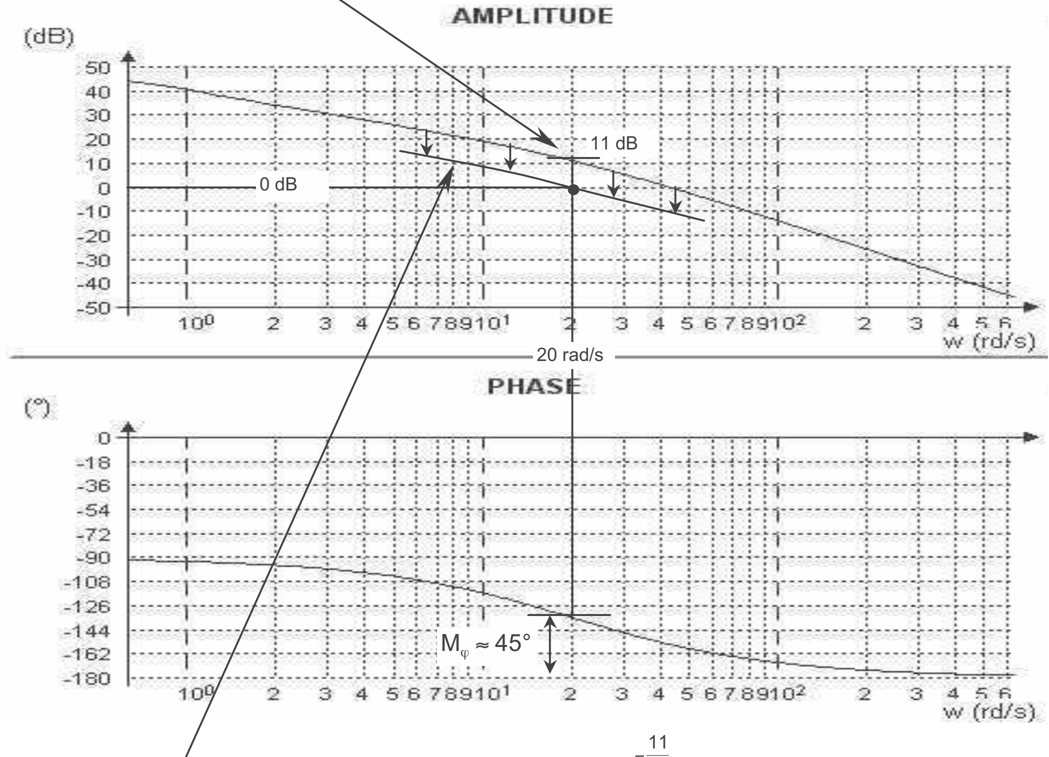
Ces calculs confirment la lecture du diagramme.

13) La marge de gain est acquise, mais <u>la marge de phase est très insuffisante</u> (45° minimum attendus). Pour augmenter cette dernière, il faudrait diminuer le gain en boucle ouverte, donc le gain du correcteur. Mais K_c = 500 est la valeur minimale pour satisfaire le critère de précision en vitesse. Il n'y a donc pas de solution, la correction proportionnelle ne permet pas de répondre au cahier des charges.

■ **Complément :**

On peut, à titre d'exercice supplémentaire, déterminer la valeur maximale de K_c permettant de satisfaire la marge de phase d'au moins 45°. Il faut pour cela que la pulsation pour laquelle la phase vaut 135° (180° moins 45° de marge de phase) soit la pulsation de coupure.

Clairement, la pulsation de coupure doit donc être de 20 rad/s. On lit sur le diagramme précédent une amplitude de l'ordre de 11 dB pour cette valeur.



Il faut donc diminuer le gain de 11 dB, soit le multiplier par $10^{-\frac{11}{20}} = 0{,}28$. *(car 20log0,28 = -11 dB).*
Le respect de la marge de marge d'au moins 45° impose donc un gain K_c au maximum de :
$K_c = 500 \times 0{,}28 = 140$ environ.

Encore une fois, cette lecture graphique peut se retrouver par calcul :

On commence par chercher la pulsation pour laquelle la phase vaut -135°. Celle-ci est solution de :
$\mathrm{Arg}(FTBO(j\omega)) = -\arctan(0{,}05\omega) - 90° = -135°$
soit : $\arctan(0{,}05\omega) = 45°$,
ou encore $0{,}05\omega=1$ et donc $\omega = 20$ rad/s.
NB : ce résultat était évident puisqu'il s'agit de la pulsation de cassure du système du 1er ordre.

Puis, on exprime que pour cette pulsation on veut :

$$|FTBO(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(0{,}05\omega)^2}} \times \frac{0{,}2K_c}{\omega} = 1 \quad (0\text{ dB})$$

soit : $\frac{1}{\sqrt{1+(0{,}05 \times 20)^2}} \times \frac{0{,}2K_c}{20} = 1$

D'où on extrait : $K_c = \frac{20}{0{,}2}\sqrt{1+(0{,}05 \times 20)^2} = 100\sqrt{2} \approx 141{,}2$

Ce qui confirme et précise le résultat obtenu par lecture graphique.

Or, et pour terminer, pour un tel gain, l'erreur statique en vitesse est de :

$$\varepsilon_V = \frac{1}{K_{BO}} = \frac{1}{K_c G} = \frac{1}{100\sqrt{2} \times 0{,}2} \approx 3{,}5.10^{-2}.$$

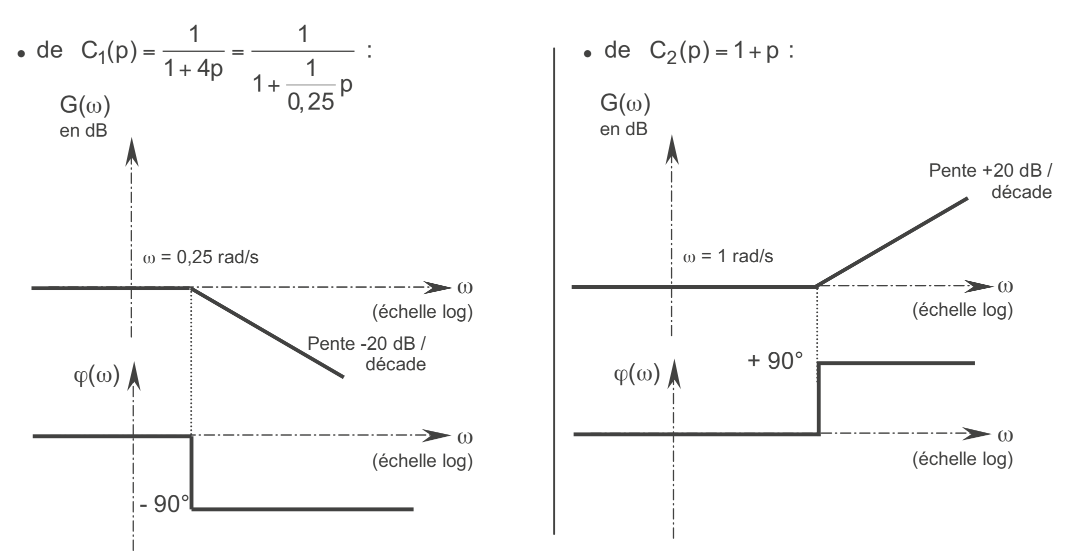
Soit donc 3,5%, ce qui est très supérieur à l'erreur maximale de 1% admise.

Question 2 : correction par retard de phase

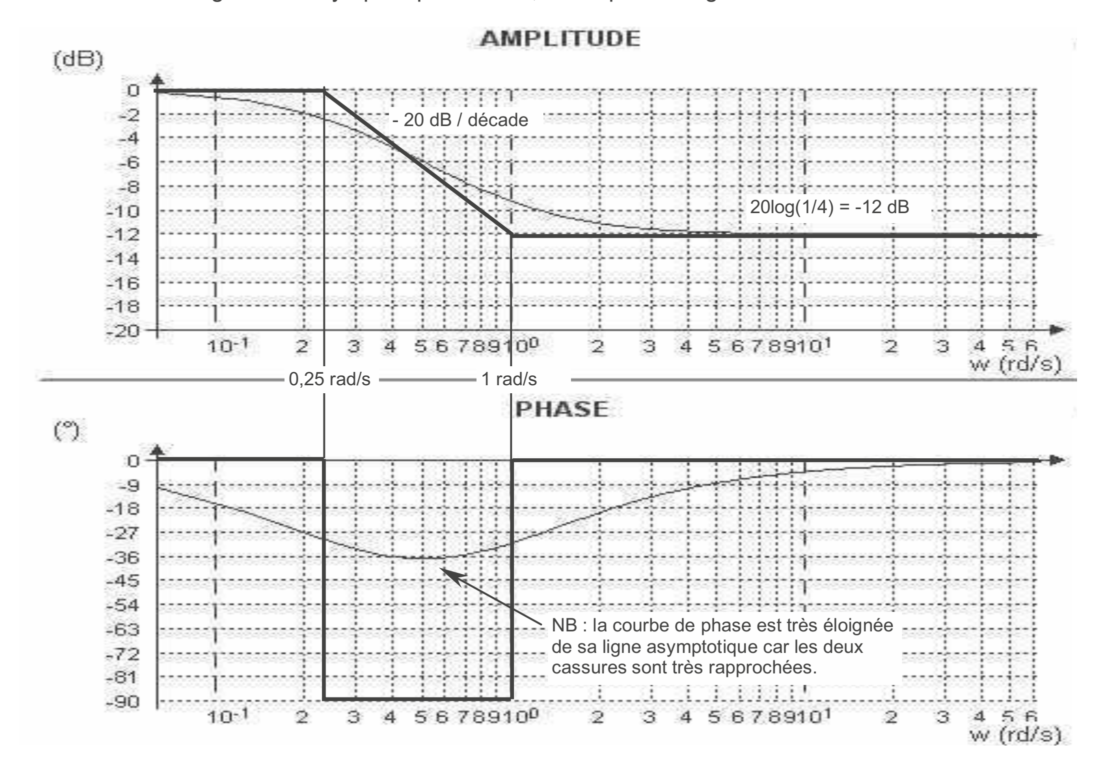
On envisage maintenant une correction par retard de phase : $C(p) = K_c \dfrac{1+p}{1+4p}$

21) Pour K_c = 1, le diagramme de Bode asymptotique de ce correcteur s'obtient aisément par addition des diagrammes asymptotiques :

- de $C_1(p) = \dfrac{1}{1+4p} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{0,25}p}$:
- de $C_2(p) = 1+p$:



Il vient donc le diagramme asymptotique suivant, ainsi que le diagramme réel :



Ce correcteur est appelé correcteur à retard de phase, puisque, comme le montre ce diagramme, sur une certaine bande de pulsations, il diminue la phase de la boucle dans laquelle il est inséré.

Toutefois, comme cela va être montré dans ce qui suit, ses propriétés intéressantes proviennent non pas de cette diminution de phase proprement dite, mais du fait que, dans les hautes pulsations, il diminue le gain (ici de -12 dB) sans altérer la phase.

22) La fonction de transfert en boucle ouverte corrigée est donc maintenant :

$$FTBO(p) = K_c \frac{1+p}{1+4p} \frac{G}{(1+\tau_m p)p}$$

Cette fonction de transfert en boucle ouverte étant toujours de classe 1 et de gain $K_{BO} = K_c G$, les écarts statiques sont inchangés par rapport à ceux obtenus par une correction proportionnelle :

- quelque soit la valeur de son gain, l'écart statique en position est nul.
- l'écart statique en vitesse (écart de traînage) relatif est : $\varepsilon_V = \frac{1}{K_{BO}} = \frac{1}{K_c G}$

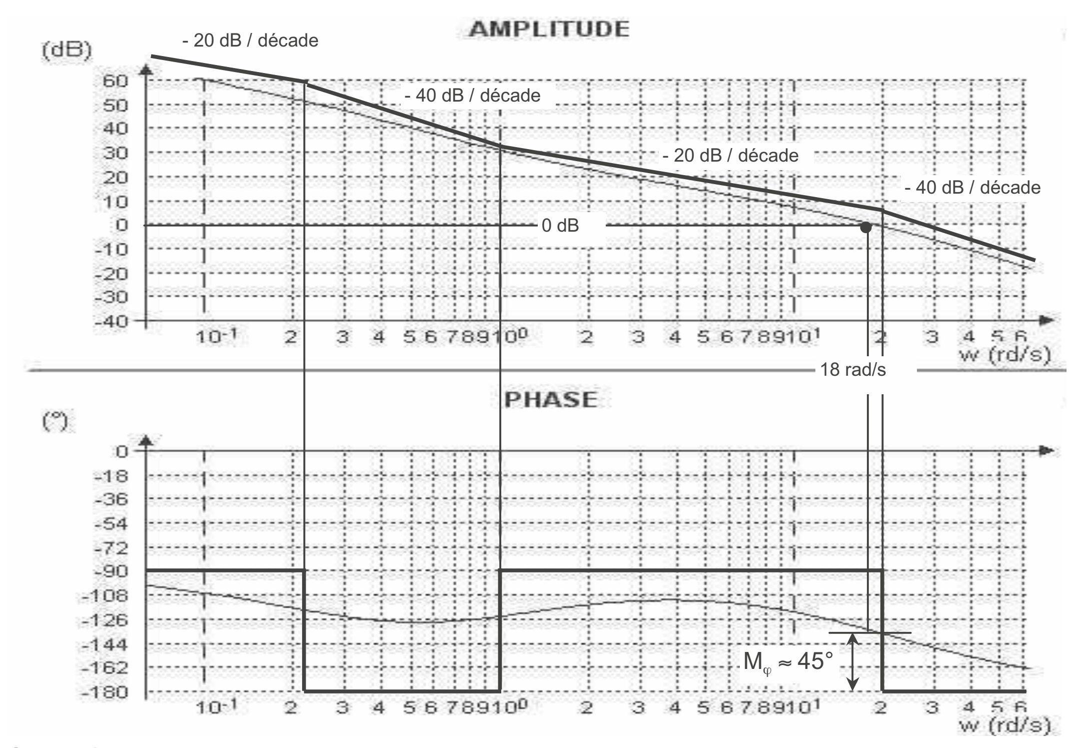
Il en va donc de même pour les erreurs et pour satisfaire les exigences du cahier des charges en termes de précision, en particulier en vitesse, il faut choisir, comme pour la correction proportionnelle, un gain de correction au moins égal à 500 :

$$\varepsilon_V = \frac{1}{K_c G} \leq \frac{1}{100} \quad \text{soit} \quad K_c \geq \frac{100}{G} = 500, \text{ car } G = 0{,}2.$$

23) Il convient de tracer le diagramme de Bode de la FTBO corrigée avec le gain réglé à $K_c = 500$, soit numériquement :

$$FTBO(p) = \frac{1+p}{1+4p} \frac{100}{(1+0{,}05p)p}$$

Ce diagramme est la somme des deux diagrammes précédemment tracés, soit :



On y relève :

- une marge de phase de l'ordre de 45° (associée à une pulsation de coupure de l'ordre de 18 rad/s)
- une marge de gain infinie pour cette FTBO dont la phase est toujours supérieure à -180°.

Pour calculer la marge de phase plus précisément, il faut tout d'abord calculer la pulsation de coupure à 0 dB ω_1. Celle-ci s'obtient en résolvant $|FTBO(j\omega)| = 1$.

Soit : $\dfrac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+(4\omega)^2}} \dfrac{1}{\sqrt{1+(0,05\omega)^2}} \times \dfrac{100}{\omega} = 1$,

ou encore : $\omega\sqrt{1+(0,05\omega)^2}\sqrt{1+(4\omega)^2} = 100\sqrt{1+\omega^2}$, qui fournit ω_1 = 18,4 rad/s.

Par ailleurs, Arg(FTBO(jω)) = - 90° - arctan0,05ω - arctan4ω + arctanω
et donc à la coupure :
Arg(FTBO(jω_1)) = - 90° - arctan(0,05x18,4) - arctan(4x18,4) + arctan18,4= -135°.
La marge de phase est donc : Mφ = 180° - 135°.

Soit $\boxed{M\varphi = 45°}$

Ces calculs confirment la lecture du diagramme.

Ainsi, le correcteur proposé permet de satisfaire les performances de précision et de stabilité exigées par le cahier des charges. Le critère de stabilité est tout juste respecté.

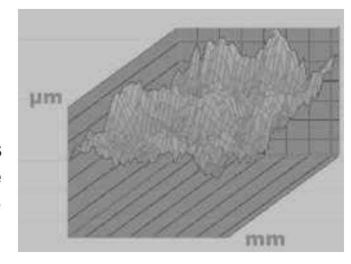
En ce qui concerne la rapidité, celle-ci est bien réglée au maximum possible avec le correcteur proposé. Son augmentation serait obtenue par une augmentation du gain K_c au delà de 500 (ce qui est compatible avec la précision), mais alors la marge de phase serait inférieure à 45°. C'est ce critère de stabilité qui limite les performances en rapidité du système.

On peut remarquer que la bande passante en boucle ouverte obtenue après correction par le correcteur à retard de phase est de 18,4 rad/s, alors qu'elle était de 42,5 rad/s avec la correction proportionnelle de même gain. Le correcteur à retard de phase ralentit donc le système. Le gain en stabilité se paie par une perte de rapidité.

II - RUGOSIMÈTRE À GRANDE VITESSE

D'après une épreuve du concours Commun Mines-Ponts PSI.

II-1 Présentation



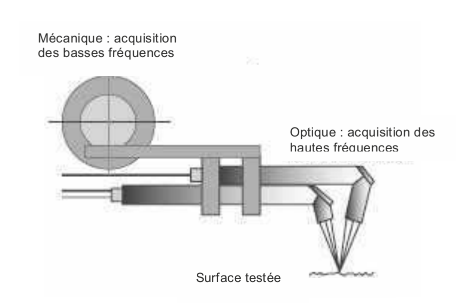
La rugosimétrie est la mesure de l'état de surface des pièces mécaniques. L'ordre de grandeur des défauts mesurés est le micromètre. La figure ci-contre représente un relevé rugosimétrique tridimensionnel d'une aube de turbine de haute précision.

La mesure repose traditionnellement sur deux éléments distincts :

- le capteur, qui peut être mécanique (palpeur) ou optique,
- le traitement du signal et des données qui permet de traduire les mesures physiques de base, produites par le capteur, en données numériques exploitables.

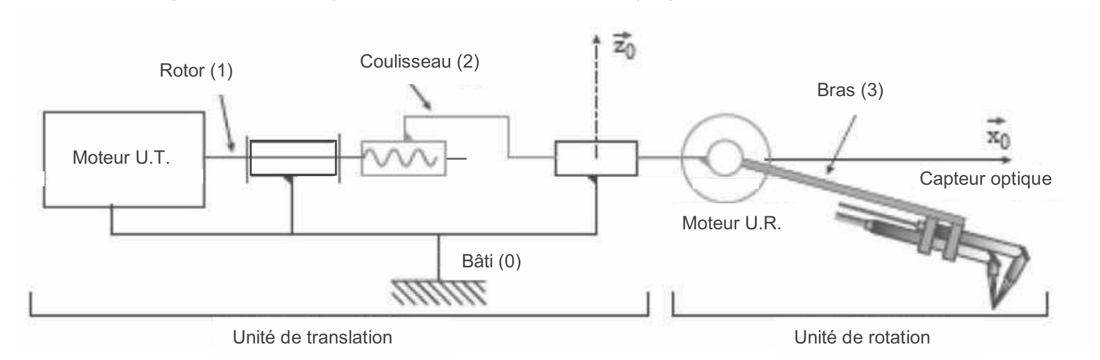
De la conjonction des caractéristiques techniques du capteur et du traitement numérique vont découler les qualités essentielles du rugosimètre : rapidité, résolution, précision et amplitude de mesure.

On s'intéresse ici à un prototype conçu par le laboratoire SATIE de l'École Normale Supérieure de Cachan, dont le principe repose sur l'association d'un capteur optique et d'un capteur mécanique.



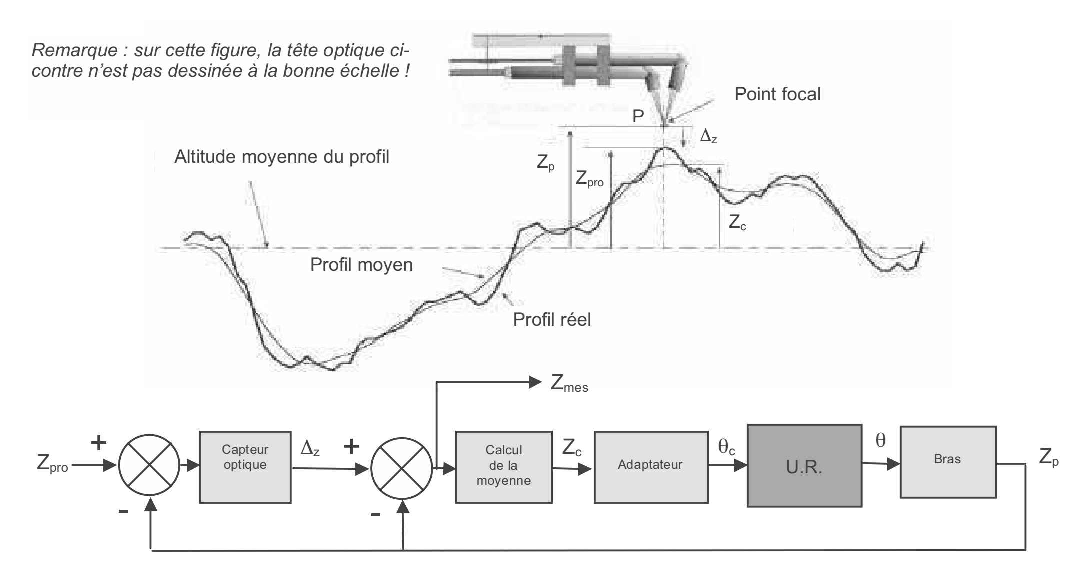
Le capteur optique, de faible amplitude (20 μm), permet une mesure rapide des hautes fréquences spatiales (variations rapides) des profils mesurés, avec une résolution inférieure à 10 nm.

Un asservissement mécanique vertical à grande amplitude (environ 10 mm) permet à la tête optique de suivre les moyennes et basses fréquences spatiales (variations plus lentes) des profils. Un second capteur donne la position verticale de la tête optique.



Le profil complet sera obtenu par la somme des signaux fournis par les deux capteurs. Le déplacement vertical du capteur optique est assuré par une unité de rotation (U.R.) portée par un coulisseau (2). Ce capteur est lui-même déplacé au-dessus de la surface à mesurer par une unité de translation (U.T.) à vitesse régulée, ce qui permet d'obtenir un profil à deux dimensions. La vitesse de déplacement lors de la mesure est de 20 mm/s. Pour obtenir une mesure à trois dimensions, une seconde unité de translation est associée perpendiculairement à la première pour obtenir une image de la surface par juxtaposition de profils à deux dimensions.

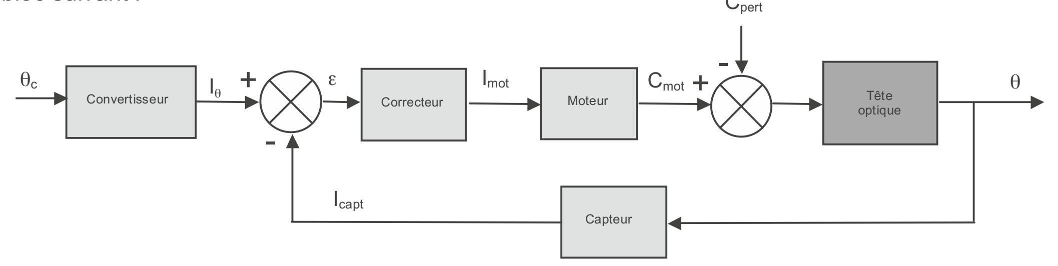
On s'intéresse ici à la ***commande de l'unité de rotation***. Le principe de fonctionnement du rugosimètre impose que le point focal de la tête optique se situe en permanence au plus près du profil moyen de la surface. Ceci est obtenu de la manière suivante :



- Le capteur optique permet de mesurer la distance entre le point focal (P) du système optique et le profil réel de la pièce. Le signal de sortie de ce système est : $\Delta_z(t) = z_{pro}(t) - z_p(t)$.
- Le pilotage en altitude du point focal se fait sur le profil moyen. Cette consigne $z_c(t)$ est obtenue par une opération « calcul de la moyenne », qui détermine la moyenne mobile, sur un temps caractéristique τ, de l'altitude du profil.
- La position réelle du point focal $z_p(t)$ est mesurée par l'intermédiaire d'un capteur mécanique.

Une phase d'initialisation (non étudiée ici) permet qu'au début de la mesure le profil réel de la pièce soit considéré d'altitude nulle ($z_c(0) = 0$). Cette position de référence correspond à une consigne de position angulaire du bras également nulle ($\theta_c(0) = 0$).

L'unité de rotation U.R. réalise finalement un asservissement de position angulaire selon le schéma bloc suivant :



- La consigne angulaire θ_c issue de la consigne d'altitude est convertie en courant de consigne I_θ par un convertisseur de gain K_{con}.
  Cette consigne est comparée au courant I_{capt} issu du capteur angulaire, image de l'angle réel θ.
  Le gain du capteur est K_{capt}.
  $K_{con} = K_{capt} = 2$ A/rad, égaux, classiquement.

- Un correcteur, de fonction de transfert à concevoir $H_{cor}(p)$, élabore le courant de commande du moteur I_{mot}, à partir de l'écart en courant établi par le comparateur.

- Le moteur permet de générer un couple C_{mot} sur le bras support de la tête optique, avec une constante de couple $K_{mot} = 0{,}05$Nm/A.

- Une étude mécanique permet de montrer que des effets inertiels non négligeables viennent perturber ce couple moteur. Ils sont ramenés sur l'arbre moteur sous la forme d'un couple C_{pert}.
  Cette même étude mécanique permet de modéliser, sous certaines hypothèses simplificatrices (en particulier des linéarisations), la fonction de transfert de la tête optique sous la forme fondamentale du deuxième ordre :

$$H_{tête}(p) = \frac{K_t}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Le but de l'étude est de concevoir le correcteur, afin de satisfaire certaines exigences du cahier des charges qui seront précisées par la suite.

II-2 Travail demandé

<u>Question 1 :</u> élaboration de la consigne

La consigne angulaire $\theta_c(t)$ de l'unité de rotation est déterminée à chaque instant à partir de la consigne de position $z_c(t)$ du point focal, qui est la moyenne, sur un temps donné τ, des positions antérieures :

$$z_c(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} z_{mes}(u)du$$

Montrer que la fonction de transfert du bloc « calcul de la moyenne » peut se mettre sous la forme :

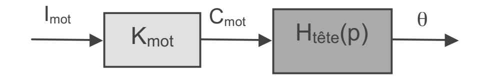
$$H_{moy}(p) = \frac{Z_c(p)}{Z_{mes}(p)} = \frac{1-e^{-p\tau}}{p\tau}$$

Z_{mes} → Calcul de la moyenne → Z_c → Adaptateur → θ_c

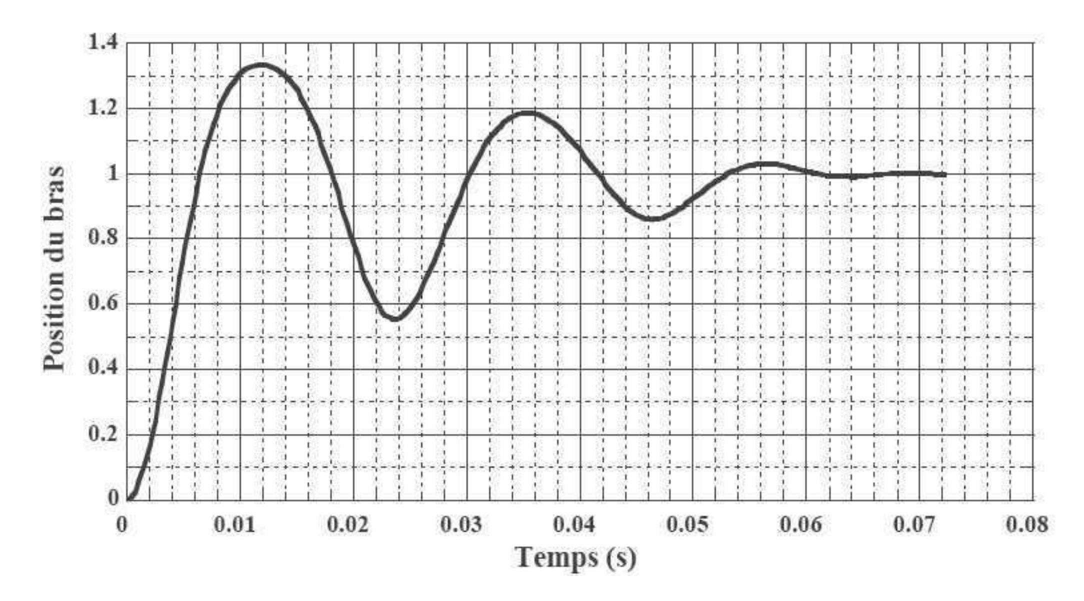
La suite du problème suppose la consigne de position angulaire $\theta_c(t)$ alors établie à chaque instant.

<u>Question 2 :</u> identification des paramètres de la tête optique

Pour identifier les paramètres du modèle associé à la tête optique, on soumet le système {moteur couple, tête optique} à un échelon de courant d'amplitude 2,5 mA.

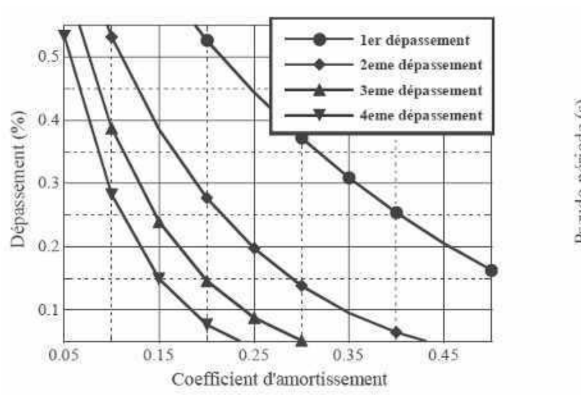


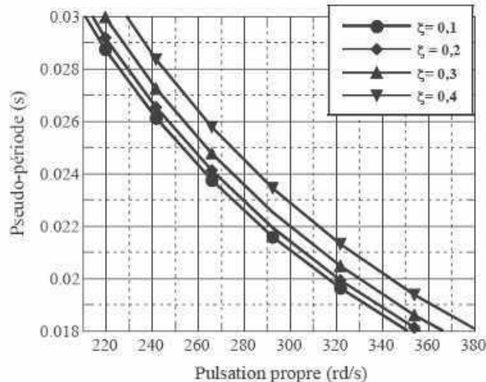
On relève une valeur asymptotique finale de 158.10^{-6} rad et l'évolution temporelle de la réponse, adimensionnée par division par cette valeur finale, est donnée ci- dessous.



21) Justifier et critiquer le modèle qui a été retenu pour la tête optique : $H_{tête}(p) = \dfrac{K_t}{1 + \dfrac{2z}{\omega_0} p + \dfrac{1}{\omega_0^2} p^2}$.

22) On retient toutefois ce modèle. Proposer alors des valeurs pour ses différents paramètres caractéristiques : K_t, z, ω_0. On pourra, si nécessaire, utiliser les abaques ci-dessous.



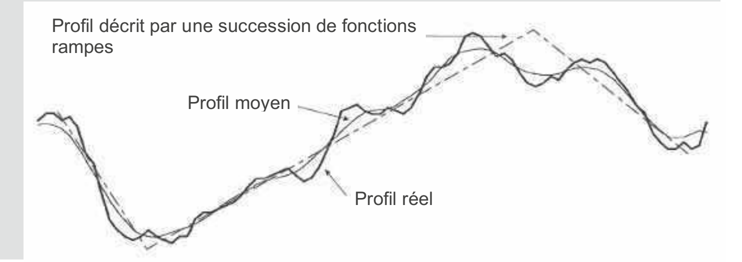


<u>Question 3 :</u> choix du type de correcteur

Afin de suivre, de la façon la plus fine possible, le profil moyen de la pièce, il est nécessaire de choisir avec soin le correcteur afin d'assurer la précision, la rapidité et la stabilité de la position du point focal (P), donc de la position du bras (3).

En ce qui concerne la précision de position angulaire du bras, les concepteurs de ce rugosimètre souhaitent :

- **Annuler**, en régime permanent, l'influence d'une perturbation de type échelon. Cette forme de perturbation peut être rencontrée lors de la phase d'accélération de l'unité de translation.
- **Limiter au maximum**, sans nécessairement l'annuler, l'erreur de positionnement pour une consigne de type rampe (erreur de traînage). Cette entrée est suffisamment représentative si l'on considère un profil moyen du type ci-contre.



Pour ces exigences du cahier des charges, les concepteurs envisagent trois choix possibles :
- un correcteur proportionnel $H_{cor}(p) = K_p$
- un correcteur intégral $H_{cor}(p) = K_p / p$
- un correcteur double intégrateur $H_{cor}(p) = K_p / p^2$

Donner, parmi ces trois choix, les correcteurs qui respectent les critères de précision.
Quelles sont les conséquences sur la stabilité de ces correcteurs ?
Justifier que l'on retienne finalement le correcteur intégral.

<u>Question 4 :</u> dimensionnement du correcteur

Reste à choisir le coefficient K_p.

41) Le cahier des charges impose d'avoir des marges de stabilité suffisantes, tout en ayant un système qui soit le plus rapide possible. Ainsi la marge de phase doit être d'au moins 45° et la marge de gain d'au moins 6 dB.

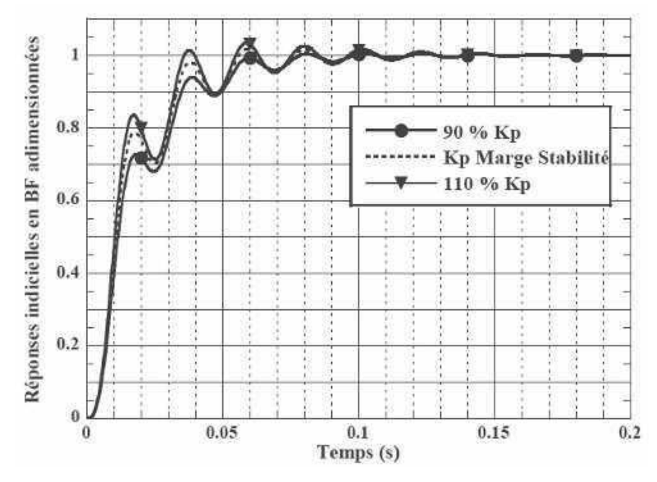
Déterminer alors le gain K_p optimal vis à vis des marges de stabilité.

42) Ce réglage concerne principalement la stabilité du système. La précision a été respectée par le choix du type de correcteur. Il reste maintenant à se pencher sur la rapidité.

Pour cela, la réponse indicielle du système a été simulée sur un logiciel pour trois valeurs de K_p :
- celle qui correspond au réglage des marges de stabilité (valeur déterminée précédemment),
- 90% de cette valeur
- 110% de cette valeur.

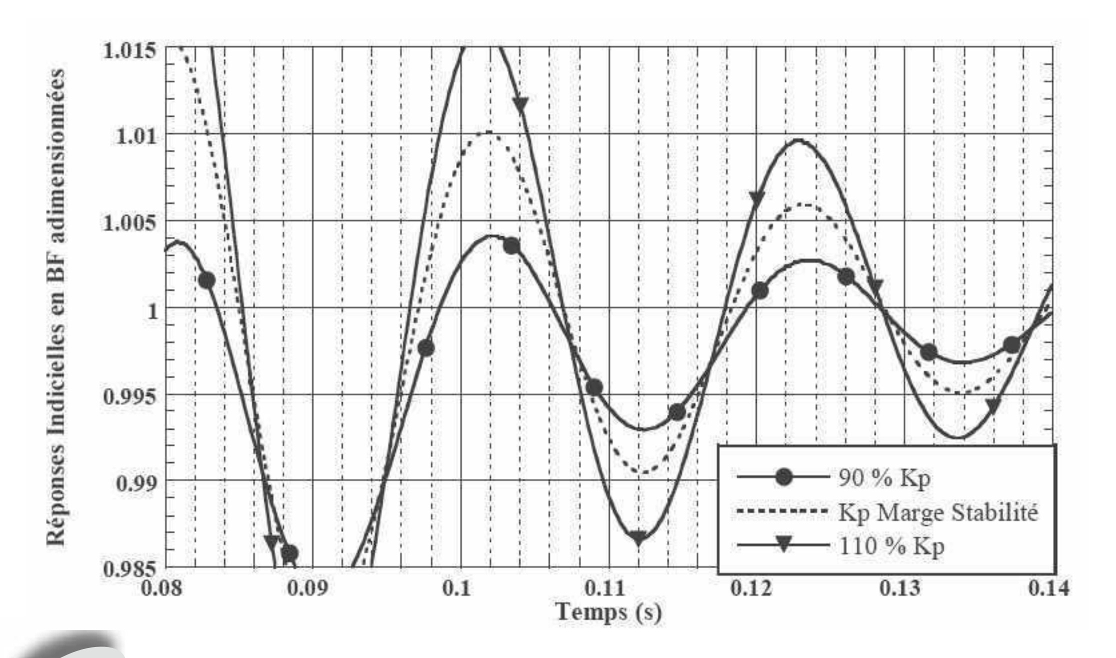
Le résultat est fourni sous la forme des trois courbes adimensionnées ci-contre.

Un zoom est donné page suivante pour une lecture plus précise.



Déterminer, à la lecture de ces courbes, le réglage qui donne le meilleur temps de réponse à 1%.

Choisir finalement le coefficient K_p à retenir.



II-3 Correction

Question 1 : élaboration de la consigne

La consigne de position $z_c(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} z_{mes}(u)du$ peut se décomposer en :

$$z_c(t) = \frac{1}{\tau}\left[\int_0^t z_{mes}(u)du - \int_0^{t-\tau} z_{mes}(u)du\right]$$

où on peut aisément élaborer les transformées de Laplace :

- $\int_0^t z_{mes}(u)du$ a en effet pour transformée $\frac{Z_{mes}(p)}{p}$ d'après le théorème de l'intégration ;
- $\int_0^{t-\tau} z_{mes}(u)du$ est la fonction retardée de τ par rapport à la précédente ; elle a donc pour transformée $\frac{Z_{mes}(p)}{p}e^{-\tau p}$ d'après le théorème du retard. Revoir le chapitre 3 si nécessaire.

Donc, par linéarité de la transformation de Laplace : $Z_c(p) = \frac{1}{\tau}\left[\frac{Z_{mes}(p)}{p} - \frac{Z_{mes}(p)}{p}e^{-\tau p}\right]$

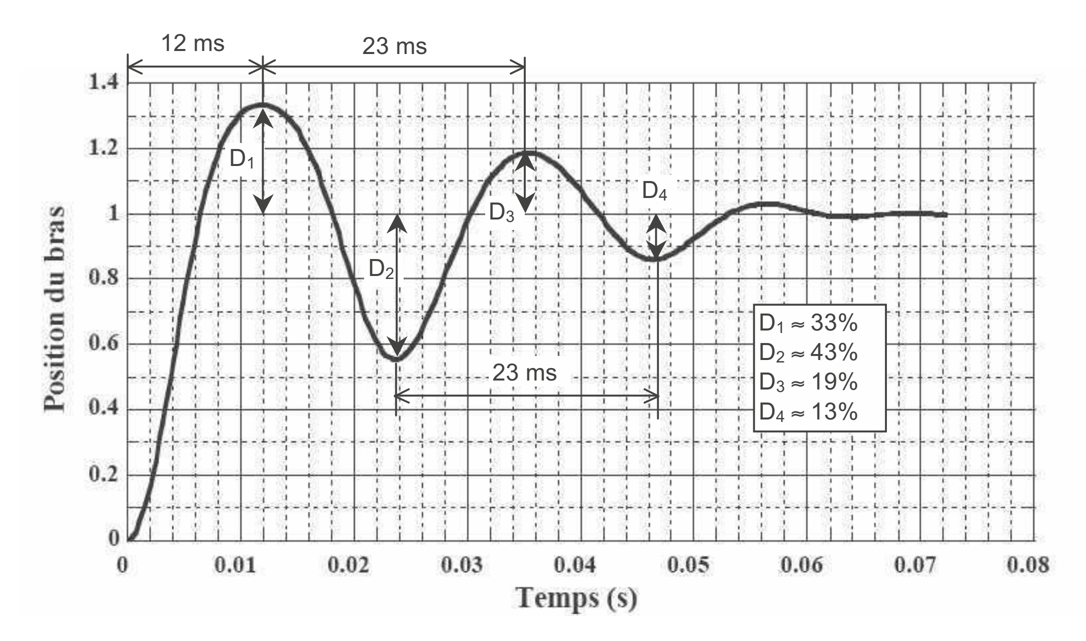
Et donc, comme attendu : $\boxed{H_{moy}(p) = \frac{Z_c(p)}{Z_{mes}(p)} = \frac{1-e^{-p\tau}}{p\tau}}$

Question 2 : identification des paramètres de la tête optique

21) Le modèle retenu est un modèle fondamental du deuxième ordre : $H_{tête}(p) = \frac{K_t}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$

L'allure générale de la réponse indicielle est celle d'un tel système, faiblement amorti :

- tangente horizontale à l'origine,
- oscillations dont la période est sensiblement le double de l'instant du premier dépassement.



On peut noter toutefois que le deuxième extremum présente un niveau supérieur au premier (on raisonne en valeurs absolues bien évidemment) ce qui n'est pas caractéristique d'un tel système pour lequel les niveaux des extremums vont décroissant au cours du temps.

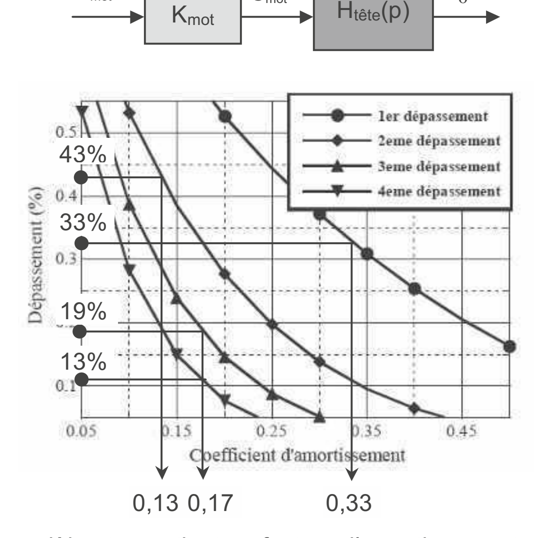
Mise à part cette caractéristique qui vient des non linéarités non prises en compte dans le modèle mécanique, le modèle semble néanmoins correctement convenir qualitativement. L'analyse quantitative qui suit devra le confirmer.

22) D'un point de vue quantitatif :

- Le gain K_t est immédiatement fourni par le comportement asymptotique :

$$K_t = \frac{\lim_{t \to \infty} \theta(t)}{I_{mot} x K_{mot}} = \frac{158.10^{-6}}{2,5.10^{-3} x 0,05}$$

Soit : $\boxed{K_t \approx 1,2 \text{ rad/Nm}}$



- Les différents dépassements permettent d'évaluer le facteur d'amortissement à partir de l'abaque fourni.

On constate, en accord avec les considérations précédentes, que les deux premiers dépassements fournissent des valeurs de facteur d'amortissement incohérentes entre elles (0,33 pour le 1er, 0,13 pour le 2ème), alors que les dépassements suivants fournissent un facteur d'amortissement identique de 0,17.

Deux méthodes sont alors possibles pour proposer une modélisation.

Soit on exclut les deux premiers dépassements du modèle et on retient un facteur d'amortissement de 0,17. Soit on recherche un modèle qui fournit une réponse qui ne passe pas forcément exactement par les extremums, mais « au mieux » sur l'ensemble des points, et on retient alors un facteur moyen de l'ordre de 0,2. C'est ce que nous retiendrons ici, compte tenu, de plus, des différentes incertitudes de mesure.

NB : Ces résultats peuvent se retrouver sans l'abaque, à partir de la relation $D_k = e^{-\frac{k\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$, en valeur absolue, qui par inversion (solution positive) fournit :

$$z = -\frac{\ln D_k}{\sqrt{k^2\pi^2 + (\ln D_k)^2}}$$

Revoir chapitre 4, paragraphe III-4 si nécessaire.

On obtient alors les facteurs d'amortissement suivants, cohérents avec les relevés sur l'abaque :

Numéro k du dépassement	1	2	3	4
Dépassement D_k mesuré	33%	43%	19%	13%
Facteur d'amortissement z correspondant	0,33	0,13	0,17	0,16

En conclusion, on retiendra en première approximation un facteur d'amortissement de l'ordre de :

z = 0,2

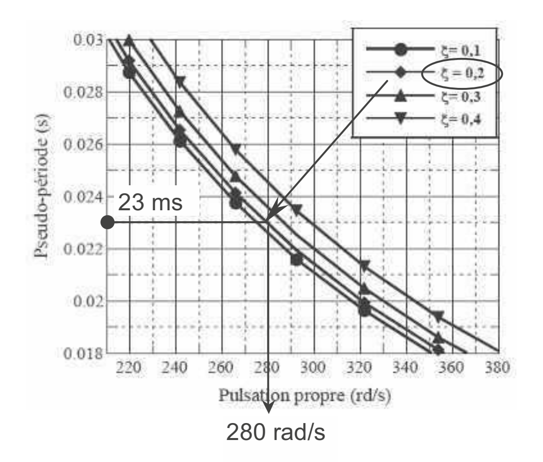
- La pulsation ω_0 est alors, quant à elle, estimée à partir de la pseudo période de 23 ms à 280 rad/s, soit à partir du deuxième abaque fourni (ci-contre), soit à partir de la relation qui donne cette période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$

d'où on sort :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-z^2}} = \frac{2\pi}{23.10^{-3}\sqrt{1-0,2^2}} \approx 280 \text{ rad/s.}$$

Que l'on arrondira à: $\omega_0 \approx 300$ rad/s



- En conclusion, le modèle numérique retenu pour la fonction de transfert de la tête optique est :

$$H_{tête}(p) = \frac{K_t}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{1,2}{1 + \frac{0,4}{300}p + \frac{1}{300^2}p^2} \text{ (rad/Nm)}$$

<u>Question 3 :</u> choix du type de correcteur

Rappel de la structure de l'asservissement :

θ_c → K_{con} → I_θ (+) → ε → $K_{cor}(p)$ → I_{mot} → K_{mot} → C_{mot} (+), C_{pert} (-) → $H_{tête}(p) = \frac{K_t}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$ → θ ; retour : K_{con} → I_{capt} (-)

1- L'annulation de l'influence d'une perturbation en échelon exige la présence d'au moins une intégration en amont (revoir chapitre 3, paragraphe VII-3, si nécessaire).
2 - Pour limiter au maximum l'erreur de traînage, il faut au moins une intégration dans la boucle. Deux intégrations annulent l'erreur de traînage (idem).

Le premier point nécessite au moins une intégration dans $K_{mot}xH_{cor}(p)$, ce qui exclut un correcteur proportionnel. Les deux autres correcteurs conviennent.

Le second point est alors satisfait : un correcteur intégral apporte une intégration qui permet de minimiser l'erreur de traînage (par réglage du gain), le correcteur à double intégration quant à lui annule l'erreur de traînage, ce qui est supérieur aux exigences.

En termes de stabilité, le double intégrateur, diminuant la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte de 180° pour toutes les pulsations, est fortement déstabilisateur puisque cette fonction de transfert est déjà d'ordre deux. La phase de la fonction de transfert en boucle ouverte serait alors en effet dans l'intervalle]-180°,-360°[.

On retiendra donc, parmi les trois correcteurs proposés, le correcteur intégral : $\boxed{H_{cor}(p) = \frac{K_p}{p}}$

La phase de la fonction de transfert en boucle ouverte sera alors dans l'intervalle]-90°,-270°[, permettant un dimensionnement du correcteur (choix de K_p) pour assurer des marges de stabilité suffisantes (Cf. question suivante).

NB : On aurait pu également retenir un correcteur proportionnel intégral, offrant plus de rapidité. On peut s'étonner de ce choix d'un correcteur strictement intégral.

Question 4 : dimensionnement du correcteur

La fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement est, après le choix du type de correcteur :

$$FTBO(p) = \frac{K_p}{p} K_{con} K_{mot} \frac{K_t}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} = \frac{0,12 K_p}{p\left[1 + \frac{0,4}{300} p + \frac{1}{300^2} p^2\right]}$$, d'ordre 3 et de classe 1.

Il reste à choisir K_p.

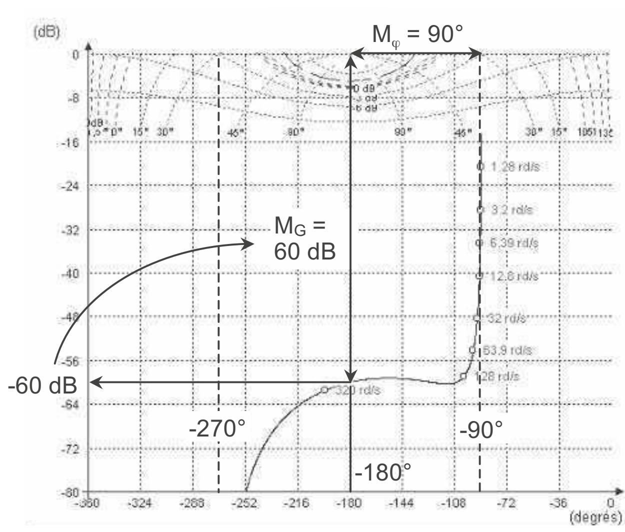
41) Les marges de stabilité exigées sont d'au moins 45° pour la marge de phase et de 6 dB pour la marge de gain.

Pour visualiser la situation et en particulier apprécier rapidement laquelle de ces deux marges est la plus contraignante, il peut être intéressant de tracer le diagramme de Black ou le diagramme de Bode de cette FTBO, pour $K_p = 1$ par exemple. Ceux-ci s'obtiennent aisément par la mise en série d'un intégrateur et d'un système fondamental du deuxième ordre, la phase variant donc dans l'intervalle]-90°,-270°[.

On trace par exemple ci-contre le diagramme de Black de la fonction $\frac{0,12}{p\left[1 + \frac{0,4}{300} p + \frac{1}{300^2} p^2\right]}$.

On y lit donc que pour $K_p = 1$:
- la marge de phase est $M_\varphi = 90°$
- la marge de gain est $M_G = 60$ dB.

La pulsation de cassure de 300 rad/s (égale à la pulsation propre du terme du second ordre) est obtenue lorsque la phase vaut -180°. Cette caractéristique se visualise mieux sur le diagramme de Bode qui suit.



NB : revoir chapitre 5, III-6, si nécessaire, concernant les problèmes d'affichage de la phase.

La marge de gain de 6 dB attendue permet donc d'augmenter le gain jusqu'à 54 dB supplémentaires. Cela correspond à un coefficient multiplicateur K_p tel que : $20 \log K_p = 54\,\text{dB}$.

Soit : $K_p = 10^{\frac{54}{20}} \approx 500$.

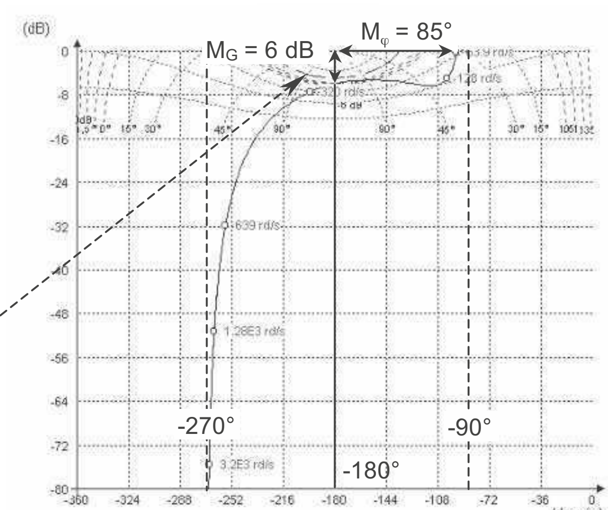
Cette correction est pratiquement sans aucun effet sur la marge de phase qui reste de l'ordre de 90° (85° environ). La nouvelle pulsation de coupure à 0 dB a, certes, fortement augmenté : elle est de l'ordre de 60 rad/s, alors quelle ne s'observait pas sur le diagramme initial, tant elle était basse. Mais elle reste suffisamment faible devant la pulsation de cassure du système (300 rad/s) pour que la phase y soit toujours de l'ordre de - 90° (-95° environ).

Le critère de marge de gain imposant $\boxed{K_P = 500}$ est donc bien plus contraignant que le critère de marge de phase de 45° qui est toujours très largement satisfait. Ce réglage sera donc retenu.

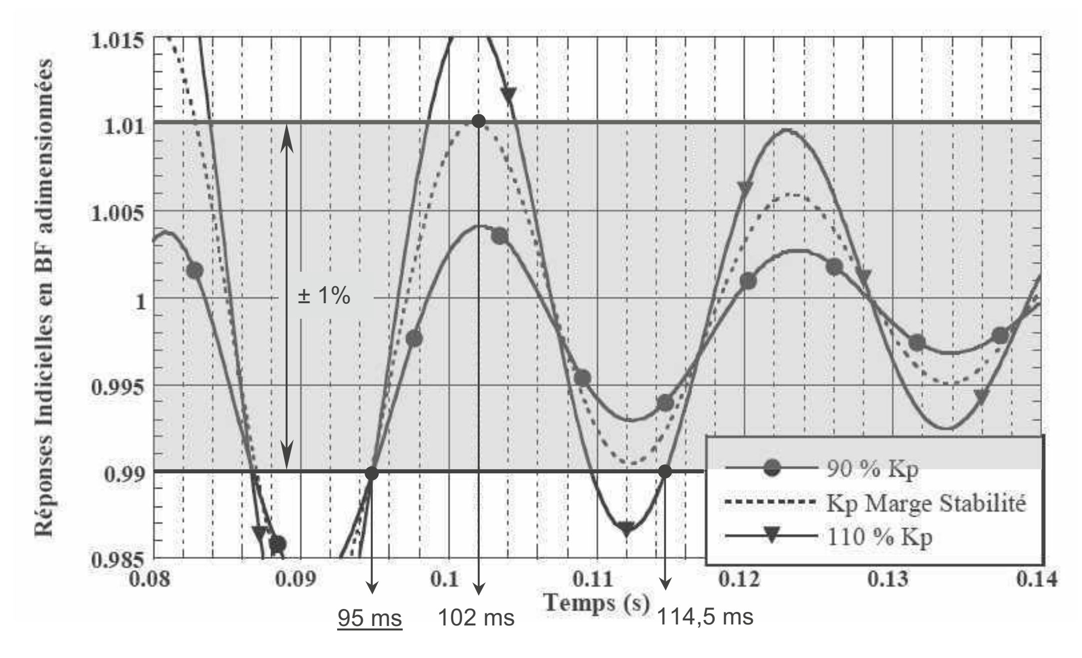
On peut, pour terminer, illustrer le résultat de la correction sur le diagramme de Black de la fonction corrigée, soit :

$$FTBO(p) = 500x\frac{0,12}{p\left[1+\frac{0,4}{300}p+\frac{1}{300^2}p^2\right]}$$

On peut remarquer sur ce diagramme que la courbe est pratiquement tangente au contour de Hall ce qui satisfait également le critère usuel de marge d'amplitude.



42) Choix final de K_p.

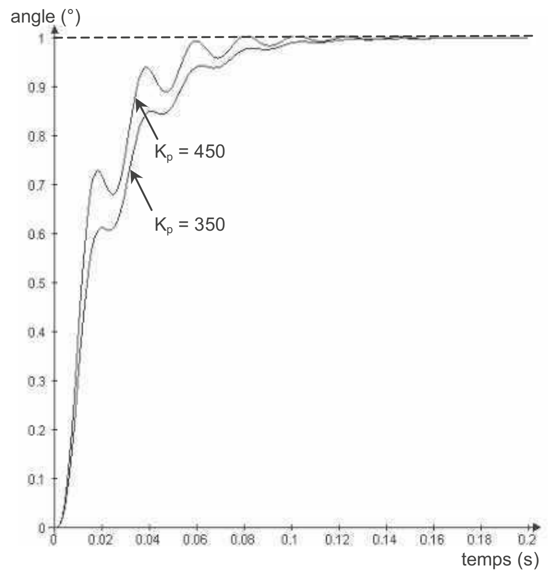


Le meilleur temps de réponse à 1% (95 ms) est obtenu pour le gain réglé à 90% de K_p (soit 450) car le système est moins oscillant. Ceci est cohérent avec le fait que, diminuant légèrement le gain de la boucle, les marges de stabilité (essentiellement la marge de gain) augmentent un peu.

Ce gain respecte les marges de stabilité, tout en optimisant la rapidité. Un gain encore plus faible diminuerait encore plus les oscillations, certes, mais ralentirait globalement le système, avec un critère de temps de montée par exemple.

On peut tracer ci-contre, à titre d'illustration, les réponses indicielles (sans perturbation) comparées pour le gain K_p réglé à 450 et pour un réglage à 350, encore moins oscillant, mais cette fois franchement moins rapide et donc à exclure.

Ainsi, avec un critère de rapidité, le réglage à 450 semble un bon compromis.



Toutefois, la diminution de gain entraîne une augmentation de l'erreur de traînage, puisque celle-ci est inversement proportionnelle au gain de la boucle. Or, si le cahier des charges n'exige pas que celle-ci soit nulle, ce qui nécessiterait une double intégration, déstabilisante (cf. question 3), il demande néanmoins que celle-ci soit « la plus faible possible ». Ceci incite à préférer le réglage 500 au réglage 450 et donc, en l'absence de données chiffrées précises du cahier des charges, il est impossible de choisir…

Il est néanmoins possible de comparer les erreurs de traînage relatives pour les deux réglages, 450 et 500. Celle-ci s'écrit, pour une consigne de pente unitaire :

$$\varepsilon_V = \frac{1}{K_{BO}} = \frac{1}{0,12K_p}$$

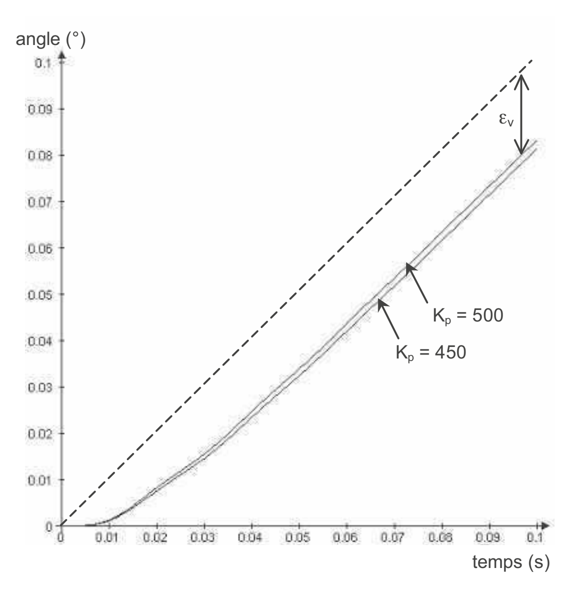
Ainsi :

- pour $K_p = 500$, $\varepsilon_V = \dfrac{1}{0,12x500} \approx 0,0167°$
- pour $K_p = 450$, $\varepsilon_V = \dfrac{1}{0,12x450} \approx 0,0185°$

Le choix de 450, par rapport à 500, entraîne donc une augmentation relative de l'erreur de traînage de :

$$\frac{185-167}{167} \approx 10\%$$

Cette augmentation peut sembler minime, comme permet de le visualiser ci-contre la réponse à une rampe unitaire du système (sans perturbation) pour ces deux réglages. Ceci encourage, en l'absence de données plus précises du cahier des charges, à maintenir le choix K_p = <u>450</u>, qui est un bon compromis entre stabilité et rapidité, sans nuire excessivement à la précision.



L'analyse peut-être complétée par l'influence de K_p sur la capacité du système à rejeter l'effet des perturbations. Le choix d'un correcteur intégral assure cette capacité, en régime permanent et pour les perturbations en échelon comme il est demandé. Le choix de K_p est donc sans importance pour cette exigence. Mais si l'effet des perturbations doit, de plus, être atténué rapidement en régime transitoire, il convient d'avoir un système rapide et donc de choisir K_p en conséquence.

III - CONDUCTEUR VIRTUEL POUR VÉHICULE AUTOMOBILE

D'après une épreuve du concours Centrale-Supélec PSI.

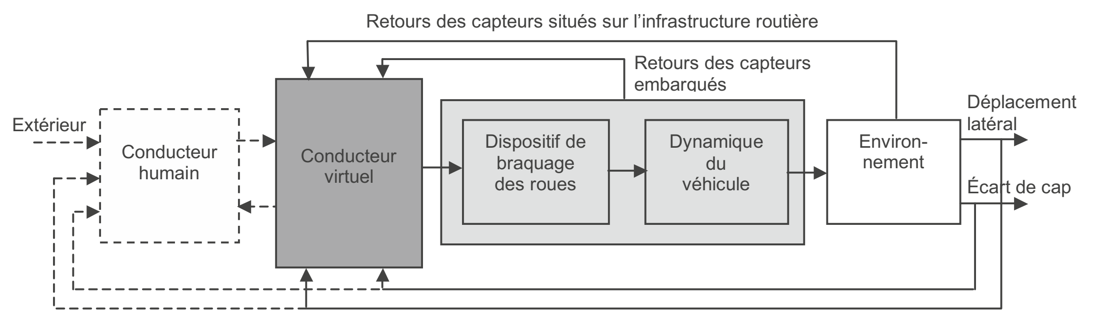
III-1 Présentation

L'accroissement de la circulation automobile dans les grandes agglomérations menace de saturation leurs réseaux d'autoroutes. Une des solutions consiste à augmenter les flux en automatisant les voitures sur ces dernières.

L'étude porte plus particulièrement sur le système de contrôle du déplacement latéral du véhicule lors d'un changement de voie.



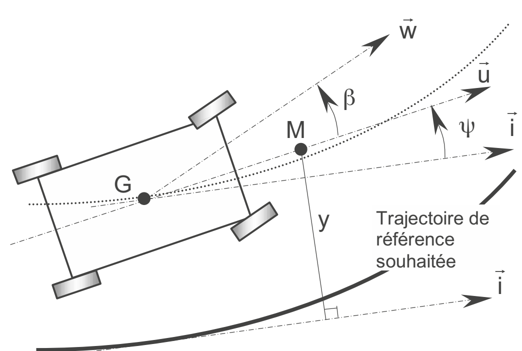
Le schéma fonctionnel suivant propose un modèle de l'architecture du système qui équipe un véhicule prototype, réalisé sur la base d'un monospace Renault Scénic, doté d'une boîte de vitesses automatique.



Le système se compose d'une partie embarquée à bord du véhicule ainsi que de systèmes faisant partie de l'infrastructure de la route qui doit être adaptée. Les capteurs embarqués sont des capteurs d'angle, d'accélération et de vitesse, et divers détecteurs de l'environnement extérieurs (voie et autres véhicules). Les capteurs situés sur l'infrastructure permettent au véhicule de se situer géographiquement : balises, système de positionnement par satellite, etc.

L'objet de cette étude est de définir l'architecture des asservissements permettant d'assurer que le véhicule reste sur une trajectoire définie par sa position par rapport à la route, de déterminer les paramètres des correcteurs associés et de valider les performances obtenues comparativement à un cahier des charges qui sera précisé ultérieurement.

Le repérage par rapport à la route ainsi que les différentes grandeurs géométriques utiles à cette étude sont présentés ci-contre. G est le centre d'inertie du véhicule.



- Le véhicule est dirigé selon une direction définie à chaque instant par l'axe $(G,\vec{u})$.
- Ses roues directrices sont inclinées d'un angle β par rapport à cette direction.

NB : Il s'agit en fait d'un angle « moyen », les deux roues directrices d'un véhicule n'étant, hors ligne droite, pas parallèles entre-elles, la roue intérieure au virage étant légèrement plus braquée, afin de garantir le non-glissement du véhicule sur le sol.

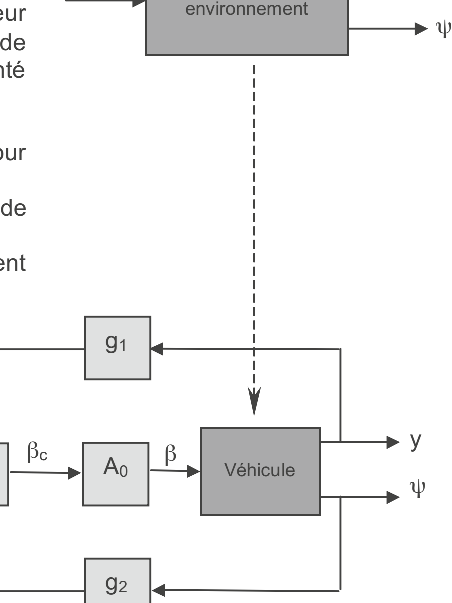
- La trajectoire attendue du véhicule est caractérisée par la direction de sa tangente $\vec{i}$ au niveau du centre d'inertie G. L'écart de cap est caractérisé par l'angle $\psi(t)$ que fait la direction effective du véhicule $\vec{u}$ par rapport à $\vec{i}$.

- Par ailleurs, le véhicule peut être déporté par rapport à la trajectoire de référence, en particulier lors d'un changement de voie. Ce déplacement latéral y(t) est mesuré en un point M situé en avant du véhicule, ce qui correspond à une forme d'anticipation dans la conduite.

L'écart de cap $\psi(t)$ et le déplacement latéral y(t) sont accessibles à chaque instant à la mesure (voir schéma fonctionnel précédent), grâce aux capteurs qui équipent le système. L'orientation des roues $\beta(t)$ est la grandeur commandée par le conducteur virtuel. Ainsi, du point de vue de l'automaticien, le véhicule pourra être représenté selon le schéma ci-contre.

L'architecture de commande est alors organisée autour de deux boucles d'asservissement imbriquées :

- une boucle interne réalisée à partir de la mesure de l'écart de cap,
- une boucle externe portant sur le déplacement latéral attendu :



Les capteurs de déplacement latéral et d'écart de cap peuvent être modélisés comme de simples gains, respectivement g_1 = 1 V/m et g_2 = 10 V/rad.

Un actionneur, associé à une boucle d'asservissement de position angulaire (non étudiée), permet d'assurer l'angle de braquage β des roues à partir d'une tension de consigne β_c. Cet asservissement, non étudié ici, est suffisamment rapide pour que sa fonction de transfert puisse être modélisée comme un simple gain A_0 = 0,1 rad/V.

Ainsi, la tension de consigne de déplacement latéral y_c est comparée à l'image du déplacement fournie par le capteur. La différence est traitée par un premier correcteur, pour élaborer en conséquence la tension de consigne d'écart de cap ψ_c. Celle-ci est comparée à l'image de l'écart de cap fournie par le capteur et la différence est traitée par un second correcteur pour élaborer la tension de consigne angulaire des roues β_c. La dynamique du véhicule le place alors dans la situation décrite par y et ψ.

L'objet du travail est de concevoir les fonctions de transfert $C_1(p)$ et $C_2(p)$ des deux correcteurs. Ceci sera réalisé en considérant dans un premier temps la boucle d'asservissement de l'angle, puis dans un deuxième temps, la boucle externe portant sur le déplacement latéral, les deux boucles pouvant être considérées comme découplées.

III-2 Travail demandé

III-2-1 étude de l'asservissement de l'angle d'écart de cap

Comme annoncé, le but de cette partie est de déterminer un correcteur pour la boucle d'asservissement portant sur l'écart de cap. Le cahier des charges exigé est le suivant :

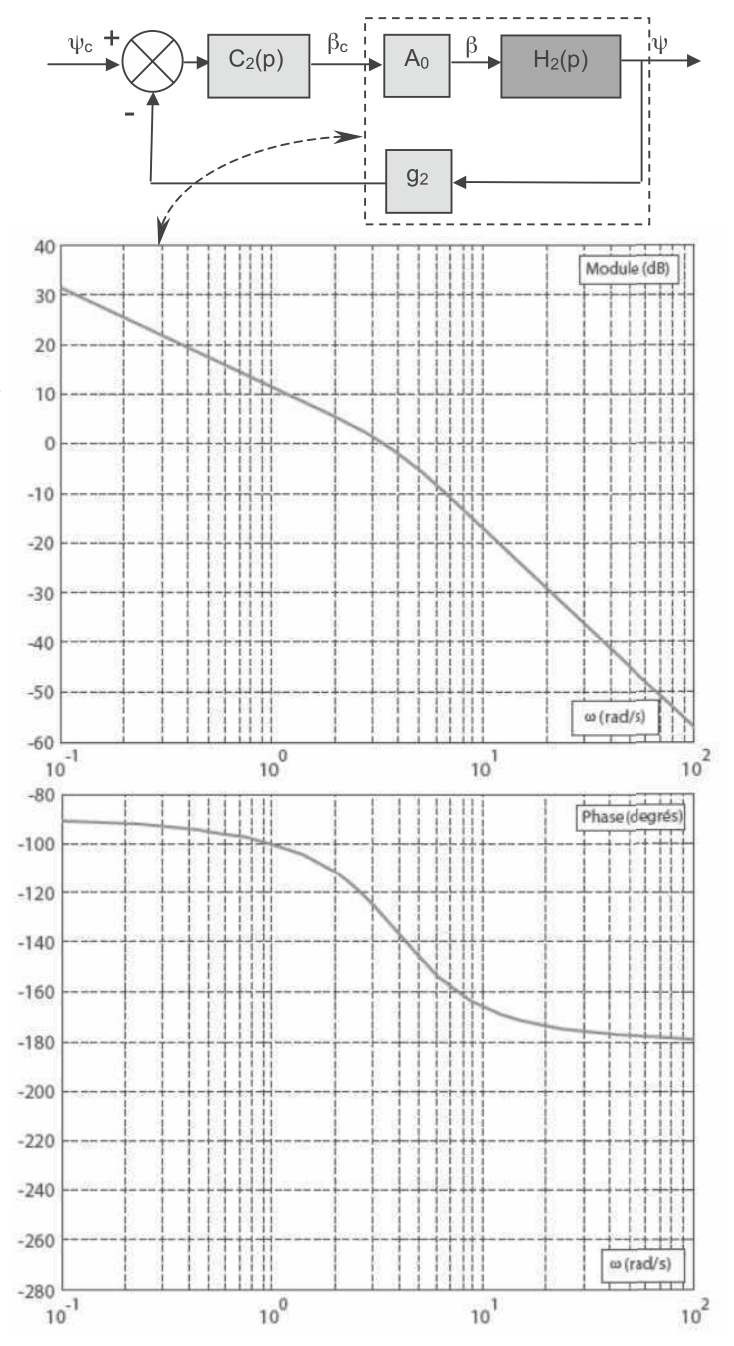
- **rapidité :** pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte $\omega_{c2} \geq 10$ rad/s
- **stabilité :** marge de phase $M_{\varphi 2} \geq 60°$.

L'asservissement de l'écart de cap est défini par le schéma ci-contre, extrait du précédent et avec les notations déjà définies.

La fonction de transfert $H_2(p)$ est définie par la dynamique du véhicule.

Des essais sur le véhicule à automatiser ont permis de caractériser son comportement fréquentiel en tenue de cap (fonction $H_2(p)$) et donc de tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert définie par $B(p) = A_0 H_2(p) g_2$.

Le résultat est donné ci-contre. Il s'agit donc de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement, lorsque le correcteur est un gain unitaire.



<u>Question 1 :</u> insuffisance d'une correction proportionnelle

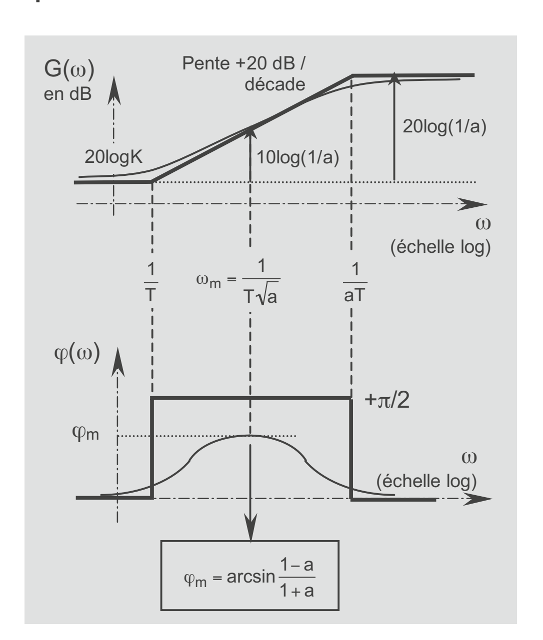
Monter qu'une correction proportionnelle $C_2(p) = K_2$ est insuffisante pour satisfaire le cahier des charges exigé pour cette boucle d'asservissement.

<u>Question 2 :</u> insertion d'un correcteur à avance de phase

La correction sera finalement effectuée au moyen d'un correcteur à avance de phase, de fonction de transfert :

$C_2(p) = K\dfrac{1+Tp}{1+aTp}$ avec a<1.

Ses propriétés sont rappelées sur le diagramme de Bode ci-contre. Elles ont été établies lors de l'exercice II du chapitre 5.



Ce correcteur sera placé par coïncidence de la pulsation centrale ω_m avec la pulsation de coupure ω_{c2} souhaitée pour la FTBO corrigée. Les paramètres a, T et K seront ensuite déterminés afin d'assurer le cahier des charges exigé :

- ω_{c2} = 10 rad/s,
- $M_{\varphi 2} \geq 60°$.

21) Justifier le choix de l'emplacement choisi pour la pulsation ω_m.

22) Donner, en fonction de $\text{Arg}[H_2(j\omega_{c2})]$, l'expression de l'avance maximale de phase φ_m permettant de satisfaire le critère de marge de phase. En déduire φ_m.

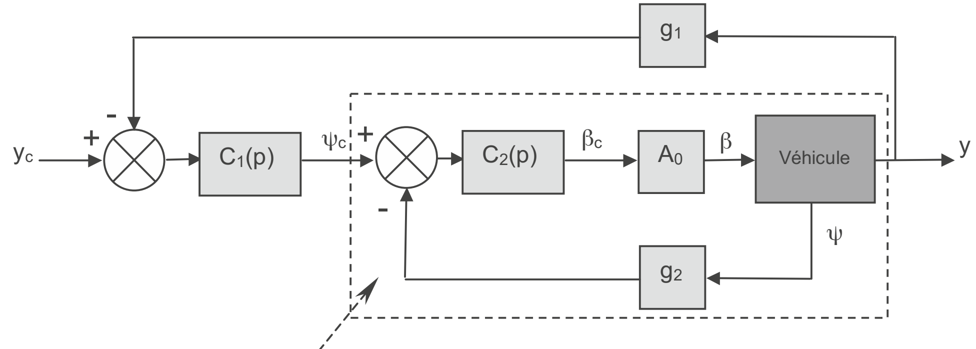
23) Déterminer alors les valeurs des paramètres a et T.

24) Donner, en fonction de A_0, g_2 et $|H_2(j\omega_{c2})|$, la relation que doit vérifier $|C_2(j\omega_{c2})|$ afin d'assurer la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte souhaitée. En déduire K.

25) Donner, pour conclure, la fonction de transfert du correcteur à avance de phase qui permet de satisfaire le cahier des charges.

III-2-2 étude de l'asservissement du déplacement latéral

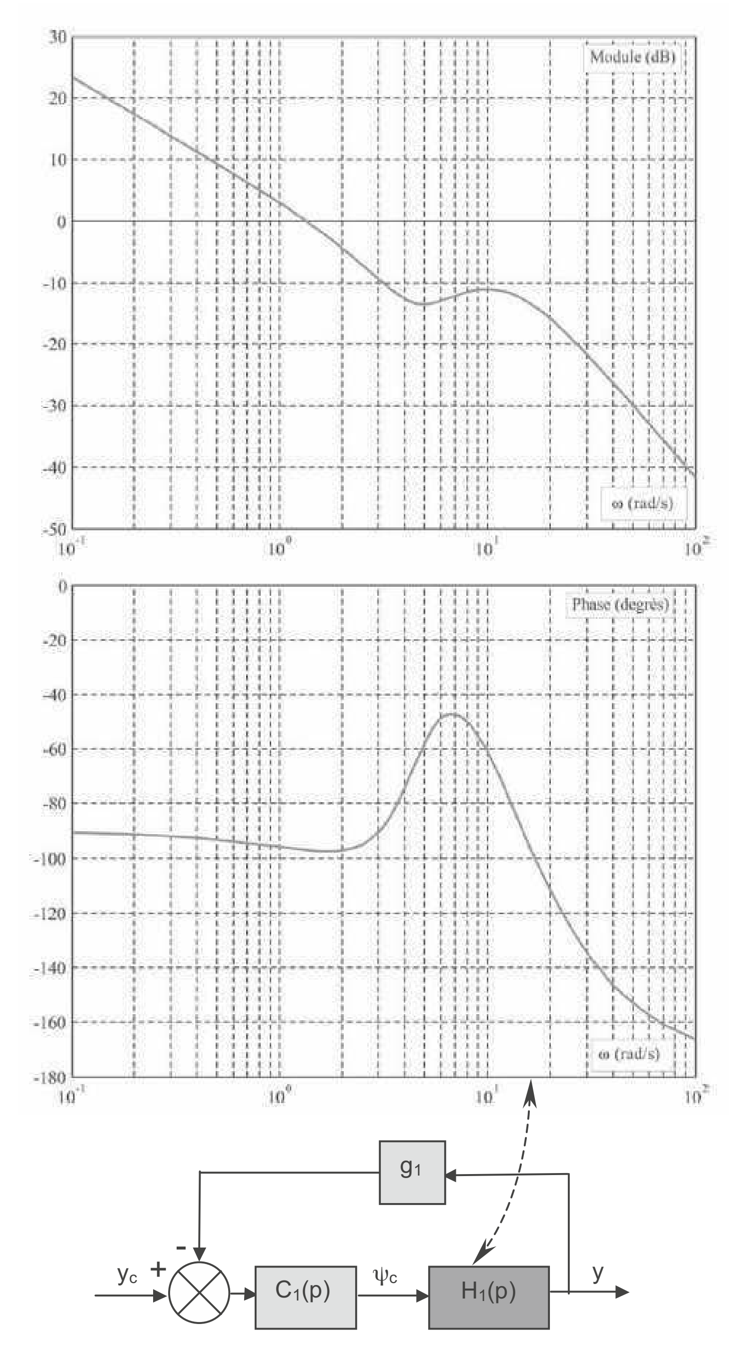
Le schéma bloc de l'asservissement du déplacement latéral peut être maintenant décrit selon :



Dans cette description, la boucle interne de contrôle de l'écart de cap est issue de la conception précédente, elle a pour fonction de transfert :

$$H_1(p) = \frac{Y(p)}{\psi_c(p)}$$

Des essais sur le prototype en cours de conception ont permis de caractériser le comportement fréquentiel de cette boucle et donc de tracer le diagramme de Bode ci-contre de la fonction $H_1(p)$.



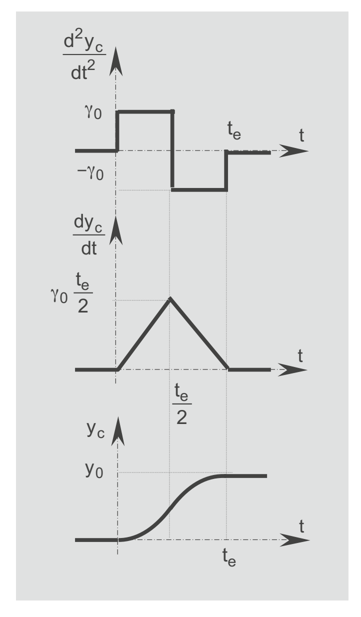
On peut alors décrire l'asservissement du déplacement latéral selon le schéma ci-contre où $H_1(p)$ est connue.

Il reste à déterminer le correcteur, de fonction de transfert $C_1(p)$, afin de respecter le cahier des charges. Celui-ci s'exprime selon les termes suivants :

- **rapidité :** pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte $\omega_{c1} \geq 10$ rad/s
- **stabilité :** marge de phase $M_{\varphi 1} \geq 60°$
- **précision :** écart en régime permanent nul vis-à-vis d'une consigne constante, inférieur à 0,1 m en cours de changement de voie
- **durée d'un changement de voie :** 4 s pour 3 m de déplacement latéral
- **accélération latérale maximale admissible :** 2 m/s^2

Afin de satisfaire les contraintes en termes d'accélération latérale, la consigne de déplacement latéral, lors d'un changement de voie, est construite à partir d'une loi en accélération définie par morceaux selon :

Instants	$t < 0$	$0 \le t < \frac{t_e}{2}$	$\frac{t_e}{2} \le t < t_e$	$t \ge t_e$
accélération latérale $\gamma_c(t) = \frac{d^2y_c}{dt^2}(t)$	0	γ_0	$-\gamma_0$	0




avec :

- t_e = 4 s, temps imposé par le cahier des charges pour un changement de voie,
- y_0 = 3 m, déplacement latéral total correspondant à un changement de voie,
- γ_0 = 2 m/s^2 maxi toléré.



Question 3 : accélération imposée

Calculer l'accélération imposée par la loi cinématique.
Vérifier que cette accélération satisfait le cahier des charges.

Question 4 : insertion d'un correcteur PI

La correction sera effectuée au moyen d'un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert :

$$C_1(p) = K_1 \frac{1+p}{p}$$

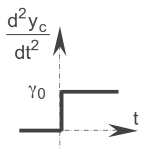
41) À partir de la réponse fréquentielle de $H_1(p)$ donnée précédemment et sachant que les sollicitations seront à des pulsations basses (inférieures à 1 rad/s), proposer un modèle simplifié pour $H_1(p)$.

42) Justifier alors le choix d'un correcteur PI, compte tenu des exigences du cahier des charges en termes de précision.

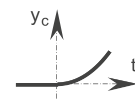
43) Calculer l'écart en régime permanent pour une consigne de position parabolique correspondant à une consigne d'accélération en échelon :

$$y_c(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 \text{ pour } t > 0$$

γ_0 étant l'accélération déterminée à la question 3.



44) En déduire la valeur à conférer au gain K_1 du correcteur, afin de satisfaire l'exigence du cahier des charges en termes de précision, à savoir une erreur maximale de 0,1 m au cours du déplacement.



45) Quelle sera l'erreur statique de position à l'issue du déplacement total ?

Question 5 : rapidité et stabilité de l'asservissement

51) Pour la valeur de K_1 précédemment déterminée, donner le diagramme de Bode asymptotique et l'allure du diagramme réel du correcteur $C_1(p)$.

52) En déduire graphiquement une estimation de la pulsation de coupure en boucle ouverte et de la marge de phase de l'asservissement réalisé, et comparer ces valeurs aux exigences du cahier des charges.

III-3 Correction

III-3-1 étude de l'asservissement de l'angle d'écart de cap

<u>Question 1 :</u> insuffisance d'une correction proportionnelle

On lit sur le diagramme de Bode fourni que la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée présente une pulsation de coupure à 0 dB : $\omega_{c2} \approx \underline{3{,}2 \text{ rad/s}}$.

La marge de phase est alors : $M\varphi_2 \approx \underline{50}°$.

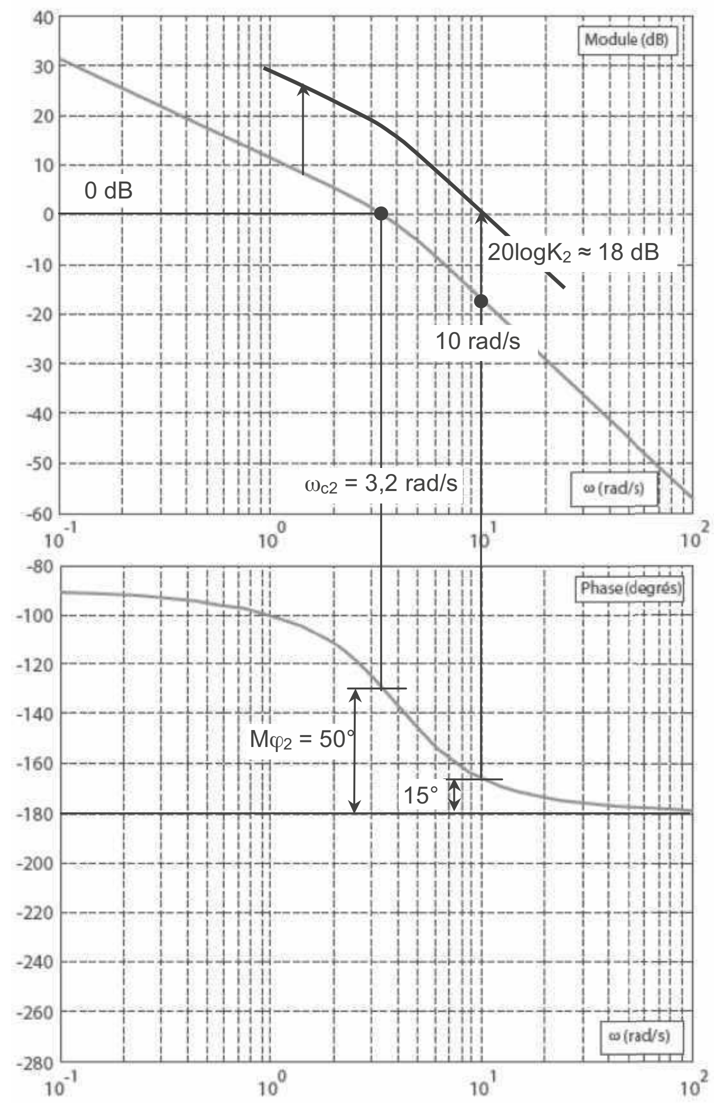
Ces performances sont insuffisantes au regard du cahier des charges.

Une correction proportionnelle de gain K_2 agit par simple translation de la courbe de gain de $20\log K_2$, sans modification de la courbe de phase.

Aussi, si on veut par exemple assurer la pulsation de coupure minimale de 10 rad/s exigée, il convient d'augmenter le gain (translation de la courbe vers le haut de 18 dB environ), ce qui inévitablement engendrera une diminution de la marge de phase, qui ne sera que de 15° environ.

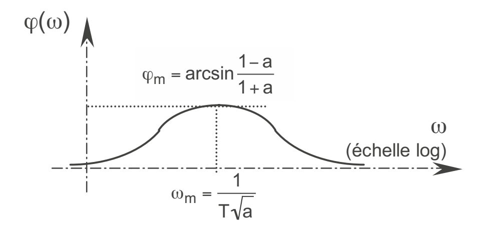
Inversement, bien sûr, si on diminue le gain pour assurer la marge de phase de 60° exigée, la pulsation de coupure sera encore plus faible.

Ces considérations montrent qu'une correction proportionnelle ne permet pas de répondre aux exigences du cahier des charges.



<u>Question 2 :</u> insertion d'un correcteur à avance de phase

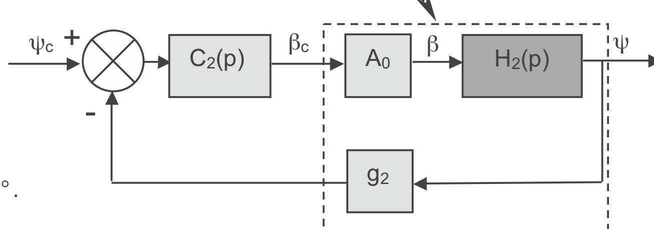
21) On choisit clairement $\omega_m = \omega_{c2}$ pour avoir le maximum de phase autour de la pulsation de coupure minimale souhaitée.



22) À la limite, il faut donc que, pour la pulsation $\omega_m = \omega_{c2}$, la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée soit :
$\text{Arg}[\text{FTBO}(j\omega_m)] = M_{\varphi 2} - 180° = -120°$.

Or $FTBO(j\omega) = C_2(j\omega) \times A_0H_2(j\omega)g_2$

soit : $Arg[FTBO(j\omega)] = Arg[C_2(j\omega)] + Arg[A_0H_2(j\omega)g_2]$



Avec, en $\omega_m = \omega_{c2} =$ 10 rad/s :

- $Arg[C_2(j\omega_m)] = \varphi_m$
- $Arg[A_0H_2(j\omega_m)g_2] = -165°$ (cf. diagramme de Bode)

Il faut donc prendre $\varphi_m - 165° = -120°$.

Soit $\boxed{\varphi_m = 45°}$

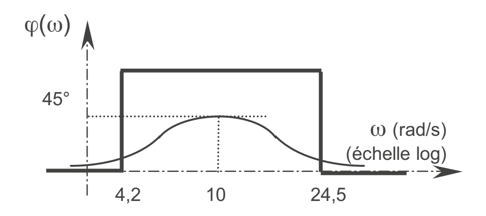
23) Les paramètres a et T sont alors déduits des caractéristiques du correcteur à avance de phase :

$\sin\varphi_m = \dfrac{1-a}{1+a}$ fournit $\dfrac{1-a}{1+a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $\boxed{a = 0,17}$ NB : on vérifie bien que a < 1.

$\omega_m = \dfrac{1}{T\sqrt{a}}$ fournit $T = \dfrac{1}{\omega_m\sqrt{a}}$, et donc avec $\omega_m = \omega_{c2} =$ 10 rad/s et a = 0,17, $\boxed{T = 0,24 \text{ s}}$

Ces grandeurs définissement complètement la courbe de phase nécessaire du correcteur. Ses deux pulsations de cassure sont donc :

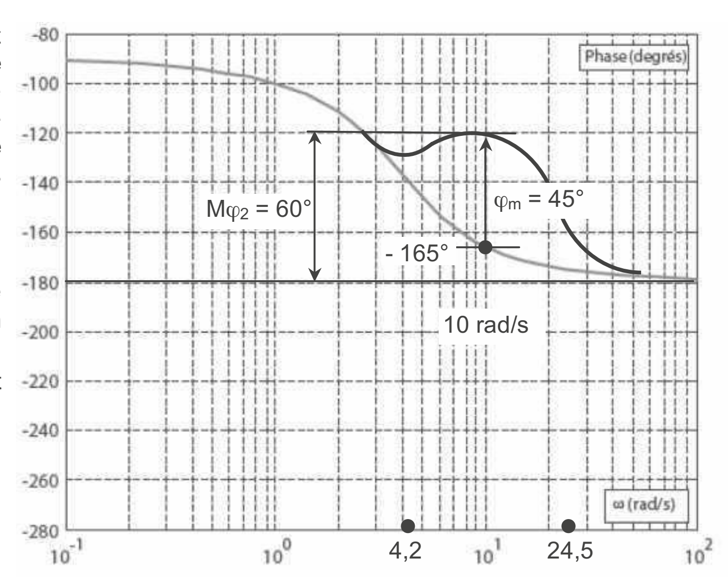
$\dfrac{1}{T} = 4,2$ rad/s et $\dfrac{1}{aT} = 24,5$ rad/s



NB : on peut vérifier, qu'en échelle logarithmique, 10 est bien à la moitié de [4,2 ; 24,5] puisque :

$$\frac{\log 4,2 + \log 24,5}{2} = 1 = \log 10$$

Ce dimensionnement garantit donc que la courbe de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée ait l'allure ci-contre, autour de la pulsation de coupure $\omega_m = \omega_{c2} =$ 10 rad/s attendue.



Il reste, bien entendu, à régler le gain K du correcteur afin que pour $\omega_m = \omega_{c2} =$ 10 rad/s, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte soit effectivement de 0 dB. C'est l'objet de la question suivante.

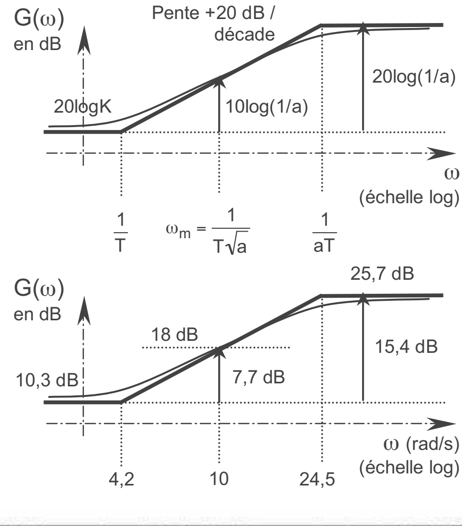
24) Il faut que pour $\omega_m = \omega_{c2} =$ 10 rad/s, $|FTBO(j\omega)| = 1$, soit $20\log|FTBO(j\omega_m)| = 0\,dB$.

Or, $|FTBO(j\omega)| = |C_2(j\omega)| \times |A_0H_2(j\omega)g_2|$

Il faut donc que : $20\log|C_2(j\omega_m)| + 20\log|A_0H_2(j\omega_m)g_2| = 0\,dB$

Avec, en $\omega_m = \omega_{c2} = 10$ rad/s :

- $20\log\left|C_2(j\omega_m)\right| = 20\log K + 10\log\frac{1}{a}$
- $20\log\left|A_0H_2(j\omega_m)g_2\right| = -18\,\text{dB}$ (cf. diagramme de Bode)



D'où la relation à satisfaire :

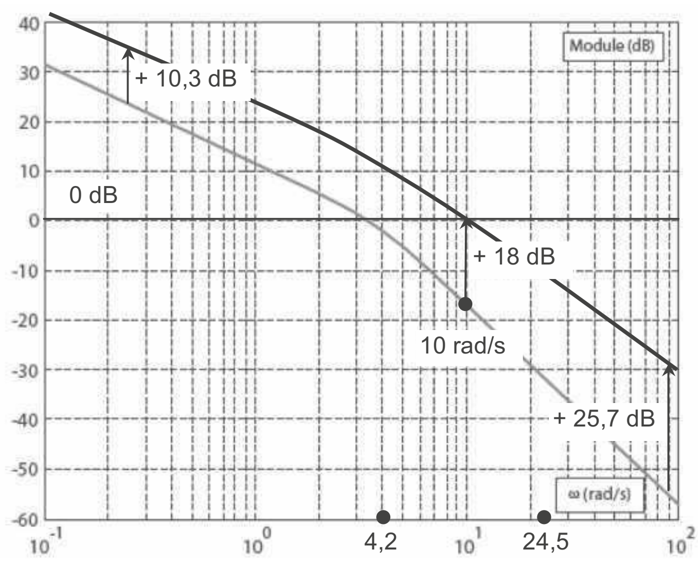
$20\log K + 10\log\frac{1}{a} = 18\,\text{dB}$, ceci avec a = 0,17

soit $20\log K = 18 - 10\log\frac{1}{0{,}17} = 10{,}3\,\text{dB}$

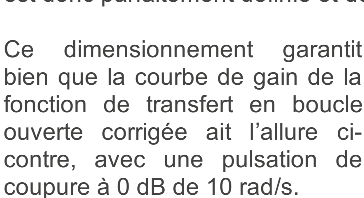
ou encore $\boxed{K = 3{,}3}$

La courbe de gain du correcteur à avance de phase est donc parfaitement définie et donnée ci-contre.

Ce dimensionnement garantit bien que la courbe de gain de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée ait l'allure ci-contre, avec une pulsation de coupure à 0 dB de 10 rad/s.



25) En conclusion, le correcteur retenu aura pour fonction de transfert :



$$C_2(p) = 3{,}3\,\frac{1+\frac{p}{4{,}2}}{1+\frac{p}{24{,}5}}$$

III-3-2 étude de l'asservissement du déplacement latéral

<u>Question 3 :</u> accélération imposée

La loi cinématique de la commande, impose en phase d'accélération $y = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2$.

Or à la fin de la phase d'accélération et donc à mi-course : $y = \frac{y_0}{2}$ et $t = \frac{t_e}{2}$.

Soit $\frac{y_0}{2} = \frac{1}{2}\gamma_0\left(\frac{t_e}{2}\right)^2$ et donc : $\gamma_0 = \frac{4y_0}{t_e^2}$

Avec $y_0 = 3$ m et $t_e = 4$ s, cela impose $\boxed{\gamma_0 = 0{,}75\ \text{m/s}^2}$

La commande se fera donc selon une accélération, puis une décélération, constantes de 0,75 m/s^2. Sous réserve d'une précision suffisante de l'asservissement (à assurer, voir question 4), cette commande assurera donc une accélération latérale du véhicule largement inférieure aux 2 m/s^2 que le cahier des charges demande de ne pas dépasser.

<u>Question 4 :</u> insertion d'un correcteur PI

41) Pour les basses pulsations, le comportement du système est celui d'un intégrateur :

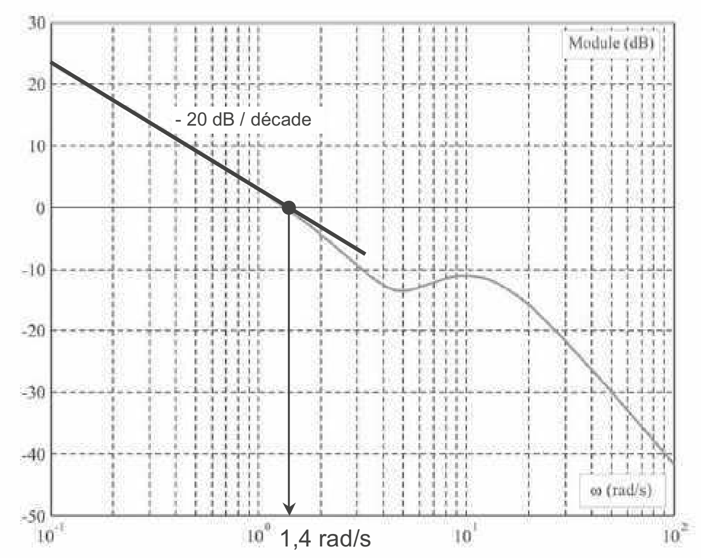
- courbe de gain de pente - 20 dB/décade,
- phase sensiblement constante à - 90°.

On peut donc proposer une fonction de transfert de la forme :

$$H_1(p) \approx \frac{K_1}{p}$$

Par ailleurs, le gain s'annule (0 dB) pour une pulsation de l'ordre de 1,4 rad/s.

On prendra donc $\boxed{H_1(p) \approx \frac{1{,}4}{p}}$



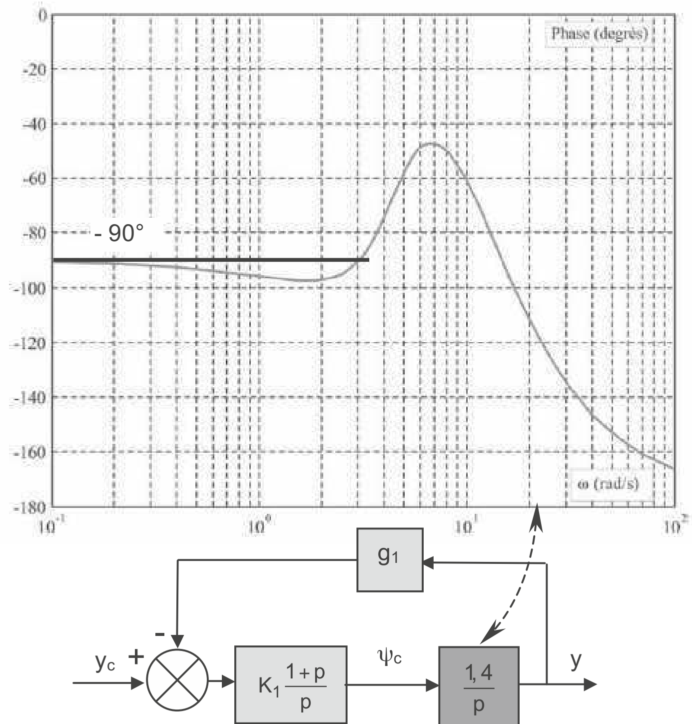
42) Choix d'un correcteur PI ?

La modélisation précédente met en évidence la classe 1 de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $g_1H_1(p)$ de l'asservissement.

Ceci assure d'ores et déjà un écart statique nul pour une consigne constante, ce qui satisfait une des exigences de précision du cahier des charges.

Une correction PI introduit une intégration supplémentaire. La FTBO sera donc de classe 2, ce qui assure :

- un écart statique nul également pour une entrée en rampe,
- un écart statique fini (et inversement proportionnel au gain de la boucle), pour une entrée parabolique.



Or, lors d'un changement de voie, la consigne de déplacement se fait selon une parabole (accélération constante). Le correcteur PI va donc permettre de maîtriser l'erreur de 0,1 m maxi exigée par le cahier des charges pour le changement de voie, par réglage de son gain K_1.

43) L'écart s'écrit : $\varepsilon_1(p) = \frac{Y_c(p)}{1 + FTBO(p)}$

Avec : $Y_c(p) = \frac{\gamma_0}{p^3}$, transformée de Laplace de $y_c(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2$ (double intégration d'une constante).

Fiche ressource "table des transformées de Laplace"

Et : $\text{FTBO}(p) = g_1K_1\dfrac{1+p}{p}\dfrac{1,4}{p} = \dfrac{1,4g_1K_1(1+p)}{p^2}$

D'où : $\varepsilon_1(p) = \dfrac{\dfrac{\gamma_0}{p^3}}{1+\dfrac{1,4g_1K_1(1+p)}{p^2}} = \dfrac{\gamma_0}{p[p^2+1,4g_1K_1(1+p)]}$

Ainsi, sous réserve de stabilité (vérifiée plus loin), l'écart limite s'écrit, d'après le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_{1s} = \lim_{p\to 0} p\varepsilon_1(p) = \lim_{p\to 0} \frac{\gamma_0}{[p^2+1,4g_1K_1(1+p)]} = \frac{\gamma_0}{1,4g_1K_1}$$

NB : ce résultat, inversement proportionnel au gain de la boucle, était prévisible (annoncé plus haut en réponse à la question 42) par extrapolation du tableau donné au chapitre 3, paragraphe VII-3.

Ceci avec :
γ_0 = 0,75 m/s^2 accélération de commande issue de la cinématique du déplacement souhaité
g_1 = 1 V/m

Le cahier des charges impose une erreur maximale de 0,1 m, soit un écart maximal de 0,1 V (puisque g_1 = 1 V/m).

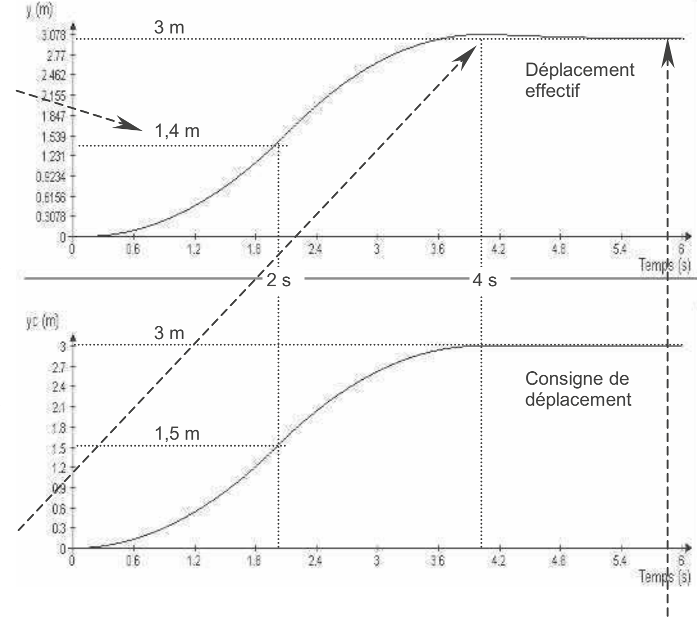
Ainsi, il faut choisir au minimum $K_1 = \dfrac{\gamma_0}{1,4g_1\varepsilon_{1s}} = \dfrac{0,75}{1,4x1x0,1} = 5,4$.

K_1 = 5,4

On retiendra cette valeur minimale, sous réserve de vérification ultérieure du critère de rapidité et, bien entendu, à condition que les marges de stabilité soient respectées (cf. question 5).

44) À l'issue du déplacement, l'erreur statique de position sera nulle, compte tenu de la classe supérieure à zéro de la fonction de transfert en boucle ouverte. Le véhicule se sera bien déplacé latéralement de 3 m, comme commandé.

■ Une simulation logicielle permet de visualiser le comportement :



On constate qu'à l'instant de commutation de l'accélération (mi parcours de la consigne), le véhicule n'a effectué que 1,4 m et non les 1,5 m alors demandés. Ceci respecte l'écart maximal de 0,1 m lors du déplacement, toléré par le cahier des charges.

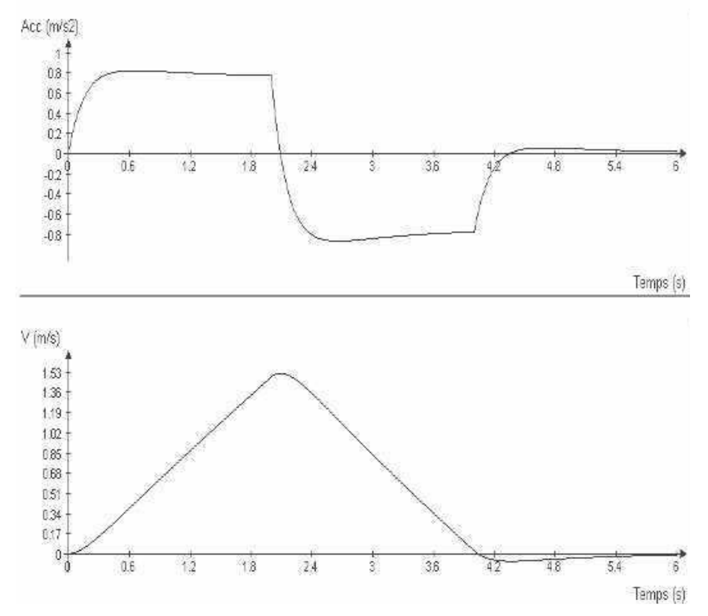
NB : La durée de 2 s est donc suffisamment importante pour que le régime permanent, en réponse à la consigne d'accélération constante, puisse être considéré comme atteint, puisque 0,1 m correspond à l'erreur permanente (cf. question 43).

On observe ensuite un déplacement présentant un léger dépassement, maximal et égal à 7,8 cm lorsque cesse la décélération de la consigne.
Le déplacement tend alors vers la valeur de consigne de 3 m.

Le cahier des charges ne formulant pas de contrainte en termes de dépassement, on peut juger celui-ci, faible (7,8 cm sur 3 m) et donc acceptable.

Cette même simulation logicielle permet également de tracer l'évolution temporelle de l'accélération et de la vitesse latérales du véhicule, lors du changement de voie. Cf. ci-contre.

On y vérifie en particulier que l'accélération n'atteint jamais (en valeur absolue) les 2 m/s² que le cahier des charges demande de ne pas dépasser, comme pressenti à la question 3.

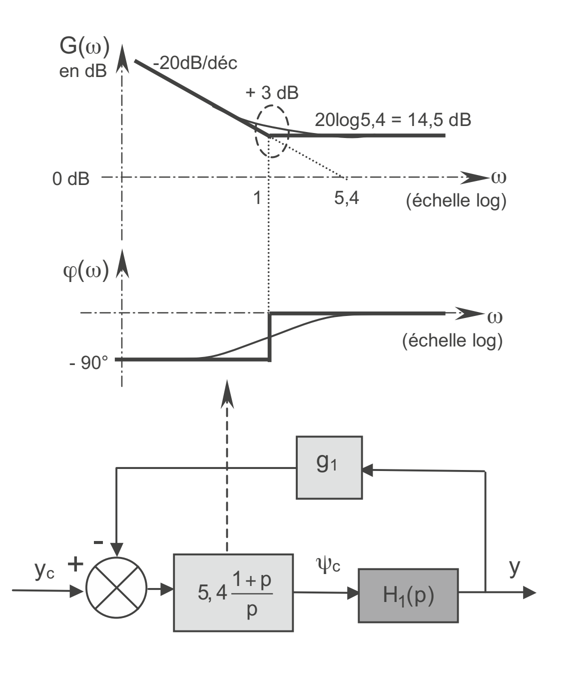


<u>Question 5 :</u> rapidité et stabilité de l'asservissement

51) Le correcteur retenu a donc pour fonction de transfert :

$$C_1(p) = 5,4\,\frac{1+p}{p}$$

Sans difficulté particulière, son diagramme de Bode asymptotique est donné ci-contre, auquel on peut superposer l'allure, très approchée en ce qui concerne la courbe de phase, de son diagramme réel.



52) Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée s'obtient alors par addition du diagramme du correcteur (ci-dessus) et du diagramme de la fonction de transfert non corrigée.

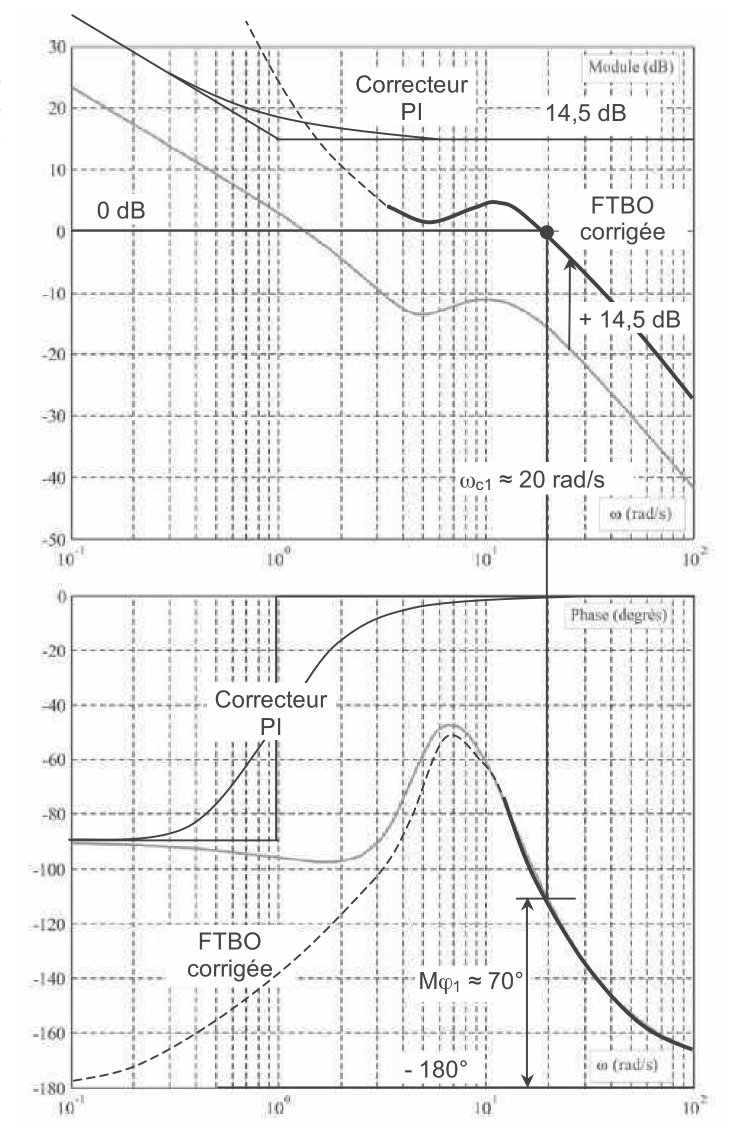
Or, la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée s'écrit $g_1H_1(p)$, dont le diagramme de Bode n'est autre que le diagramme de $H_1(p)$ fourni, puisque le gain g_1 est de 1 V/m.

Un tracé restreint à la zone de pulsation concernée suffit. Il est donné page suivante.

Dans les hautes pulsations, suffisamment supérieures à la pulsation de cassure du correcteur de 1 rad/s, le correcteur augmente le gain de 14,5 dB. Ceci permet de voir que la nouvelle pulsation de coupure va se trouver aux environs de 20 rad/s, suffisamment grande en effet devant 1 rad/s pour qu'on puisse considérer que le correcteur agit sur la courbe de gain par simple translation verticale.

Par ailleurs, et de manière duale, pour une pulsation de l'ordre de 20 rad/s, le correcteur, qui agit donc comme un correcteur proportionnel, n'apporte pas de déphasage. On lit ainsi immédiatement la marge de phase.

Seul le tracé en trait continu de la FTBO corrigée, correspondant au domaine de pulsation où le correcteur se comporte comme un correcteur proportionnel, est utile. Toutefois, pour information, le tracé est poursuivi approximativement (en pointillé) dans la zone proche ou inférieure à la cassure du correcteur.



On relève donc :

- une pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte de l'ordre de 20 rad/s
- une marge de phase de l'ordre de 70°.

Malgré les relatives imprécisions du tracé, on peut affirmer que ces performances sont supérieures à celles exigées par le cahier des charges, qui sont respectivement de 10 rad/s et 60°.

Le système sera donc convenablement rapide et stable, ce qu'avait laissé entrevoir la simulation numérique effectuée précédemment, puisque la réponse est très faiblement oscillante, ne présentant qu'un très léger dépassement.

OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE



L'objectif de cette fiche n'est pas de développer un cours d'analyse fonctionnelle, mais uniquement de définir les principaux outils graphiques que celle-ci utilise :

- le graphe des interacteurs,
- le diagramme FAST
- le diagramme SADT ou IDEF0.

Cette liste est loin d'être exhaustive. De nombreux autres outils existent et ils sont en constante évolution. Ils permettent de définir rigoureusement le besoin que doit satisfaire le système (analyse dite externe) ainsi que les différentes fonctions qu'il doit réaliser dans ce but (analyse dite interne).

I - ANALYSE FONCTIONNELLE EXTERNE

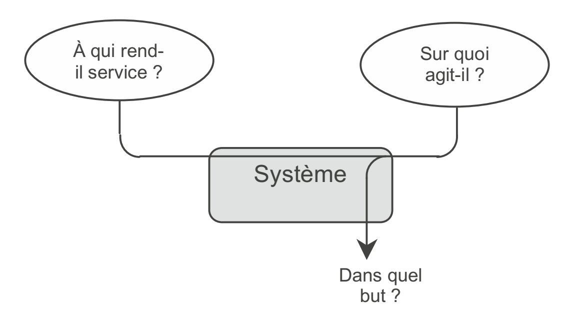
Ces outils sont inspirés de la méthode APTE (APplication aux Techniques d'Entreprise).

I-1 Expression du besoin

L'expression du besoin nécessite de répondre à trois questions :

- à qui rend service le système ?
- sur quoi agit-il ?
- dans quel but ?

Cette expression est usuellement synthétisée selon le graphe ci-contre.



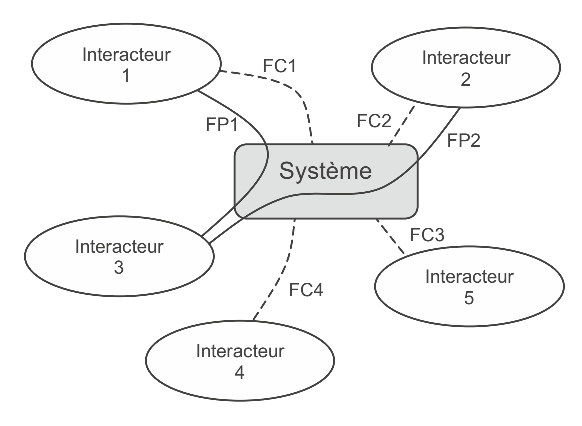
I-2 Graphe des interacteurs

Le graphe des interacteurs vient compléter l'analyse du besoin en :

- faisant l'inventaire des éléments du milieu environnant avec lesquels agit le système, appelés interacteurs ;
- identifiant les différentes fonctions que doit réaliser le système vis-à-vis de ces interacteurs, appelées fonctions de service (FS).

On distingue usuellement deux types de fonctions :

- les fonctions principales (FP) qui permettent à plusieurs interacteurs d'interagir par l'intermédiaire du système,
- les fonctions contraintes (FC) que doit réaliser le système afin de s'adapter à son environnement. Elles sont aussi appelées fonctions secondaires, ou encore fonctions d'adaptation.



Ces différentes fonctions de services sont alors répertoriées dans le cahier des charges fonctionnel, où elles sont caractérisées en termes de critères quantifiables. Ces critères permettent de valider la réalisation des différentes fonctions.

NB : Si le système possède plusieurs phases d'utilisation, il convient de réaliser autant de graphes que de phases.

II - ANALYSE FONCTIONNELLE INTERNE

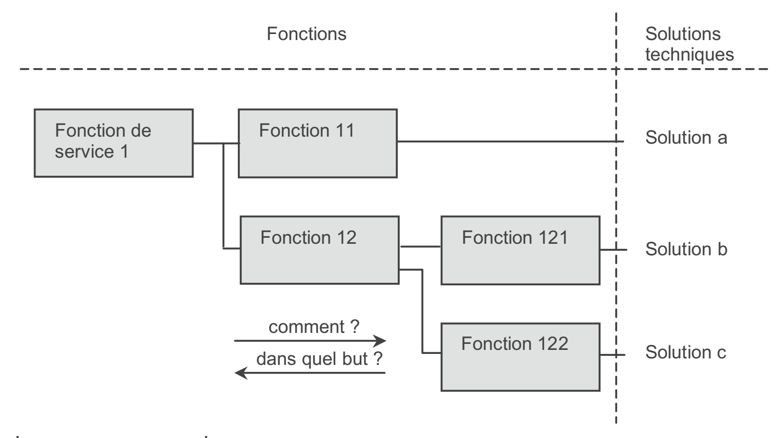
II-1 Le diagramme FAST

Le diagramme FAST (Function Analysis System Technic) permet une analyse arborescente, détaillant de manière hiérarchique les différentes fonctions de service (fonctions principales et contraintes) en fonctions techniques résultant de choix de conception.

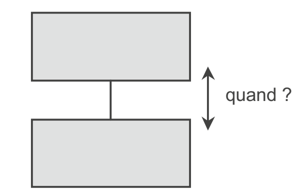
L'arborescence est construite horizontalement, de gauche à droite, de la fonction de service à développer, jusqu'aux fonctions les plus élémentaires, afin d'aboutir, en fin d'arborescence, aux différentes solutions techniques retenues (objets techniques au regard du système).

La lecture se fait :
- de gauche à droite en répondant à la question « comment ? »,
- de droite à gauche en répondant à la question « dans quel but ? ».

La structure de l'arborescence permet de définir des liens par des « ou » ou bien des « et ». Le niveau de détail dépend bien entendu du contexte.



Ainsi, on lit ci-dessus par exemple que :
- la fonction 1 est réalisée en réalisant les fonctions 11 et 12,
- les fonctions 11 et 12 sont réalisées dans le but de réaliser la fonction 1,
- la fonction 12 est réalisée en réalisant la fonction 121 ou la fonction 122,
- la solution a est retenue pour réaliser la fonction 11,
- etc.



Remarque 1 : Dans certaines situations très particulières, une simultanéité n'entrant pas dans la logique précédente, peut être indiquée en répondant à la question « quand ? » par un lien vertical. Pour autant, les aspects temporels ne sont pas, a priori, l'objectif des représentations fonctionnelles.

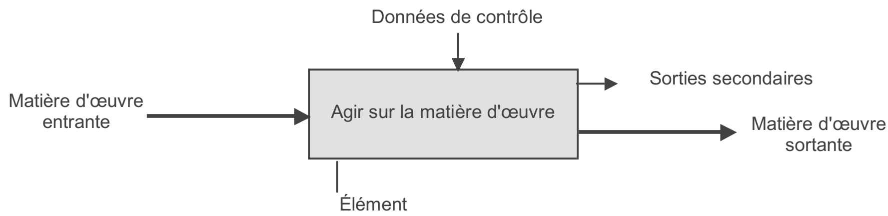
Remarque 2 : Une même solution technique peut apparaître plusieurs fois à la droite du diagramme, exprimant ainsi qu'elle réalise plusieurs fonctions.

II-2 Le diagramme SADT

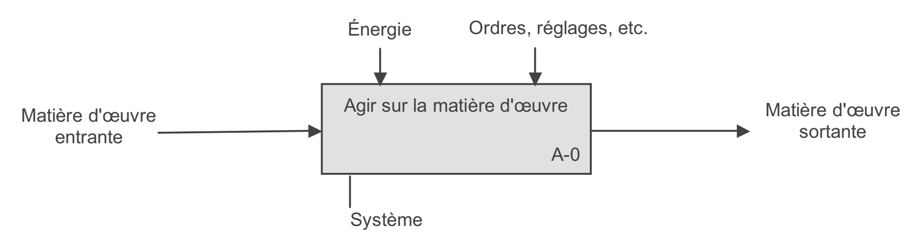
Le diagramme SADT (Structured Analysis and Design Technic) permet une analyse descendante, par niveaux, en suivant les flux de grandeurs au sein du système. Ainsi et comme son nom l'indique, ce diagramme n'est pas strictement fonctionnel mais introduit des éléments structuraux.

Ce diagramme est aussi appelé IDEF0 (Integration DEfinition for Function modeling - zero).

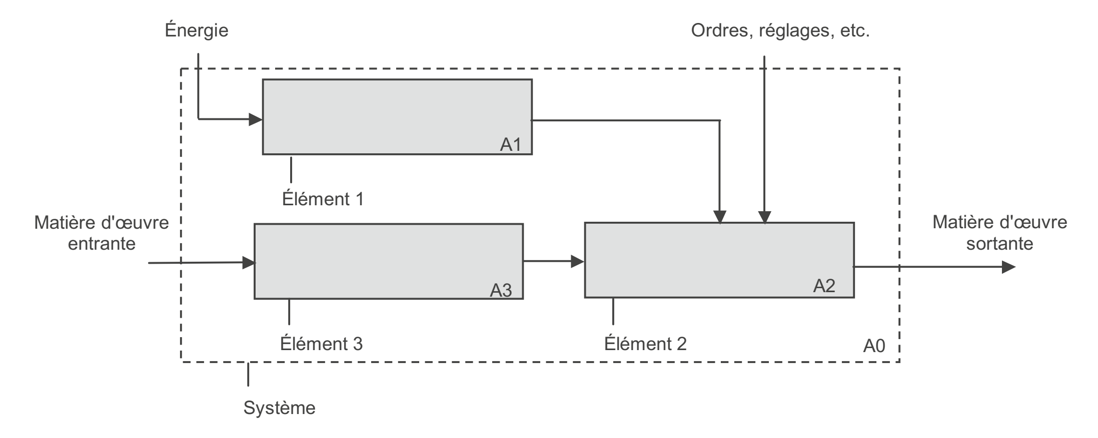
L'élément de base est appelé bloc fonctionnel. Il s'agit d'un rectangle à l'intérieur duquel est inscrite la fonction réalisée. Le nom de l'élément qui réalise la fonction est indiqué au dessous. Des flèches, entrantes (à gauche) et sortantes (à droite) indiquent alors la matière d'œuvre entrante et sortante de l'élément. On entend par matière d'œuvre toute grandeur modifiée par l'élément. Des flèches entrantes par le dessus figurent les données de contrôle. Celles-ci se décomposent usuellement en l'énergie nécessaire, les ordres, les contraintes et réglages divers. D'autres flèches sortantes peuvent indiquer des sorties secondaires, aussi diverses que des informations ou des déchets.



L'élément le plus global, qui caractérise le système entier, est numéroté A-0 (lire « A moins zéro »). La numérotation est indiquée en bas à droite du bloc. À ce niveau d'analyse, on ne précise pas comment est réalisée la fonction. Soit par exemple :

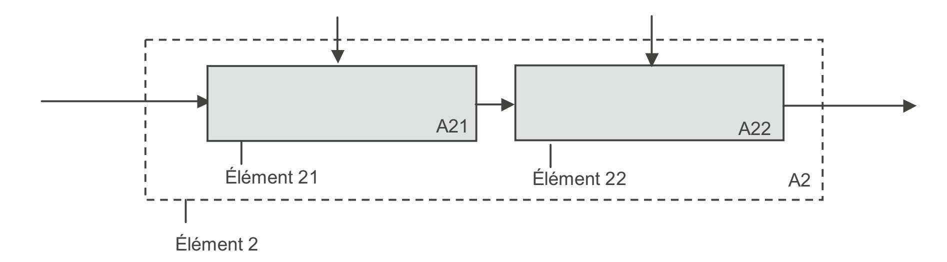


Un second niveau d'analyse numéroté A0 (lire « A zéro ») permet de décomposer cette fonction en un certain nombre de fonctions jugées secondaires. Ces fonctions sont numérotées A1, A2, etc. :



Remarque : Il n'y a pas équivalence entre fonction et élément. Un même élément pouvant en particulier apparaître plusieurs fois, réalisant des fonctions différentes.

La description peut alors être poursuivie de manière descendante, en décomposant successivement les blocs Ai selon la même logique, par exemple ci-dessous le bloc A2, qui se décompose en A21, A22, etc.



Et ainsi de suite…

La règle de syntaxe à respecter est que toutes les entrées et sorties d'un bloc fonctionnel doivent se retrouver aux différents niveaux :

Énergie
Ordres, réglages, etc.
Matière d'œuvre entrante
Matière d'œuvre sortante
A-0
Système
Énergie
Ordres, réglages, etc.
flux 1
A1
Élément 1
Matière d'œuvre entrante
flux 2
Matière d'œuvre sortante
A3
A2
Élément 3
Élément 2
A0
Système
flux 1
Ordres, réglages, etc.
flux 2
Matière d'œuvre sortante
A21
A22
Élément 21
Élément 22
A2
Élément 2

Remarque : une donnée de contrôle d'un certain niveau peut être matière d'œuvre dans un autre niveau, et inversement. Par exemple ci-dessus, l'énergie, donnée de contrôle au niveau global, est la matière d'œuvre entrante de l'élément 1. Celui-ci est alors un transformateur d'énergie, comme par exemple un moteur électrique, qui transforme de l'énergie électrique en énergie mécanique.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS



I - ÉQUATION HOMOGÈNE

I-1 Définition

Une équation différentielle linéaire ***homogène*** à coefficients constants de la fonction x est une équation de la forme :

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t) + \dots + a_1 \frac{dx}{dt}(t) + a_0 x(t) = 0$$

où les a_i sont des constantes, certaines pouvant être nulles, sauf a_n. Cette dernière restriction définit le nombre n qui est l'***ordre*** de l'équation différentielle.

La solution x(t) de cette équation est unique s'il lui est associé ***n conditions initiales*** donnant les valeurs de :

$$\begin{cases} x(0) \\ \dfrac{dx}{dt}(0) \\ \dots \\ \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(0) \end{cases}$$

I-2 Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle homogène précédente est le polynôme de degré n :

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

Ce polynôme possède n racines r_i (réelles ou complexes, simples ou multiples), permettant de l'écrire sous la forme :

$$P(r) = k(r - r_1)(r - r_2)\dots(r - r_n)$$

S'il existe des racines r_i multiples d'ordre m, les monômes $(r - r_i)$ correspondant se trouvent répétés m fois dans cette écriture.

I-3 Solution

La solution x(t) de l'équation est la superposition de la contribution $c_i(t)$ de chacune des racines r_i du polynôme caractéristique :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)$$

La contribution de chaque racine dépend de sa nature : réelle ou complexe, simple ou multiple.

I-3-1 Cas des racines réelles

- Si r_i est une racine réelle simple, sa contribution est de la forme : $c_i(t) = A_i e^{r_i t}$
- Si r_i est une racine réelle double, sa contribution est de la forme : $c_i(t) = A_{i0} e^{r_i t} + A_{i1} t e^{r_i t}$
- Si r_i est une racine réelle triple, sa contribution est de la forme : $c_i(t) = A_{i0} e^{r_i t} + A_{i1} t e^{r_i t} + A_{i2} t^2 e^{r_i t}$

Etc.

Ainsi, d'une manière générale, une racine réelle r_i contribue à la solution en apportant un terme de la forme :

$$c_i(t) = q_i(t)\, e^{r_i t}$$

où $q_i(t)$ est un polynôme en t d'ordre m-1, si m est le degré de multiplicité de r_i.

Par ailleurs, les différentes constantes sont déterminées par les conditions initiales.

I-3-2 Cas des racines complexes

Les résultats précédents sont vrais également si r_i est une racine complexe. Mais dans ce cas, il est intéressant de noter que si r_i est une racine complexe, son conjugué l'est aussi, ce qui permet de regrouper systématiquement les racines complexes deux à deux.

Ainsi, si $r_i = \sigma_i + j\omega_i$ est racine, $\bar{r}_i = \sigma_i - j\omega_i$ l'est également (rappel de notation : $j^2 = -1$).

Alors, la contribution conjointe de ces deux racines complexes s'écrit :

$$A_i\, e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} + B_i e^{(\sigma_i - j\omega_i)t} = e^{\sigma_i t}[A_i e^{j\omega_i t} + B_i e^{-j\omega_i t}]$$

Or, on sait que $A_i\, e^{j\omega_i t} + B_i e^{-j\omega_i t} = C_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ où C_i et φ_i sont des constantes fonctions de A_i et B_i.

La contribution d'un couple de racines complexes conjuguées sera donc de la forme :
$C_i\, e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

Ainsi, d'une manière générale et s'il y a multiplicité, un couple de racines complexes conjuguées $r_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ contribue à la solution en apportant un terme de la forme :

$$c_i(t) = q_i(t)\, e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

où $q_i(t)$ est un polynôme en t d'ordre m-1, si m est le degré de multiplicité de r_i. Les différentes constantes de ce polynôme et les φ_i sont déterminées par les conditions initiales.

I-4 Exemple

Soit l'équation différentielle homogène d'ordre six :

$$\frac{d^6x}{dt^6}(t) - \frac{d^5x}{dt^5}(t) - 5\frac{d^4x}{dt^4}(t) - 15\frac{d^3x}{dt^3}(t) - 40\frac{d^2x}{dt^2}(t) - 44\frac{dx}{dt}(t) - 16x(t) = 0$$

Elle a pour polynôme caractéristique :

$$P(r) = r^6 - r^5 - 5r^4 - 15r^3 - 40r^2 - 44r - 16 = (r+1)^3(r-4)(r^2+4)$$

dont les racines sont :

- -1 : racine réelle triple dont la contribution à la solution est de la forme : $(A + Bt + Ct^2)e^{-t}$
- 4 : racine réelle simple dont la contribution à la solution est de la forme : De^{4t}
- ±2j : couple de racines complexes (cas particulier ici de racines imaginaires pures) conjuguées simples, dont la contribution à la solution est de la forme : $Ee^{ot}\cos(2t + \varphi) = E\cos(2t + \varphi)$

La solution de l'équation différentielle sera donc de la forme :

$$x(t) = (A + Bt + Ct^2)e^{-t} + De^{4t} + E\cos(2t + \varphi)$$

les 6 constantes A, B, C, D, E et φ étant déterminées par six conditions initiales.

II - ÉQUATION NON HOMOGÈNE

II-1 Définition

Une équation différentielle linéaire ***non homogène*** à coefficients constants de la fonction x est une équation de la forme :

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t) + ... + a_1 \frac{dx}{dt}(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

où le premier membre de l'égalité est donc une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants et le second membre une fonction quelconque de t.

Comme pour l'équation homogène, la solution x(t) de cette équation non homogène est unique s'il lui est associé ***n conditions initiales*** donnant les valeurs de :

$$\begin{cases} x(0) \\ \frac{dx}{dt}(0) \\ ... \\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(0) \end{cases}$$

II-2 Solution

La solution générale de l'équation non homogène est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée, augmentée d'une solution particulière de l'équation non homogène. Les constantes sont ensuite déterminées par les conditions initiales, qui concernent bien entendu la solution totale.

La solution générale de l'équation homogène associée est couramment appelée solution de l'équation ***sans second membre*** et la solution particulière de l'équation non homogène est alors appelée solution particulière de l'équation ***avec second membre***.

Lorsque le second membre f(t) est suffisamment simple, par exemple une constante ou une fonction linéaire de t, la solution particulière peut être immédiatement déterminée. Sinon, il faut faire appel à diverses méthodes définies par le cours de mathématiques (méthode dite de « variation des constantes » en particulier).

II-3 Exemple

Soit l'équation différentielle non homogène d'ordre six :

$$\frac{d^6x}{dt^6}(t) - \frac{d^5x}{dt^5}(t) - 5\frac{d^4x}{dt^4}(t) - 15\frac{d^3x}{dt^3}(t) - 40\frac{d^2x}{dt^2}(t) - 44\frac{dx}{dt}(t) - 16x(t) = 4 - 16t$$

La solution générale de l'équation homogène associée (ou équation sans second membre) est de la forme : $x_h(t) = (A + Bt + Ct^2)e^{-t} + De^{4t} + E\cos(2t + \varphi)$.

Une solution particulière de l'équation non homogène est ici : $x_p(t) = t - 3$.

En effet, $\frac{dx_p}{dt}(1) = 1$ et les dérivées d'ordre supérieur sont nulles et on vérifie bien que :

$$-44\frac{dx_p}{dt}(t) - 16x_p(t) = -44 - 16(t - 3) = -44 - 16t + 48 = 4 - 16t$$

La solution générale de l'équation différentielle non homogène sera donc de la forme :

$$x(t) = (A + Bt + Ct^2)e^{-t} + De^{4t} + E\cos(2t + \varphi) + t - 3$$

les 6 constantes A, B, C, D, E et φ étant déterminées par six conditions initiales.

TABLE DES TRANSFORMÉES DE LAPLACE



f(t) causale	F(p)
Impulsion de poids a	a
a	$\frac{a}{p}$
at	$\frac{a}{p^2}$
$a\,t^n$	$a\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$

f(t) causale	F(p)
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$t + \frac{1}{a}e^{-at} - \frac{1}{a}$	$\frac{a}{p^2(p+a)}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$1 - e^{-at} - ate^{-at}$	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$

f(t) causale	F(p)
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
NB : De nombreuses transformées de ce tableau se déduisent les unes des autres par simple intégration ou dérivation.	

DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE EN ÉLÉMENTS SIMPLES



L'exposé est ici restreint à la décomposition sur les nombres réels.

I - SITUATION ET OBJECTIF

I-1 Pôles d'une fraction rationnelle

On s'intéresse à la fraction rationnelle H(p) = N(p)/D(p) où :

- N(p) et D(p) sont des polynômes de la variable complexe p, premiers entre eux, c'est-à-dire que la fraction est simplifiée au maximum ;
- le degré de D(p), noté n et appelé ordre de la fraction rationnelle, est supérieur à celui de N(p).

Il s'agit de la situation rencontrée lors de la résolution d'une équation différentielle à l'aide de la transformée de Laplace lorsque l'on procède à recherche de la transformée inverse de la solution.

La recherche des n racines de D(p), appelées pôles, permet d'écrire la fraction sous la forme :

$$H(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2)...(p - p_n)}$$

où les pôles p_i peuvent être :

- soit réels (éventuellement nuls), soit complexes (éventuellement imaginaires purs),
- soit simples, soit multiples, certains monômes $(p - p_1)$ pouvant être identiques.

Dans le cas des pôles complexes, on sait que si un nombre est racine d'un polynôme, son conjugué l'est aussi. Alors, leurs contributions peuvent être regroupées deux à deux sous la forme d'un terme du second ordre, dont les deux racines sont ces deux nombres complexes conjugués. Ainsi la forme générale peut être détaillée de la manière suivante :

$$H(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_j)^r...(p^2 + b_1 p + c_1)(p^2 + b_k p + c_k)^s...}$$

traduction d'un pôle réel simple — traduction d'un pôle réel multiple d'ordre r — traduction d'un couple de pôles complexes simples — traduction d'un couple de pôles complexes multiples d'ordre s

Exemple : $H(p) = \frac{p^2 + 1}{(p - 1)(p - 3)(p - 3)(p - j\sqrt{2})(p + j\sqrt{2})} = \frac{p^2 + 1}{(p - 1)(p - 3)^2(p^2 + 2)}$

possède :

- un pôle réel simple : 1
- un pôle réel double (pôle multiple d'ordre 2) : 3
- deux pôles complexes (ici imaginaires purs) conjugués, simples : $\pm j\sqrt{2}$

I-2 Objectif de la décomposition

L'objectif de la décomposition en éléments simples est d'écrire la fraction rationnelle H(p) sous la forme d'une somme de fractions élémentaires, ayant pour dénominateurs des puissances des polynômes apparaissant en produit dans l'écriture précédente.

II - MÉTHODE

II-1 Décomposition

- les pôles réels conduisent à des termes de la forme :
  $\frac{A_i}{p-p_i}$ pour un pôle simple,
  $\frac{A_{i1}}{p-p_i}+\frac{A_{i2}}{(p-p_i)^2}+...+\frac{A_{ir}}{(p-p_i)^r}$ pour un pôle multiple d'ordre r ;
- les pôles complexes conduisent à des termes de la forme :
  $\frac{A_i p+B_i}{p^2+b_i p+c_i}$ pour un couple de pôles simples conjugués,
  $\frac{A_{i1}p+B_{i1}}{p^2+b_i p+c_i}+\frac{A_{i2}p+B_{i2}}{(p^2+b_i p+c_i)^2}+...+\frac{A_{ir}p+B_{ir}}{(p^2+b_i p+c_i)^r}$ pour un couple de pôles multiples d'ordre r.

Ainsi, pour l'exemple retenu, la décomposition se fait selon :

$$H(p)=\frac{p^2+1}{(p-1)(p-3)^2(p^2+2)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{(p-3)^2}+\frac{Dp+E}{p^2+2}$$

contribution du pôle réel simple 1 ; contribution du pôle réel <u>double</u> 3 ; contribution du couple de pôles complexes simples $\pm\sqrt{2}$

II-2 Identification des coefficients

Reste alors à identifier les n coefficients qui apparaissent aux dénominateurs. La méthode la plus systématique consiste à réduire les termes de la décomposition au même dénominateur, puis d'identifier les coefficients du numérateur, obtenu par sommation, à ceux du numérateur N(p). On obtient alors un système de n équations, dont les n inconnues sont les coefficients cherchés.

Ainsi, pour l'exemple retenu on écrit que :

$$H(p)=\frac{A(p-3)^2(p^2+2)+B(p-1)(p-3)(p^2+2)+C(p-1)(p^2+2)+(Dp+E)(p-1)(p-3)^2}{(p-1)(p-3)^2(p^2+2)}$$

dont on peut développer le numérateur :

$$N(p)=(A+B+D)p^4+(-6A-4B+C-7D+E)p^3+(11A+5B-C+15D-7E)p^2$$
$$+(-12A-8B+2C-9D+15E)p+18A+6B-2C-9E$$

pour obtenir, par identification à $N(p)=p^2+1$:

$$\begin{cases}A+B+C=0\\-6A-4B+C-7D+E=0\\11A+5B-C+15D-7E=1\\-12A-8B+2C-9D+15E=0\\18A+6B-2C-9E=1\end{cases}\quad\text{qui fournit:}\quad\begin{cases}A=121/726\\B=-147/726\\C=330/726\\D=26/726\\E=-10/726\end{cases}$$

D'où la décomposition cherchée : $H(p)=\frac{1}{726}\left[\frac{121}{p-1}-\frac{147}{p-3}+\frac{330}{(p-3)^2}+\frac{26p-10}{p^2+2}\right]$.

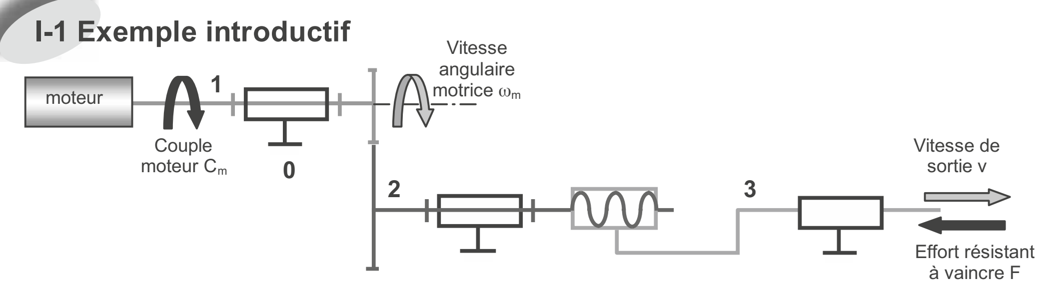
NB : Il existe d'autres méthodes, plus élaborées que celle-ci, utilisant divers procédés de substitution astucieux. Elles permettent parfois des développements moins fastidieux.

INERTIE ÉQUIVALENTE



I - DÉFINITION

I-1 Exemple introductif



Un moteur fournit un couple C_m pour entraîner en rotation à la vitesse ω_m un arbre 1, muni d'un pignon. Celui-ci entraîne, via un engrenage de rapport ρ, un arbre intermédiaire 2, qui, grâce à un système vis-écrou, provoque la translation d'une tige de sortie 3, soumise à un effort résistant F. Le pas de la liaison hélicoïdale est noté « pas ». La cinématique de l'ensemble permet alors d'exprimer les grandeurs cinématiques suivantes en fonction de la vitesse angulaire motrice ω_m :

- vitesse angulaire de l'arbre intermédiaire par rapport au bâti : $\omega_2 = \rho\,\omega_m$
- vitesse de la tige de sortie par rapport au bâti : $v = \rho\,\text{pas}\,\omega_m$

Les différentes énergies cinétiques par rapport au bâti sont alors :

- l'énergie cinétique de l'ensemble {arbre moteur, pignon moteur} : $T_{1/0} = \frac{1}{2} J_1 \omega_m^2$
- l'énergie cinétique de l'ensemble { roue réceptrice, vis} : $T_{2/0} = \frac{1}{2} J_2 (\rho\omega_m)^2$
- l'énergie cinétique de la tige de sortie : $T_{3/0} = \frac{1}{2} M_3 (\rho\,\text{pas}\,\omega_m)^2$

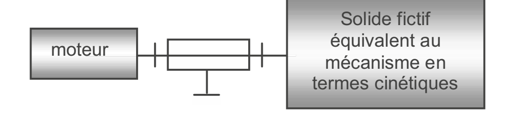
si J_1 et J_2 sont respectivement les moments d'inertie par rapport à leurs axes de rotation des ensembles correspondants et M_3 la masse de la tige de sortie.

L'énergie cinétique totale développée dans le mécanisme est donc :

$$T_{tot/0} = \frac{1}{2}[J_1 + \rho^2 J_2 + (\rho\text{pas})^2 M_3]\omega_m^2 = \frac{1}{2} J_{eq}\omega_m^2 \quad \text{avec} \quad J_{eq} = J_1 + \rho^2 J_2 + (\rho\text{pas})^2 M_3$$

I-2 Inertie équivalente

On appelle ***inertie équivalente*** d'un mécanisme, ramenée sur son arbre moteur, le moment d'inertie autour de cet axe qu'aurait un solide fictif qui, entraîné par le moteur, développerait la même énergie cinétique.



Dans l'exemple précédent, l'inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur est donc la grandeur

$$\boxed{J_{eq} = J_1 + \rho^2 J_2 + (\rho\text{pas})^2 M_3}$$

Remarque : Si nécessaire, il est possible de définir dans le même esprit une inertie équivalente ramenée sur un autre arbre. De même, on peut définir également une masse équivalente. Par exemple ici, si on exprime les différentes énergies cinétiques, non pas en fonction de ω_m, mais en fonction de v, on pourra écrire l'énergie cinétique totale sous la forme :

$T_{tot/0} = \frac{1}{2} M_{eq} v^2$ où $M_{eq} = \frac{J_{eq}}{(\rho\, pas)^2}$ est la masse équivalente ramenée sur la tige de sortie.

I-3 Application à la modélisation mécanique

Si on poursuit l'étude mécanique du mécanisme proposé, les différentes puissances qui agissent sur l'ensemble, dans son mouvement par rapport au bâti, sont :

- la puissance apportée par le moteur : $P_m = C_m \omega_m$
- la puissance développée par l'effort à vaincre : $P_r = -F\, v = -F\, \rho\, pas\, \omega_m$
- des puissances intérieures (pertes) : P_{int}

Ces pertes peuvent être modélisées en première approche comme provenant d'un couple résistant global ramené sur l'arbre moteur et proportionnel à sa vitesse angulaire (frottement de type visqueux) : $C_f = -f\omega_m$.

La puissance perdue est alors : $P_{int} = C_f \omega_m = -f\omega_m^2$

La somme des puissances agissant sur le mécanisme est donc : $P_{tot} = [C_m - F\rho\, pas - f\omega_m]\,\omega_m$

Le théorème de l'énergie cinétique permet alors d'écrire que $\frac{dT_{tot/0}}{dt} = P_{tot}$, d'où :

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2} J_{eq}\omega_m^2 = [C_m - F\rho\, pas - f\omega_m]\,\omega_m$$

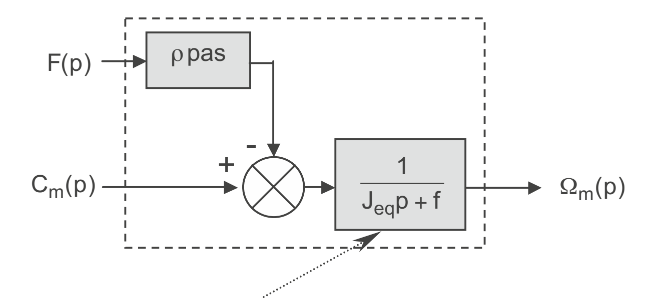
soit $J_{eq}\omega_m \frac{d\omega_m}{dt} = [C_m - F\rho\, pas - f\omega_m]\,\omega_m$, ou encore $\boxed{J_{eq}\frac{d\omega_m}{dt} + f\omega_m = C_m - F\rho\, pas}$

Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, cette équation s'écrit :

$$\boxed{(J_{eq}p + f)\,\Omega_m(p) = C_m(p) - \rho\, pas\, F(p)}$$

si $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $F(p)$ sont respectivement les transformées de $\omega_m(t)$, $C_m(t)$ et $F(t)$.

Ceci permet de construire le schéma bloc ci-contre modélisant le mécanisme.



L'inertie équivalente se retrouve donc ici au niveau de la constante de temps $\tau = J_{eq}/f$.

I-4 Non linéarité

Les développements qui précèdent sont simples puisque la cinématique du mécanisme est linéaire (engrenage, système vis-écrou). Ainsi, toutes les grandeurs cinématiques sont proportionnelles à la vitesse angulaire du moteur.

Ceci n'est pas toujours le cas. L'expression de l'inertie équivalente est alors bien plus complexe, puisqu'elle dépend de la position du mécanisme.

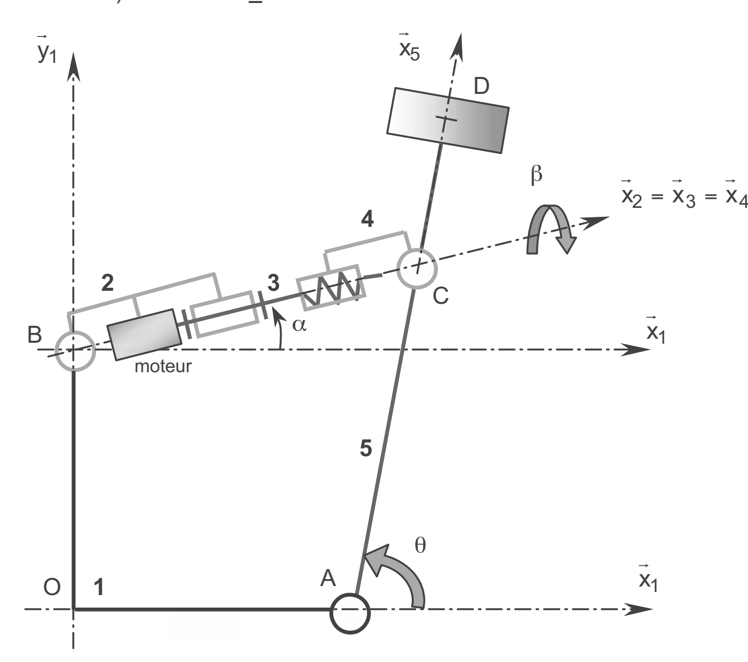
Une solution simplifiée pourra alors être de considérer une inertie équivalente moyenne, si ses variations ne sont pas trop grandes. Sinon, on se contentera classiquement de construire un modèle linéarisé, valable uniquement autour d'un certain point de fonctionnement.

II - INERTIE ÉQUIVALENTE APPROCHÉE DU BRAS MAXPID

II-1 Définition de la chaîne cinématique

Cette chaîne cinématique peut être modélisée selon le schéma ci-dessous. Elle est constituée :

- d'une vis 3 entraînée par un moteur, dont la position angulaire est notée β ;
- du corps 2 du moteur, articulé par rapport au bâti 1 (angle α) ;
- d'un bras 5 dont la position angulaire θ par rapport au bâti est la grandeur de sortie ;
- d'un écrou 4, articulé par rapport au bras 5 et en liaison hélicoïdale (de pas p = 4 mm/tour, à droite) avec la vis 3.



OA = a = 70 mm
OB = b = 80 mm
AC = c = 80 mm

Des masses M, de centre d'inertie D, peuvent être disposées à l'extrémité du bras pour simuler une charge. Ici M = 1,95 kg.
On pose AD = d, réglée à la valeur 275 mm.

Une étude géométrique permet de montrer que :

$$\beta = \frac{1}{p}[\sqrt{(a+c)^2 + b^2} - \sqrt{(a + c\cos\theta)^2 + (c\sin\theta - b)^2}]$$

Cette loi, non linéaire, peut être linéarisée autour du point de fonctionnement θ = 60°, puis inversée pour définir la loi cinématique approchée :

$\frac{\Delta\theta}{\Delta\beta} \approx 9.10^{-3}$ les deux angles étant exprimés dans la même unité.

II-2 Modèle de connaissance

Pour déterminer l'inertie équivalente de l'ensemble en mouvement ramenée sur l'arbre moteur, il faut calculer son énergie cinétique et l'exprimer en fonction de la vitesse du moteur, que l'on note $\omega_m = d\beta/dt$.

Compte tenu de la complexité du mouvement, seules les énergies cinétiques prépondérantes seront calculées en première approximation, soit :

- l'énergie des masses additionnelles dans leur mouvement de rotation par rapport au bâti ; on néglige l'énergie cinétique du bras 5 lui-même, en alliage d'aluminium, devant celle des masses additionnelles, en acier et plus excentrées ;
- l'énergie de l'ensemble 3 tournant à vitesse rapide ω_m, en négligeant les variation de l'angle α.

En considérant les masses comme ponctuelles en D, leur énergie cinétique s'écrit :

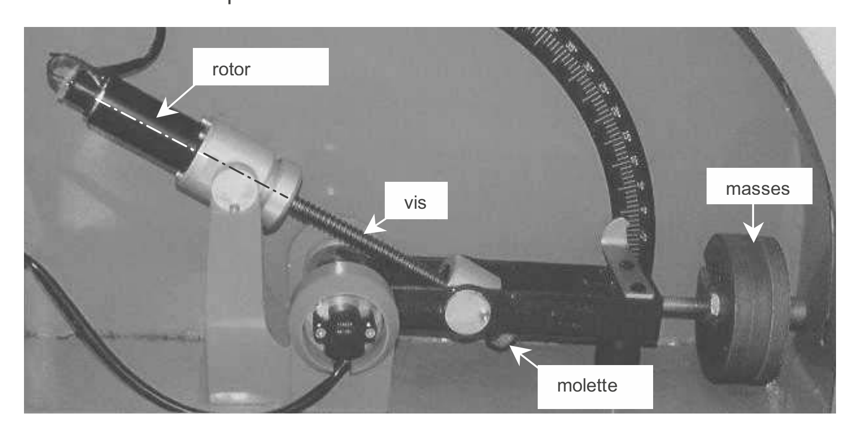
$$T_{masses/0} = \frac{1}{2}M(d\frac{d\theta}{dt})^2$$

Or, en adoptant la loi cinématique linéarisée : $\frac{\Delta\theta}{\Delta\beta} \approx 9.10^{-3} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} \approx 9.10^{-3}\frac{d\beta}{dt} = 9.10^{-3}\omega_m$

D'où : $T_{masses/0} = \frac{1}{2}M(9.10^{-3}d)^2\omega_m^2$

L'ensemble 3 est par ailleurs principalement constitué :

- du rotor du moteur,
- de la vis,
- de l'organe d'accouplement de la vis au rotor,
- d'une molette en bout de vis permettant une utilisation manuelle.



Le moment d'inertie de cet ensemble par rapport à son axe peut être déterminé en rassemblant les données des différents constructeurs. Il vient $J_3 \approx 3,1 kg.m^2$

Son énergie cinétique, en négligeant les variations d'inclinaison α, s'écrit quant à elle :

$$T_{3/0} = \frac{1}{2}J_3\omega_m^2$$

Ainsi, l'énergie cinétique totale comptabilisée est $T_{tot/0} = T_{masses/0} + T_{3/0}$, soit :

$$T_{tot/0} = \frac{1}{2}M(9.10^{-3}d)^2\omega_m^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_m^2 = \frac{1}{2}[M(9.10^{-3}d)^2 + J_3]\omega_m^2$$

où on identifie l'inertie équivalente cherchée : $\boxed{J_{eq} = M(9.10^{-3}d)^2 + J_3}$

Numériquement il vient : $J_{eq} = 1,95x(9.10^{-3}x0,275)^2 + 3,1.10^{-5} = \boxed{4,3.10^{-5} kg.m^2}$

Cette valeur constitue bien évidemment une ***minimisation de l'inertie équivalente réelle***, puisqu'un certain nombre d'énergies cinétiques ont été négligées :

- celle du bras 5 devant celle des masses,
- celle de tout l'ensemble {2, 3, 4} dans son mouvement de basculement d'angle α,
- celles de petits éléments, comme les billes des roulements du rotor par exemple…

De plus, les masses additionnelles ont été considérées comme ponctuelles, ce qui est toujours minimisant en termes d'inertie.

Par ailleurs, elle a été calculée à partir d'une loi cinématique linéarisée et n'est donc acceptable qu'autour du point de fonctionnement où cette linéarisation a été conduite. Elle est en réalité variable au cours du mouvement.

Ce modèle de connaissance ne donne donc qu'une première estimation, minimale, de l'inertie équivalente.

DROITE DES MOINDRES CARRÉS

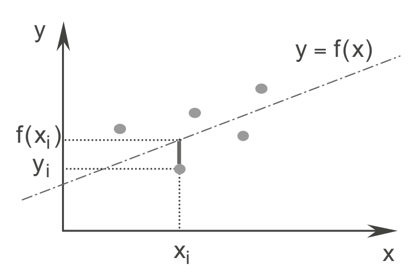


I - FORMULATION DU PROBLÈME GÉNÉRAL

I-1 Objectif

Soient n points à deux variables : $P_i = (x_i, y_i)$. On cherche à approximer la distribution de ces points par une fonction donnant y = f(x), cette fonction (dont on fixe a priori le type) dépendant de k paramètres p_k. Par exemple on peut retenir a priori :

- l'approximation linéaire qui dépend d'un seul paramètre a : $y = ax$
- l'approximation par une loi de puissance qui dépend aussi d'un seul paramètre a : $y = x^a$
- l'approximation affine qui dépend de deux paramètres a et b : $y = ax + b$
- l'approximation polynomiale de degré 2 qui dépend trois paramètres a, b et c : $y = ax^2 + bx + c$
- etc.



Pour chaque point, on caractérise l'erreur commise par l'approximation par : $e_i = y_i - f(x_i)$. L'objectif consiste alors à minimiser cette erreur sur l'ensemble des n points.

I-1 Droite des moindres carrés

Une première idée pourrait être de minimiser la somme de ces n erreurs. Mais cette somme n'est pas révélatrice de la dispersion. En effet, par exemple, des erreurs peuvent s'annuler deux à deux, ce qui offre une somme des erreurs nulle indépendamment de la dispersion. L'idée consiste alors à minimiser la somme de ces erreurs élevées au carré.

On construit alors la grandeur : $E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$

Dans les cas courants auxquels nous nous limiterons ici, les extremums de cette fonction seront clairement des minimums. Il suffit donc de résoudre le système de k équations à k inconnues $\frac{\partial E}{\partial p_k} = 0$.

Les k paramètres solutions de ce système de Cramer définissent alors la fonction d'approximation f(x).

II - CAS DE L'APPROXIMATION LINÉAIRE

Fonction d'approximation : $y = ax$. Paramètre cherché : a.

II-1 Mise en œuvre de la méthode des moindres carrés

Compte tenu de la méthode exposée, on construit :

$$E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2ax_iy_i + a^2x_i^2$$

puis on calcule : $\dfrac{\partial E}{\partial a} = \dfrac{dE}{da} = \sum_{i=1}^{n} -2x_iy_i + 2ax_i^2$

qui s'annule pour : $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Ce qui définit la fonction d'approximation : $y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\, x$

II-2 Qualité de l'approximation

Si maintenant on cherche la fonction d'approximation $x = a'y$, on procède de la même manière :

$$E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - g(y_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a'y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a'x_iy_i + a'^2y_i^2$$

d'où : $\dfrac{\partial E}{\partial a'} = \dfrac{dE}{da'} = \sum_{i=1}^{n} -2x_iy_i + 2a'y_i^2$

qui s'annule pour : $a' = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$. Ce qui définit la fonction d'approximation : $x = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\, y$

Si l'approximation est parfaite, les deux fonctions d'approximation $y = ax$ et $x = a'y$ sont l'inverse l'une de l'autre et donc $a.a' = 1$.

On définit alors le nombre $R^2 = a.a'$, appelé coefficient de détermination. Plus ce coefficient est proche de 1, meilleure est l'approximation. Il permet donc d'en apprécier la qualité.

On utilise aussi le nombre $R = \sqrt{R^2}$ affecté du signe de a. Il est appelé coefficient de corrélation.

Coefficient de détermination : $R^2 = \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

III - CAS DE L'APPROXIMATION AFFINE

Fonction d'approximation : $y = ax + b$. Paramètres cherchés : a et b.

III-1 Mise en œuvre de la méthode des moindres carrés

Compte tenu de la méthode exposée, on construit :

$$E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + a^2x_i^2 + 2abx_i + b^2$$

Puis on calcule : $\dfrac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} -2x_iy_i + 2ax_i^2 + 2bx_i$ et $\dfrac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} -2y_i + 2ax_i + 2b$

D'où le système de deux équations à deux inconnues a et b à résoudre :

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} -2x_iy_i + 2ax_i^2 + 2bx_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} -2y_i + 2ax_i + 2b = 0 \end{cases} \quad \text{que l'on écrira :} \quad \begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} yi \end{cases}$$

et dont la résolution fournit :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix}} = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\,)^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\,)^2}$$

Ce qui définit la fonction d'approximation : $y = \dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\,)^2} x + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\,)^2}$

III-2 Qualité de l'approximation

Si maintenant on cherche la fonction d'approximation $x = a'y + b'$, on procède de la même manière pour aboutir à (il suffit de changer les x_i en y_i dans l'écriture ci-dessus) :

$$y = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,)^2} x + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,)^2}$$

Comme pour l'approximation linéaire, on définit alors un coefficient de détermination qui est le produit des deux pentes et qui sera d'autant plus proche de 1 que l'approximation sera bonne :

$$R^2 = \frac{[n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,]^2}{[n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\,)^2].[n\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,)^2]}$$

III-3 Vocabulaire : régression « linéaire »

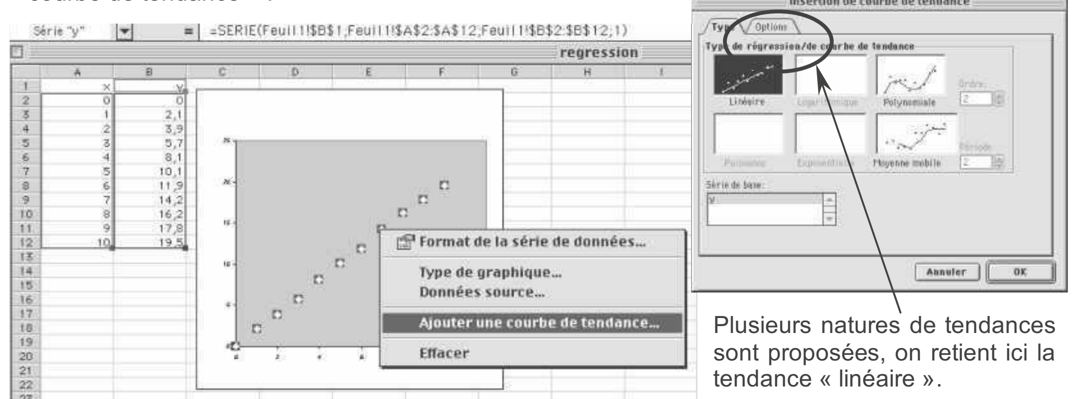
L'approximation affine par les moindres carrés qui vient d'être exposée est certainement la plus courante. Elle est souvent appelée *régression linéaire*. Le terme de *régression* vient du contexte historique de travaux statistiques dans le domaine de l'économie. Le qualificatif *linéaire* peut surprendre, puisque l'approximation ne traduit pas de proportionnalité ($b \neq 0$). Toutefois, on peut vérifier que le point moyen $(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ est sur la droite d'approximation. Alors, cette droite modélise la *linéarité* de variations autour de ce point moyen. Cette simplification est fondamentale dans l'étude des phénomènes physiques non linéaires à travers la notion de point de fonctionnement autour duquel une linéarisation est conduite.

IV - QUELQUES FONCTIONNALITÉS D'UN TABLEUR À CE SUJET

Les tableurs permettent d'effectuer des régressions linéaires (c'est-à-dire des approximations affines par les moindres carrés, voir ci-dessus) à partir de fonctions préprogrammées. Plusieurs méthodes sont possibles. La plus simple est exposée ci-dessous.

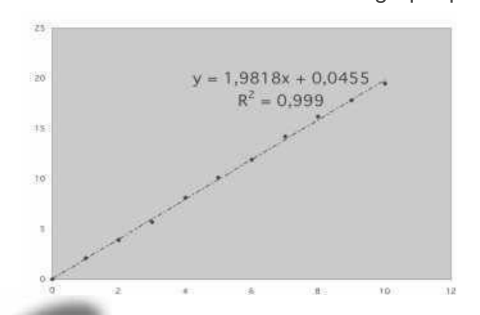
IV-1 Approximation affine

À l'aide du bouton droit de la souris, on peut sélectionner la série de points, puis ajouter une « courbe de tendance » :



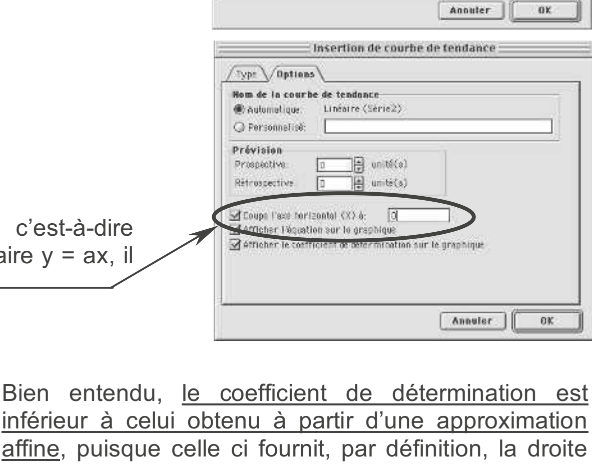
Plusieurs natures de tendances sont proposées, on retient ici la tendance « linéaire ».

L'onglet option permet alors de faire des choix, comme par exemple celui d'insérer l'équation de la droite et le coefficient de détermination sur le graphique.



IV-2 Approximation linéaire

Si on veut forcer le coefficient b à zéro, c'est-à-dire effectuer une approximation réellement linéaire y = ax, il faut sélectionner l'option correspondante.



Bien entendu, le coefficient de détermination est inférieur à celui obtenu à partir d'une approximation affine, puisque celle ci fournit, par définition, la droite qui passe « au mieux » parmi les points. Toutefois, dans certains cas, la recherche d'un modèle linéaire peut amener à exiger cette approximation, moins bonne, mais dont le point (0,0) doit faire partie.

INDEX ALPHABÉTIQUE

SCIENCES SUP



Olivier Le Gallo

AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

Cet ouvrage est destiné aux élèves des classes préparatoires MP, PSI, PT et TSI, d'IUT, de licence et d'écoles d'ingénieurs.

Il traite de toutes les notions d'Automatique des systèmes linéaires au programme des classes préparatoires scientifiques. Formant un ensemble complet et cohérent, il intéresse également les étudiants des IUT et des licences, ainsi que des premières années d'écoles d'ingénieurs.

Une des particularités de l'ouvrage est de présenter, non seulement de très nombreuses illustrations et exercices corrigés, mais également des activités de travaux pratiques permettant de mettre en œuvre une véritable démarche de modélisation. Le lecteur y trouvera une source abondante de réflexions et d'approfondissements.

Les systèmes étudiés sont tous de nature mécanique. Ils permettent aux étudiants de se forger une culture des solutions technologiques dans ce domaine essentiel du monde industriel, en synergie avec le cours de Mécanique. Cette démarche, propre à l'enseignement des Sciences Industrielles pour l'Ingénieur en classes préparatoires, place clairement l'Automatique dans la perspective transdisciplinaire qui la caractérise.

OLIVIER LE GALLO
est professeur de chaire supérieure en classe préparatoire PSI* au lycée Clemenceau de Nantes. Agrégé de Mécanique, il est ancien élève de l'École Normale Supérieure de Cachan et docteur de l'Université Paris XII.

MATHÉMATIQUES
PHYSIQUE
CHIMIE
SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
INFORMATIQUE
SCIENCES DE LA VIE
SCIENCES DE LA TERRE



ISBN 978-2-10-054192-8



www.dunod.com